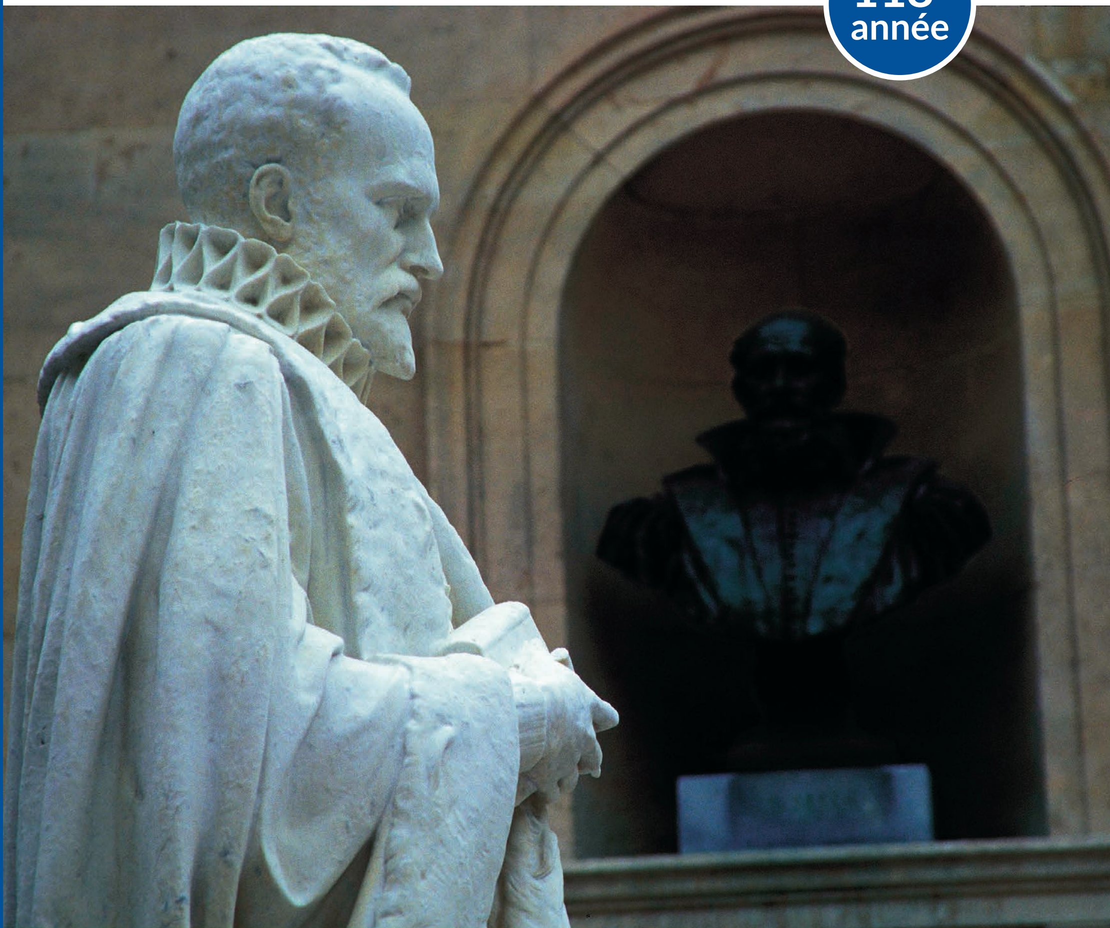
ANNUAIRE du COLLÈGE DE FRANCE 2017 - 2018

Résumé des cours et travaux

118e année



COLLÈGE DE FRANCE
1530

Géométrie algébrique

Claire Voisin

Membre de l'Institut (Académie des sciences),
professeure au Collège de France

Mots-clés : variétés algébriques, variétés complexes, théorie de Hodge

La série de cours et séminaires « Variétés hyper-kählériennes » est disponible en vidéo, sur le site internet du Collège de France (https://www.college-de-france.fr/site/claire-voisin/course-2017-2018.htm).

Enseignement

Cours et séminaires – Variétés hyper-kählériennes

Les variétés hyper-kählériennes sont les généralisations naturelles des surfaces K3. Comme pour les tores complexes, ces variétés existent naturellement dans le cadre kählérien compact mais celles qui sont projectives et relèvent donc de la géométrie algébrique sont denses dans l'espace de modules. Si l'on se restreint aux variétés hyper-kählériennes projectives, leur étude est liée (par l'étude des espaces de modules *via* l'application des périodes) aux variétés de Shimura et aux formes automorphes.

Le cours introduit les résultats de théorie de Hodge et de théorie des déformations nécessaires pour montrer que les déformations des variétés kählériennes compactes à fibré canonique trivial (en particulier les variétés hyper-kählériennes) sont non obstruées et que l'application des périodes est un isomorphisme local sur le domaine des périodes, lequel est défini par la forme de Beauville-Bogomolov dont l'existence est une propriété topologique remarquable de ces variétés et a des conséquences considérables sur leur topologie. On énonce différentes versions des théorèmes de Torelli. Outre la théorie de Hodge, les deux aspects suivants du sujet sont abordés :
– géométrie différentielle complexe : métriques de Kähler-Einstein, structure quaternionique, et « twistor lines » ;
– géométrie algébrique : construction de variétés hyper-kählériennes et étude de leur classe de déformation.

Cours 1 (1er mars 2018) – Variétés hyper-kählériennes : point de vue riemannien, droites de twisteurs

Cours 2 (8 mars 2018) – Variétés hyper-kählériennes : déformations et théorie de Hodge des variétés à fibré canonique trivial

Cours 3 (15 mars 2018) – Variétés hyper-kählériennes : domaine et application des périodes

Cours 4 (22 mars 2018) – Variétés hyper-kählériennes : forme de Beauville-Bogomolov et topologie

Cours 5 (29 mars 2018) – Variétés hyper-kählériennes : densité des variétés projectives, cône de Kähler et Torelli

Cours 6 (5 avril 2018) – Variétés hyper-kählériennes : dégénérescence des variétés hyper-kählériennes et types de déformations

Cours 7 (12 avril 2018) – Variétés hyper-kählériennes : cubiques de dimension 4 et fibrations en jacobiennes intermédiaires

Séminaire 1 (5 avril 2018) – Construction de variétés hyper-kählériennes exotiques par désingularisation d'espaces de modules de fibrés sur des surfaces K3 ou abéliennes, par Kieran O'Grady (université de la Sapienza de Rome)

Cours à l'extérieur

On Grothendieck's standard conjectures

Université de Trente, avril 2018

1) Introduction to Hodge structures and the Grothendieck standard conjectures

The topology of smooth projective varieties is very restricted by Hodge theory. The central notion is that of a polarized Hodge structure. The morphisms of Hodge structures are closely related to Hodge classes (which appear in the Hodge conjecture). I will present the Hodge-Lefschetz decomposition on the cohomology and formulate the Grothendieck standard conjectures and some of their applications.

2) Grothendieck's standard conjectures and Hodge conjecture

I will discuss the notion of absolute Hodge class and its relation with the structure of Hodge loci. I will explain one main consequence of the Lefschetz standard conjecture, which is the variational Hodge conjecture.

Géométrie projective et géométrie kählérienne

Académie royale des sciences de Belgique, Bruxelles, 13 et 14 mars 2018

Je décris dans ce cours les liens historiques entre la géométrie complexe, la géométrie algébrique et la géométrie analytique, en mettant l'accent sur les questions de topologie. La partie moderne de ces développements repose sur la théorie de Hodge et la géométrie kählérienne. J'explique pour finir comment la notion de structure de Hodge sur une algèbre de cohomologie m'a permis de construire des variétés kählériennes compactes non homéomorphes à des variétés projectives.

Recherche

a) J'ai travaillé sur un problème posé originellement par Bastianelli, de Poi, Ein, Lazarsfeld et Ullery : la gonalité d'une variété abélienne très génerale tend-elle vers l'infini avec sa dimension ?

J'ai répondu affirmativement à cette question, donnant différentes variantes et étendant le problème à d'autres contectes.

Je montre que si g est au moins égal à 2^k(k+1), une variété abélienne très générale de dimension g ne contient pas de courbe k-gonale. Si g est au moins égal à 2k-1, une variété abélienne très générale de dimension g ne contient pas de courbe k-gonale totalement ramifiée au-dessus d'un point de la droite projective. Ce second résultat est la généralisation d'un théorème de Pirola : une variété abélienne très générale de dimension au moins 3 ne contient pas de courbes hyperelliptiques.

Par ailleurs, je considère plus généralement la géométrie des orbites de 0-cycles d'une variété abélienne pour l'équivalence rationnelle. Je montre que si g est au moins égal à (k+1)2^(k+1), tout 0-cycle de degré k d'une variété abélienne très générale de dimension g a une orbite dénombrable. Enfin, si g est au moins égal à 2k-1, l'orbite de k0_A est dénombrable.

Les preuves reposent sur la notion d'ensembles naturellement définis dans les variétés abéliennes. Suivant une stratégie due à Pirola, on montre que la dimension de ces ensembles décroît strictement avec g, à moins qu'ils ne soient de dimension g ou 0.

b) J'ai travaillé avec Debarre, Han et O'Grady sur la construction de diviseurs HLS dans les espaces de modules de variétés de Debarre-Voisin. Ce sont des variétés hyper-kählériennes dont la construction fait intervenir un trivecteur à 10 variables. Nous construisons des trivecteurs spéciaux dont la variété de Debarre-Voisin est dégénérée mais qui, après éclatement, font apparaître une famille de surfaces K3 sur le bord de l'espace de modules, de sorte que la vraie limite des variétés de Debarre-Voisin le long de ces diviseurs existe et est un second schéma de Hilbert d'une surface K3.

Publications

Voisin C., « Chow rings and gonality of general abelian varieties », *Annales Henri Lebesgue*, à paraître, http://arxiv.org/abs/1802.07153.

Voisin C., « Segre classes of tautological bundles on Hilbert schemes of surfaces », *Algebraic Geometry*, vol. 6, n° 2, 2019, p. 186-195, DOI : 10.14231/ag-2019-010 [arXiv: 1708.06325].

Kollár J., Laza R., Saccà G. et Voisin C., « Remarks on degenerations of hyper-Kähler manifolds », *Annales de l'Institut Fourier*, à paraître, http://arxiv.org/abs/1704.02731.

Colombo E., Farkas G., Verra A. et Voisin C., « Syzygies of Prym and paracanonical curves of genus 8 », *Épijournal de Géométrie Algébrique*, vol. 1, 2017, article n° 7.

Voisin C., « Hyper-Kaehler compactification of the intermediate Jacobian fibration of a cubic fourfold: The twisted case », *in* N. Budur, T. De Fernex, R. Docampo et K. Tucker (dir.), *Local and global methods in algebraic geometry. Conference in honor of Lawrence Ein's 60th birthday, May 12-15, 2016, University of Illinois at Chicago*, Providence, American Mathematical Society, coll. « Contemporary mathematics », n° 712, 2018, p. 341-, http://arxiv.org/abs/1611.06679.