Gravité modifiée, Branes, gravité massive

Collège de France,
23 janvier 2017

Cédric Deffayet - CNRS
(Institut d'Astrophysique de Paris et
Institut des Hautes Études Scientifiques)

En cosmologie: problématique similiaire à celle rencontrée en astronomie à la fin du XIXe siècle concernant le système solaire:

Des observations conduisent à postuler dans le cadre de la théorie standard de la gravitation (Relativité Générale aujourd'hui, gravité de Newton hier) des contenus « noirs » de l'Univers:

Matière et énergie noires (ou « sombres »)

Ces contenus noirs de l'Univers ne sont aujourd'hui détectés que par leur influence gravitationnelle

Autre possibilité: modifier la gravitation ?

$$\boxed{H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho}$$

Changer la gravitation ?

Énergie et/ou matière noires ?

Changer la gravitation ?

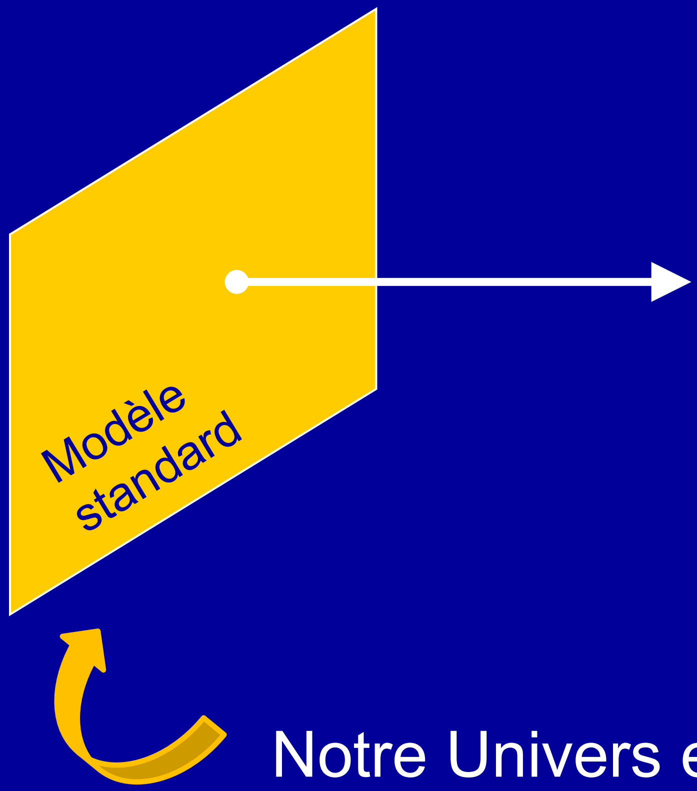
Pour “remplacer” la matière noire:

Modèle “MOND” de Mordehei Milgrom (1983)

Pour “remplacer” l’énergie noire:

Modèle DGP (Dvali, Gabadadze, Porrati, C.D. 2000, 2001)

Le modèle DGP: un Univers “brane”



Notre Univers est une surface (une “brane”) à 3+1 dimensions, plongée dans un espace-temps à 5 dimensions dont la dynamique est régie par la gravitation d’Einstein à 5 dimensions.

On obtient les équations de Friedmann modifiées (C.D. 2001)

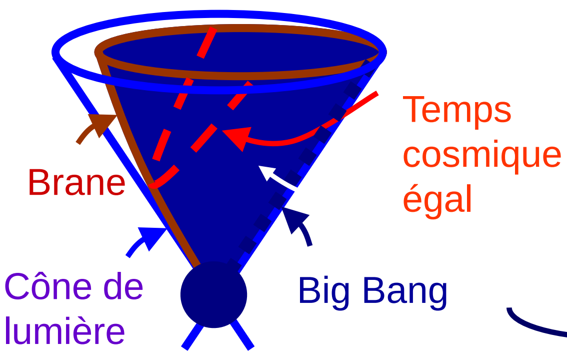
Deux Branches de solutions

Densité d'énergie de la matière localisée sur la brane

$$\sqrt{H^2 + \frac{k}{a^2}} = \frac{\epsilon}{2r_c} + \sqrt{\frac{\rho_{(M)}}{3M_P^2} + \frac{1}{4r_c^2}}$$

avec $\epsilon = \pm 1$

$$\dot{\rho} = -3H\left(P + \rho\right)$$

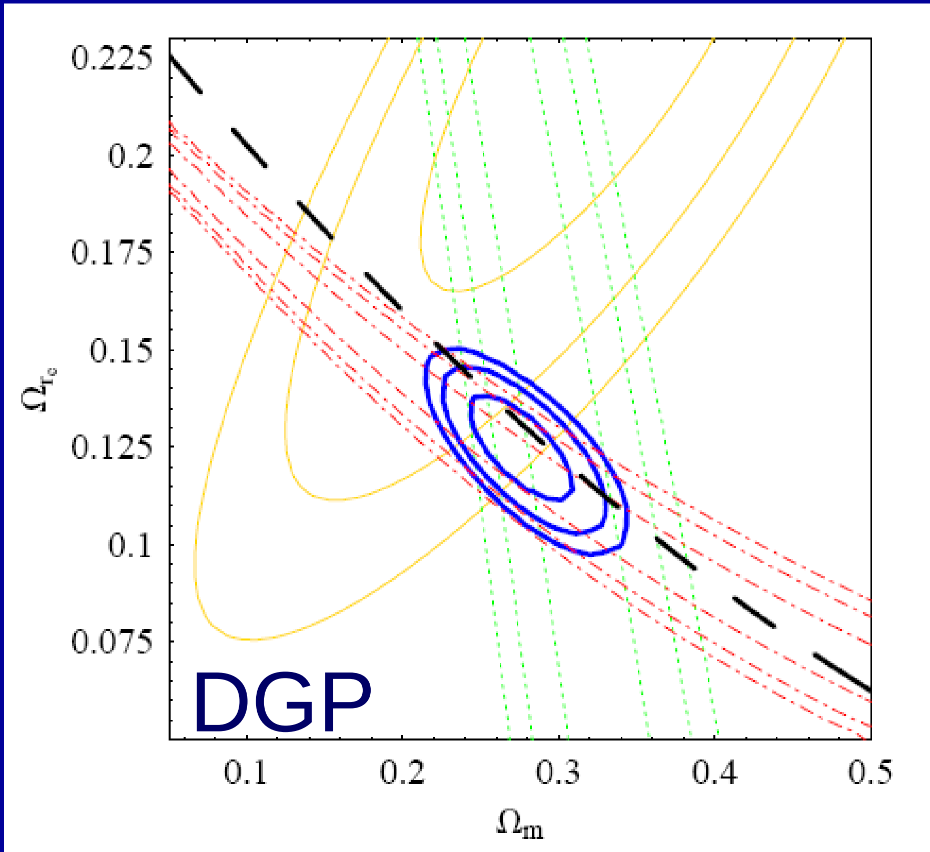


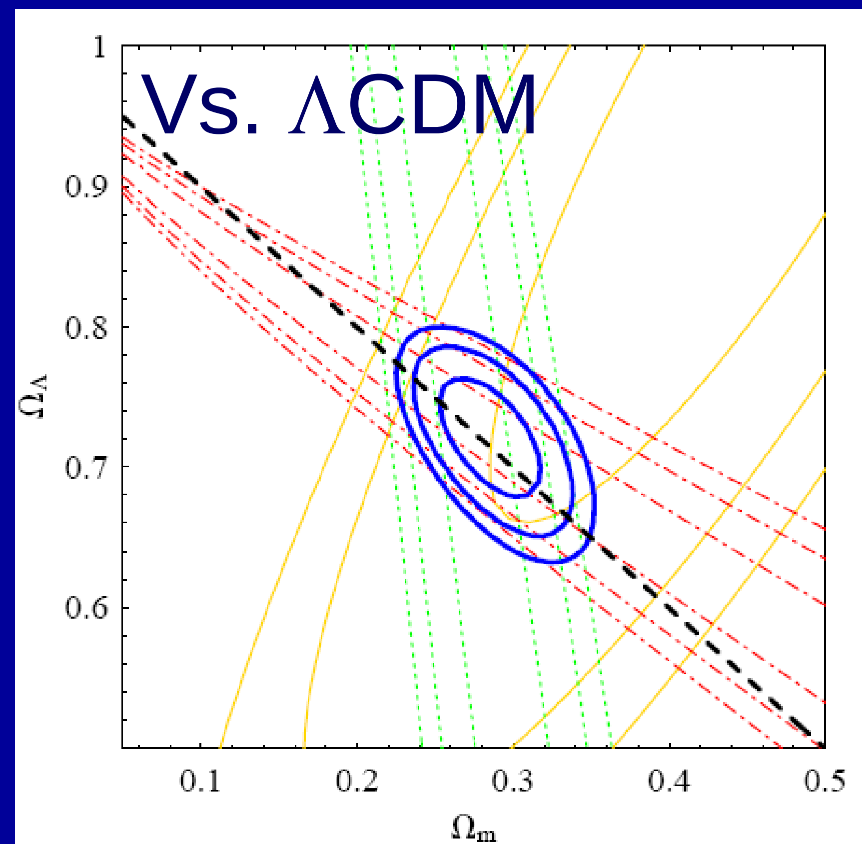
- Analogue aux équations de Friedmann standard

$$H^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{\rho_{(M)}}{3M_P^2}$$

dans l'univers primordial (petits rayons de Hubble $H^{-1} \ll r_c$)

- Déviation aux temps longs (auto-acceleration)





Maartens, Majerotto 2006
(see also Fairbairn, Goobar 2005;
Rydbeck, Fairbairn, Goobar 2007)

- À grande distance, la gravitation diffère de la gravitation d’Einstein et a des similitudes avec une gravité transportée par un “graviton massif” !

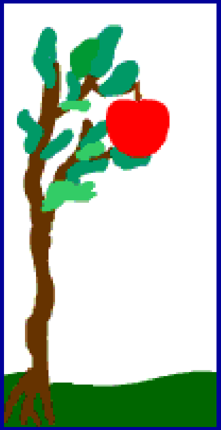
- Le modèle DGP a relancé l’intérêt pour la “gravité massive”

Quelques mots sur

la “gravité de masse nulle”

(celle de Newton et d’Einstein)

Lois de la gravitation newtonienne (1687)



Masse m_1 distance r Masse m_2

Constante de la gravitation universelle

Force gravitationnelle égale à $G\ m_1\ m_2 / r^2$

Deux caractéristiques de la gravitation Newtonienne:

- Elle a une portée infinie

$$\boxed{G\, m_1\, m_2 / r^2}$$

- Elle est transmise instantanément

Ces deux propriétés se lisent dans l'équation de Poisson à laquelle obéit le potentiel gravitationnel Φ_N :

$$\boxed{\Delta \Phi_N = 4 \pi G_N \rho_m}$$

Force $\propto$ 1/(Distance)^2

Équation elliptique
(pas de propagation)

1905-1915: de la relativité restreinte à la relativité générale

1905: Einstein formule la « relativité restreinte »

- c = vitesse de la lumière, <u>indépassable</u> par des mobiles matériels et <u>constante</u> dans tous les référentiels inertiels
- Naissance de « l'espace-temps »
- « $E = m c^2$ »

c = vitesse de la lumière, indépassable par des mobiles matériels et constante dans tous les référentiels inertiels

A quelle vitesse « se propage » la force de gravitation de Newton ?

Naissance de « l’espace-temps »

L’espace et le temps sont entremêlés …

l’espace-temps de la relativité restreinte est « l’espace temps de Minkowski »

dont on peut prendre comme métrique $\eta_{\mu\ \nu}$ = diag(-1,1,1,1)

« $E = m c^2$ »

L’énergie (gravitationnelle ?)
peut elle « graviter » ?

1915: La Relativité Générale

La géométrie de l'espace-temps est déterminée par les «équations d'Einstein » (1915) et codée dans sa métrique $g_{\mu\ \nu}$

$$\boxed{G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}}$$

Tenseur d'Einstein: opérateur hyperbolique agissant sur la métrique

Tenseur énergie-impulsion de la matière

Une petite perturbation $h_{\mu\,\nu}$ au voisinage de l'espace-temps de Minkowski:

$$g_{\mu\,\nu} = \eta_{\mu\,\nu} + h_{\mu\,\nu}$$

obéit à une équation d'onde

$\sim \Box\, h_{\mu\,\nu}$ = sources d'énergie-impulsion

→ Redonne l'équation de Poisson pour le potentiel gravitationnel Φ_N ($\sim h_{00}$) dans la limite non relativiste

→ Propagation de la « force de gravitation » à vitesse finie (c)

Ondes gravitationnelles prédites par Einstein en 1916

Näherungsweise Integration der Feldgleichungen der Gravitation.

Von A. Einstein.

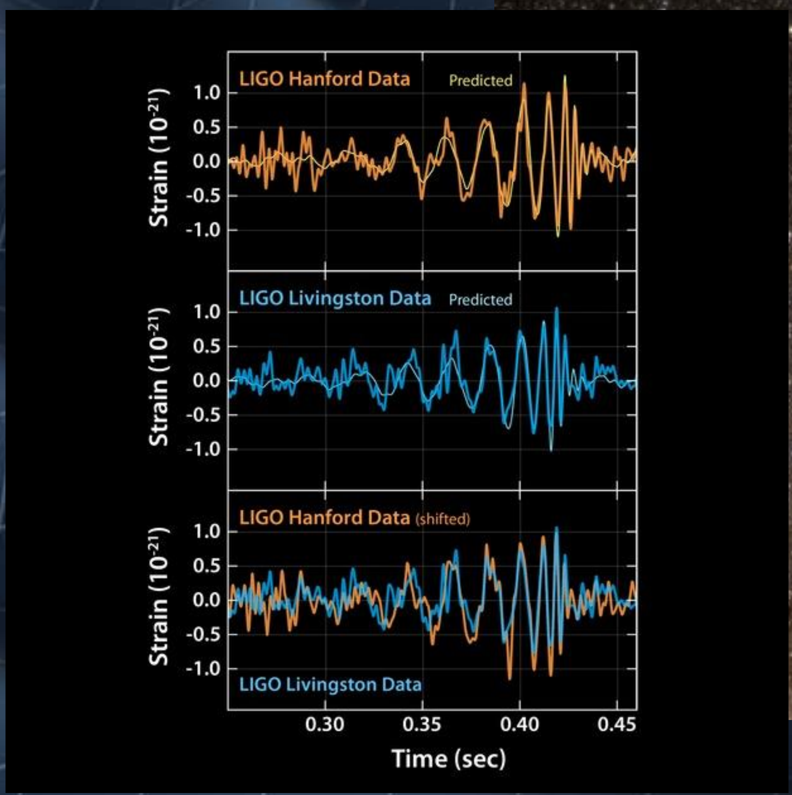
Bei der Behandlung der meisten speziellen (nicht prinzipiellen) Problem auf dem Gebiete der Gravitationstheorie kann man sich damit begnüge die $g_{\mu\nu}$ in erster Näherung zu berechnen. Dabei bedient man sich m Vorteil der imaginären Zeitvariable $x_4 = it$ aus denselben Gründen w in der speziellen Relativitätstheorie. Unter »erster Näherung« ist dab verstanden, daß die durch die Gleichung

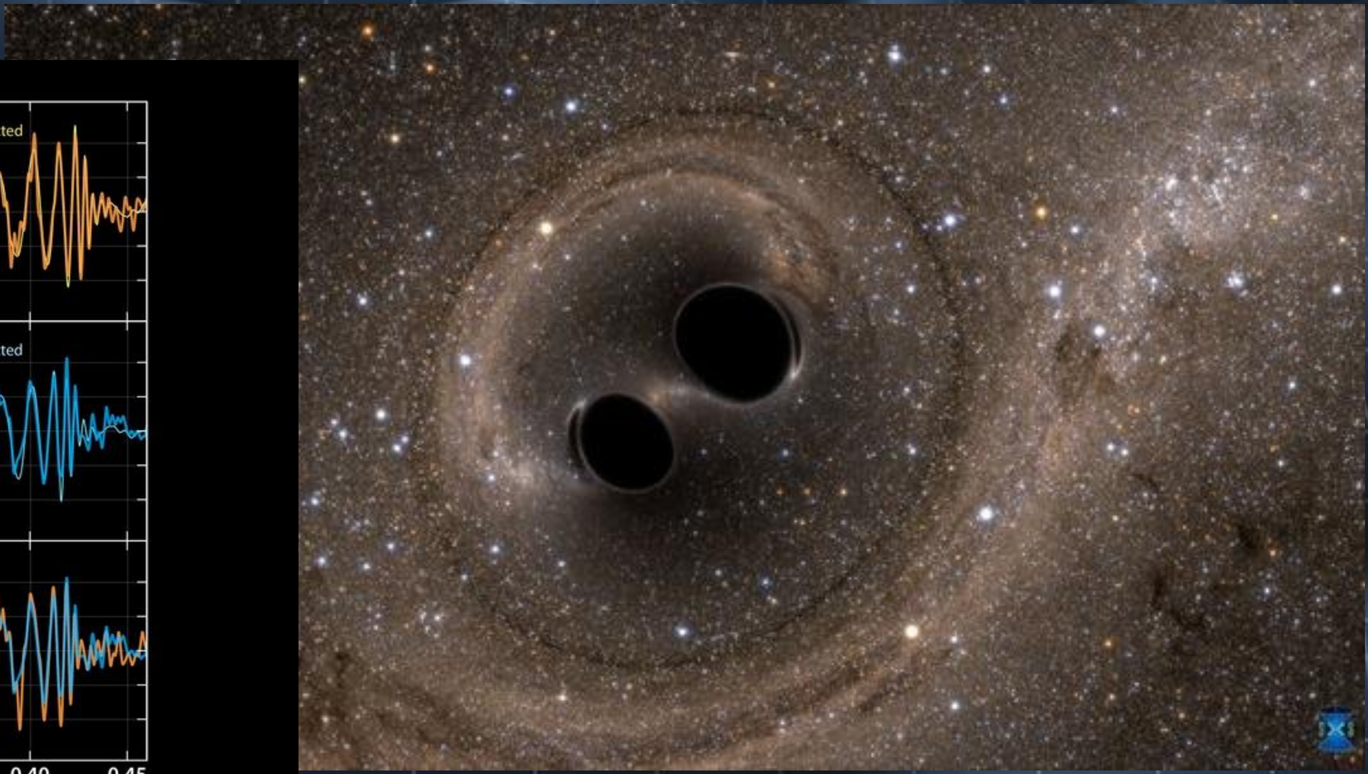
$$g_{\mu\nu} = -\delta_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu} \tag{1}$$

definierten Größen $\gamma_{\mu\nu}$, welche linearen orthogonalen Transformatione gegenüber Tensorcharakter besitzen, gegen 1 als kleine Größen b

Première détection directe de ces ondes annoncée le 11 février 2016 par LIGO-VIRGO

Correspond à la fusion de deux trous noirs (chacun environ 30 fois plus massifs que le soleil) et située à environ 1.3 milliards d’années lumière





Dans le cadre de la relativité générale,

Les ondes gravitationnelles sont à la gravitation

ce que les ondes électromagnétiques sont à la théorie de Maxwell

Quid du graviton ?

Analogue du photon
(soit un quantum de gravitation)

Détectable ?

De masse nulle

Propriété liée au caractère
infinie de la portée de la “force”
de gravitation

$\boxed{G\ m_1\ m_2\ /\ r^2}$

- Une force transportée par une particule de *masse nulle* est de “portée infinie”:

$\propto 1/r^2$ (à 3+1 dimensions)

- Une force transportée par une particule de *masse m* a une “portée finie” (coupure exponentielle de type “Yukawa”)

$\propto \exp(-r / \lambda)$
(avec $\lambda = \hbar / m c$: longueur de Compton, mesure la portée de la force)

Dans la limite non relativiste
(et linéarisée),

une telle force est décrite par l’équation de Helmholtz modifiée (qui remplace l’équation de Poisson):

$$\Delta \Phi - \Phi / \lambda^2 \propto \rho$$

Les équations d'Einstein

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

qui dérivent de l'équation de Einstein-Hilbert

$$\int d^4x \sqrt{g} R$$

sont invariantes sous les difféomorphismes qui « protègent » la masse du graviton (analogue de l'invariance de jauge des équations de Maxwell)

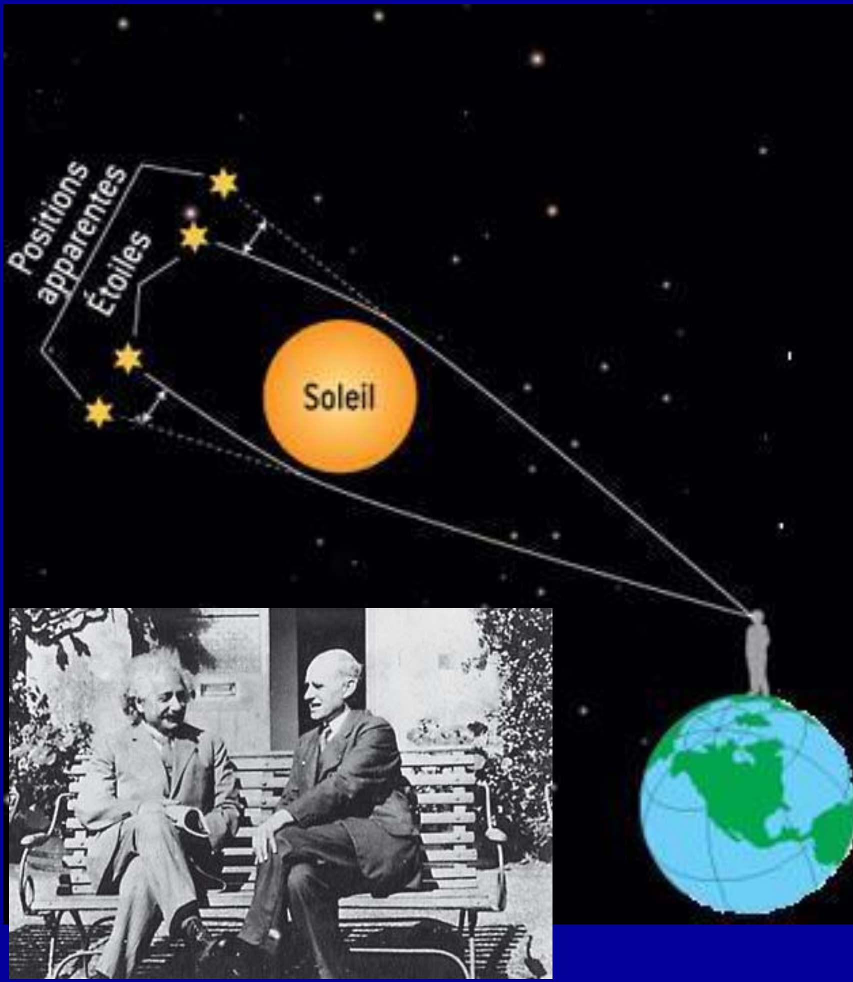
Les tests historiques de la relativité générale

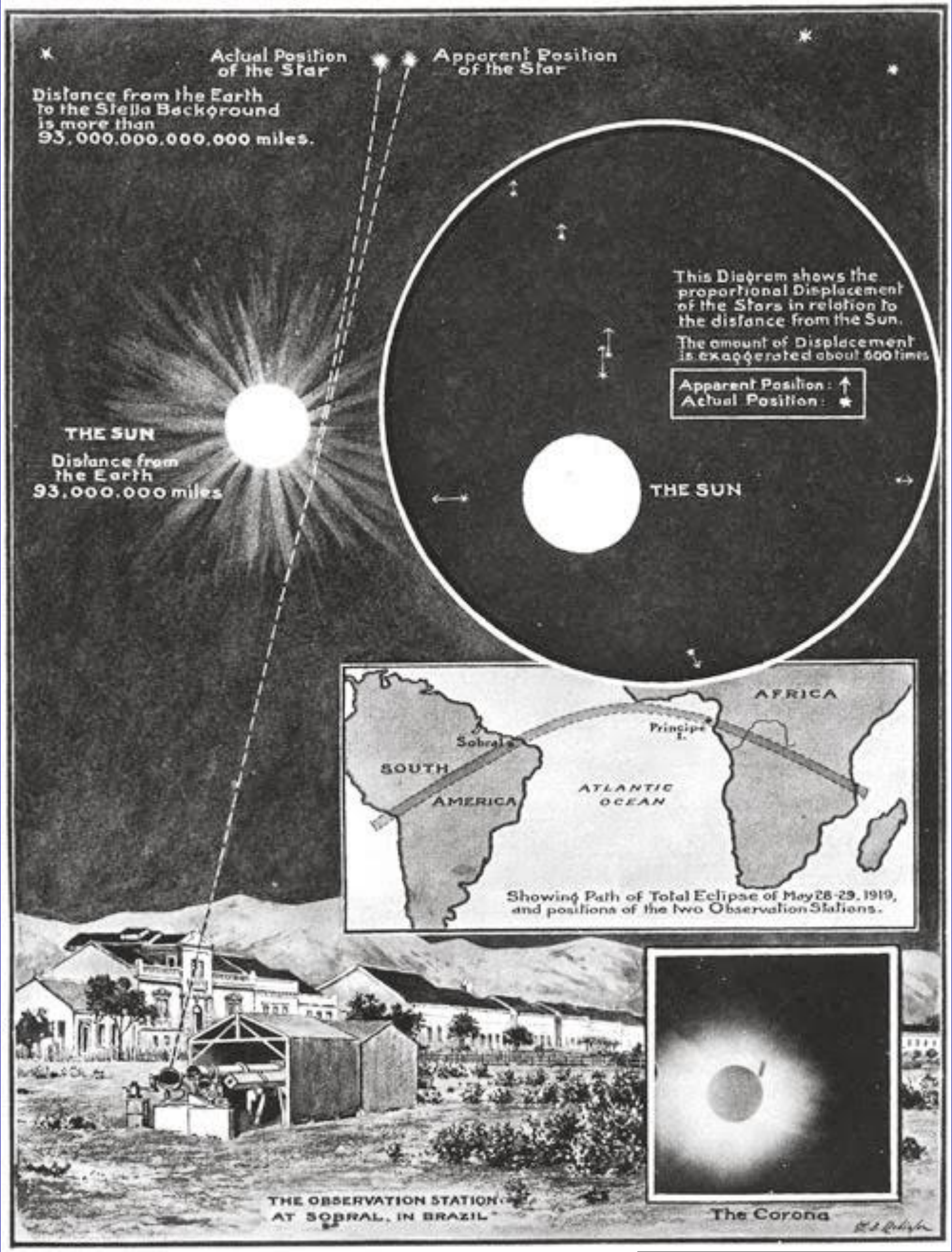
- « précession du périhélie » de mercure
- Déviation de la lumière
- Effet « Einstein »

Les tests historiques de la relativité générale

- « précession du périhélie » de mercure
- Déviation de la lumière
- Effet « Einstein »

Déviation de la lumière





Confirmé par Eddington en 1919

Annonce des observations d'Eddington (Illustrated London News (1919))

Dans la gravitation d'Einstein, toute énergie gravite …
… même l'énergie gravitationnelle …
la gravitation interagit avec elle même: théorie « non linéaire »:

Les équations d'Einstein linéarisées
$\sim \Box\, h_{\mu\,\nu}$ = sources d'énergie-impulsion

Ne sont qu'une approximation des équations complètes: $G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$

$\Box\, h_{\mu\,\nu}$ + « h $\Box$ h » + … = sources

Peut-on construire une gravitation de portée finie (ou « gravité massive ») ?

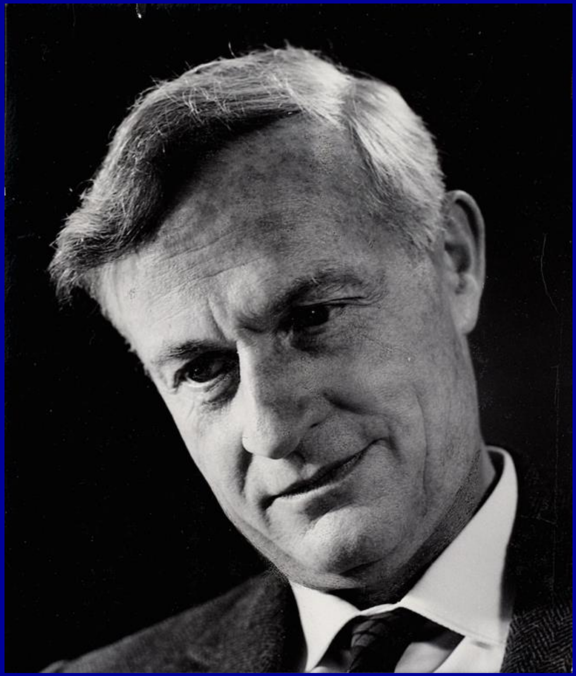
Une des motivations ayant poussé Einstein à introduire une constante cosmologique

Si la gravitation avait une portée finie, sa portée (λ) doit être de l'ordre du rayon de Hubble pour être

- compatible avec les tests de la gravitation

- intéressante pour la cosmologie

Fierz et Pauli trouvent en 1939 la façon (unique) de modifier l’équation (linéaire) des ondes gravitationnelles pour « donner une masse au graviton »



Théorie de Fierz-Pauli:

$$\int d^4x \sqrt{g} R_g + m^2 \int d^4x\, h_{\mu\nu} h_{\alpha\beta} \left(\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta} - \eta^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta} \right)$$

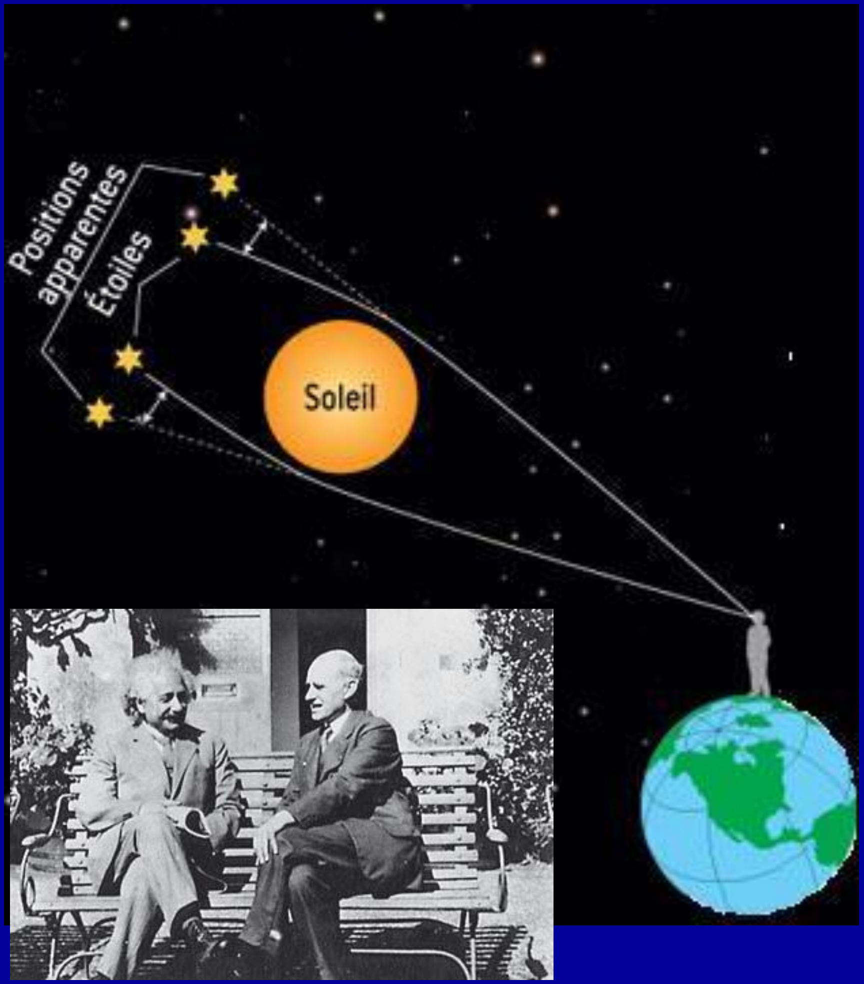
Action de Einstein-Hilbert (relativité générale) développée à l'ordre 2 en une petite perturbation $h_{\mu\,\nu}$ au voisinage d'une métrique de fond $\eta_{\mu\,\nu}$

(soit $g_{\mu\,\nu} = \eta_{\mu\,\nu} + h_{\mu\,\nu}$)

Terme de masse de Fierz-Pauli

Mais la théorie de Fierz et Pauli conduit à des prédictions en désaccord avec les observations

La déviation de la lumière diffère de 25% des prédictions de la relativité générale



Cette différence persiste quelle que soit la petitesse de la masse du graviton !

C’est la « discontinuité de van Dam-Veltman-Zakharov » (1970) ou vDVZ

La discontinuité de vDVZ est manifeste en comparant les propagateurs du graviton de masse nulle (relativité générale) et celui du graviton massif (Fierz-Pauli)

Graviton de masse nulle:

$$D_0^{\mu\nu\alpha\beta}(p) = \frac{\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}+\eta^{\mu\beta}\eta^{\nu\alpha}}{2p^2} - \frac{\eta^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}}{2p^2} + O(p)$$

Différence indépendante de la masse

Graviton massif :

$$D_m^{\mu\nu\alpha\beta}(p) = \frac{\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}+\eta^{\mu\beta}\eta^{\nu\alpha}}{2(p^2-m^2)} - \frac{\eta^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}}{3(p^2-m^2)} + O(p)$$

Cette différence persiste pour une masse du graviton arbitrairement petite !

C’est la « discontinuité de van Dam-Veltman-Zakharov » (1970) ou vDVZ

Robustesse de la relativité générale !

En 1972, Arkady Vainshtein <u>conjecture</u> une solution au problème vDVZ

Ce « mécanisme de Vainshtein » repose sur une extension non linéaire de la théorie de Fierz et Pauli et nécessite l'existence de deux métriques dans l'Univers (on parle de théories bimétriques)

Action typique pour ce genre de théorie:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{M_P^2}{2} R_g + L_g \right) + S_{int}[f, g]$$

Action d'Einstein-Hilbert pour la métrique $g_{\mu\nu}$ (relativité générale)

Couplage usuel (minimal) entre la métrique et la matière

Couplage non dérivatif entre la métrique $g_{\mu\nu}$ et une seconde métrique $f_{\mu\nu}$

Quelques exemples de termes d'interaction

$$S^{(1)}_{int} = -\frac{1}{8} m^2 M_P^2 \int d^4x \sqrt{-f} H_{\mu\nu} H_{\alpha\beta} \left(f^{\mu\alpha} f^{\nu\beta} - f^{\mu\nu} f^{\alpha\beta} \right)$$

Boulware Deser, 1972

$$S^{(2)}_{int} = -\frac{1}{8} m^2 M_P^2 \int d^4x \sqrt{-f} H_{\mu\nu} H_{\alpha\beta} \left(g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} - g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \right)$$

Arkani-Hamed, Georgi, Schwarz, 2003

Avec $H_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - f_{\mu\nu}$

Nombre infini de modèle avec des propriétés similaires (incluant les modèles dRGT (cf. la fin de cet exposé)

(dans la classe d'universalité de Fierz-Pauli » [Damour, Kogan, 2003]

➡ Recherche de solutions statiques à symétrie sphérique

$$g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -e^{\nu(R)}dt^2 + e^{\lambda(R)}dR^2 + R^2 d\Omega^2$$

$$\nu(R) = -\frac{R_S}{R}(1 + O(1)\,\epsilon) \quad \text{avec} \quad \epsilon = \frac{R_S}{m^4 R^5}$$

$$\lambda(R) = +\frac{1}{2}\frac{R_S}{R}(1 + O(1)\,\epsilon)$$

Vainshtein 1972
Dans un « certain type »
[Damour et al. 2003]
de théorie non linéaire
de Pauli-Fierz

Déviation de la lumière incorrecte

Ce coefficient vaut +1 dans la solution de Schwarzschild

Introduit une nouvelle échelle de longueur R_v dans le problème (rayon de Vainshtein) en dessous de laquelle la théorie de perturbations diverge.

Pour le soleil: plus grand que le système Solaire!

avec $R_v = (R_S m^{-4})^{1/5}$

Que se passe-t-il à plus petite distance

Vainshtein 1972

Il existe un autre développement perturbatif à petite distance défini autour de la solution (« ordinaire ») de Schwarzschild donné par:

$$\nu(R) = -\frac{R_S}{R}\left\{1 + \mathcal{O}\left(R^{5/2}/R_v^{5/2}\right)\right\} \quad \text{avec} \quad R_v^{-5/2} = m^2 R_S^{-1/2}$$
$$\lambda(R) = +\frac{R_S}{R}\left\{1 + \mathcal{O}\left(R^{5/2}/R_v^{5/2}\right)\right\}$$

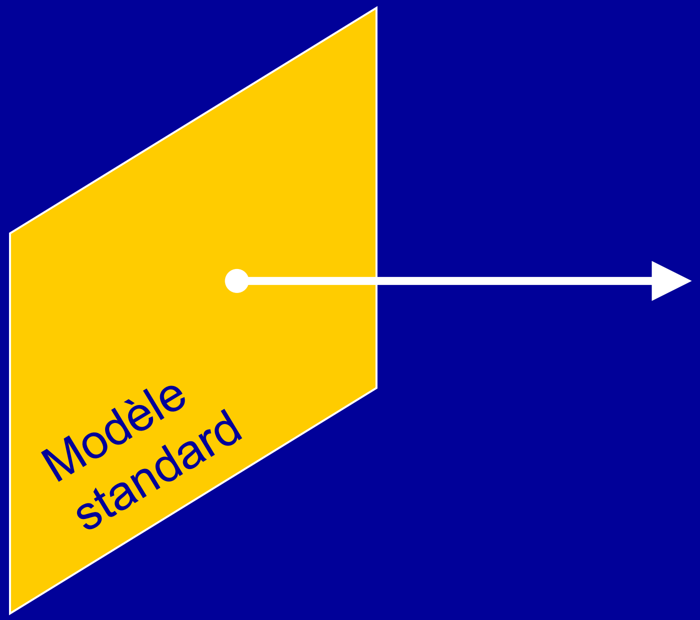
- Tend vers Schwarzschild quand *m* tend vers zero
- Conduit à des corrections non analytiques (dans la constante de Newton) à la solution de Schwarzschild

Suite aux travaux de Vainshtein,

Boulware et Deser (1972) « prouvent » que toute théorie massive non linéaire est instable

(existence d’un mode « fantôme » dans la théorie, i.e. d’un état d’énergie négative)…

… la situation reste bloquée jusqu'au modèle DGP (2000) …



Quel est le lien entre le modèle DGP et la gravité massive ?

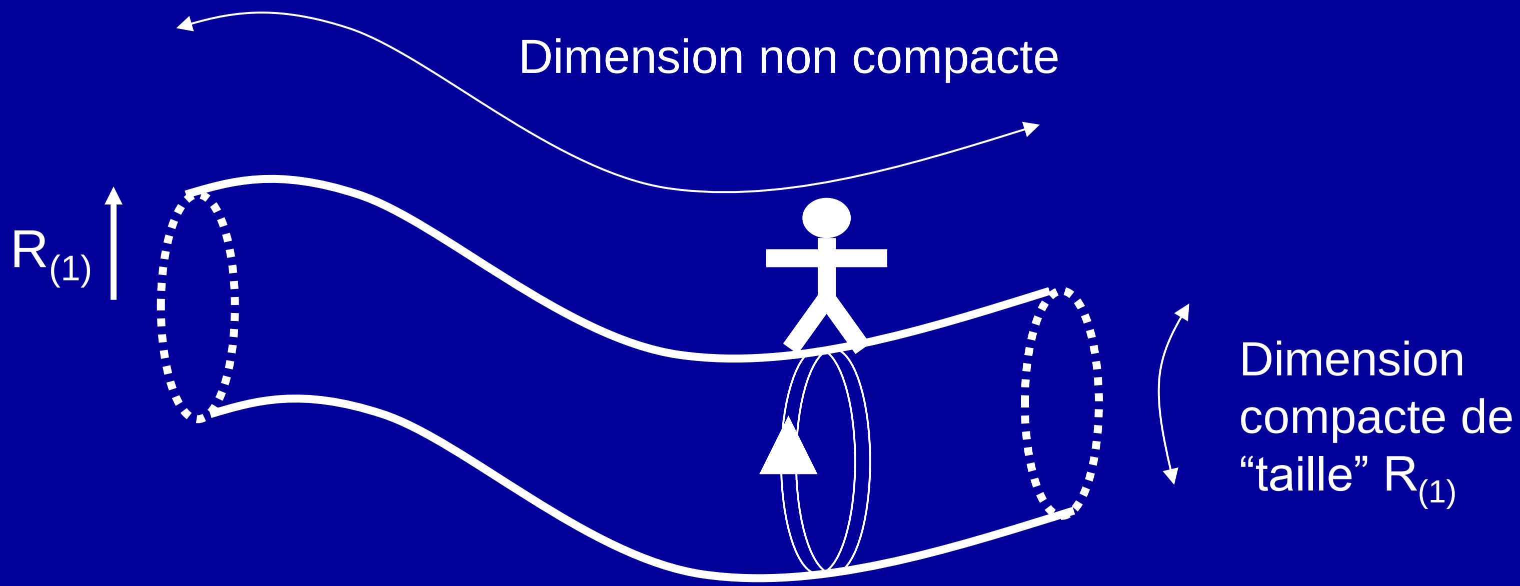
Les dimensions supplémentaires d’espace-temps et le « mécanisme de Kaluza-Klein » (1920) !

Ce mécanisme explique comment des dimensions d’espace supplémentaires aux 3 que nous expérimentons quotidiennement pourraient rester invisibles (pour le moment)

Il suffit qu’elles soient « compactes » et suffisamment petites !

Qu’est-ce qu’une dimension compacte ?

Exemple: la surface d’un cylindre à deux dimensions



On peut en faire le tour …

Considérons un champ Φ vivant dans un espace à 4 dimensions spatiales (4+1 dimensions), telle que la quatrième dimension soit « compacte »

$\Rightarrow$ Φ obéit à une équation de Poisson quadridimensionnelle (4+1 dimensions)

On s'intéresse donc à l'équation de Poisson suivante

$$\frac{\partial^2\Phi}{\ldots^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial w^2}$$

$\ldots)\rho$

Chacun des $\Phi^{(k)}$ peut etre considéré comme un champ vivant dans un espace à 3+1 dimensions

Constante de Newton de la théorie 5-dimensionnelle

… on doit der…

suiv…

$$\Phi(x, y, \ldots 2\pi R) = \Phi(x, y, z, w)$$

et on peut décomposer Φ en série … Fourier en écrivant

$$\Phi(x, y, z, w) = \sum_{k \text{ entier}} \Phi^{(k)}(x, y, z) e^{ikw/R}$$

En mettant cette décomposition dans l'équation de Poisson ci-dessus, on s'apercoit que chaque mode de Fourier $\Phi^{(k)}$ vérifie l'équation

$$\frac{\partial^2\Phi^{(k)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi^{(k)}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi^{(k)}}{\partial z^2} - \frac{k^2\Phi^{(k)}}{R^2} = 4\pi G_{(5)}\rho^{(k)}$$

qui est l'équation de Helmholtz modifiée pour un champ massif de longueur de Compton $\lambda_C^{(k)} = R/k = \hbar c^{-1}/m_k$ (avec k entier)

Conclusion :

Un champ dans un espace à 4+1 dimensions est vu comme une collection infinie de champs massifs vivant dans un espace à 3+1 dimensions
(on parle de tour de modes de Kaluza-Klein):

Des expériences faites à des énergies très inférieures à m_1 ne “voient” que le mode de masse nulle:

Soit un seul champ vivant dans un espace à 3+1 dimensions: la dimension supplémentaire compacte est invisible à basse énergie!

masse, énergie

⋮

$m_4 = 4\,\hbar\, c^{-1} / R$

$m_3 = 3\,\hbar\, c^{-1} / R$

$m_2 = 2\,\hbar\, c^{-1} / R$

$m_1 = \hbar\, c^{-1} / R$

$m_0 = 0$

Cela vaut aussi pour la gravitation

Deux masses tests séparées d'une distance r << R
Interagissent suivant la loi de Newton 4 + 1 dimensionnelle:

La dimension supplémentaire apparait à petite distance sous forme d'une modification de la force gravitationnelle.

$$V(r) \propto \frac{G_{(5)}\, M\, M}{r^2}$$

r

R

Les mêmes masses séparées d'une distance r >> R interagissent suivant la loi de Newton usuelle:

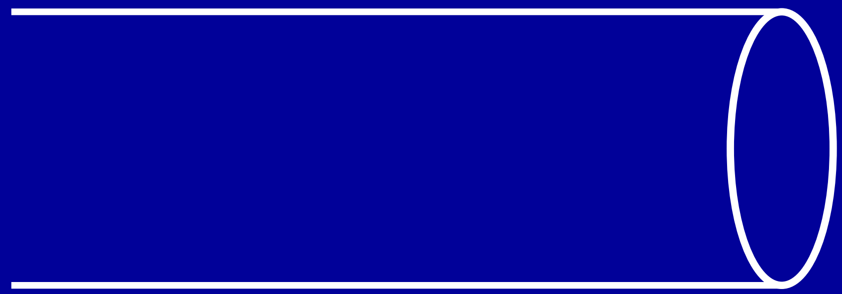
$$V(r) \propto \frac{G_{(5)}}{R} \frac{M\, M}{r}$$

La dimension supplémentaire est invisible à grande distance

Constante de Newton usuelle:
$G_N = G_{(5)}/R$

Ou en terme de modes de Kaluza-Klein du graviton

pour le graviton:



Petite perturbation au voisinage du cylindre de référence: “graviton”

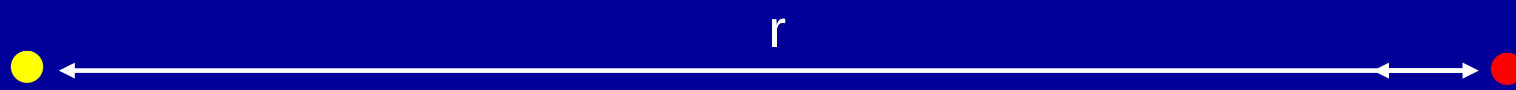
avec $g_{\mu\nu}(x^{\mu},w) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x^{\mu},w)$

Métrique décrivant l’espace-temps à 4+1 dimensions

Métrique plate décrivant le cylindre de référence

Décomposé en série de Fourier:

- un graviton de masse nulle
- une tour de graviton massifs de “Kaluza-Klein”



Qui permet de calculer le potentiel entre deux masses ponctuelles

Contribution de chaque mode de Kaluka-Klein de masse $m_k \propto k/R$

$$V(r) \propto \sum_{k=0}^{k=+\infty} G_N \frac{M_\bullet M_\bullet}{r} e^{-m_k r}$$

- Si r >> R: seul le mode de masse nulle contribue

$$V(r) \propto G_N \frac{M_\bullet M_\bullet}{r}$$

- Si r << R: les modes qui contribuent à cette somme sont ceux tels que m_k r << 1 soit k << R / r

Potentiel en $1/r^2$

$$V(r) \propto \frac{R}{r} G_N \frac{M_\bullet M_\bullet}{r}$$

$G_{(5)} = R\, G_N$

Dans le modèle DGP, la dimension supplémentaire n’est pas compacte

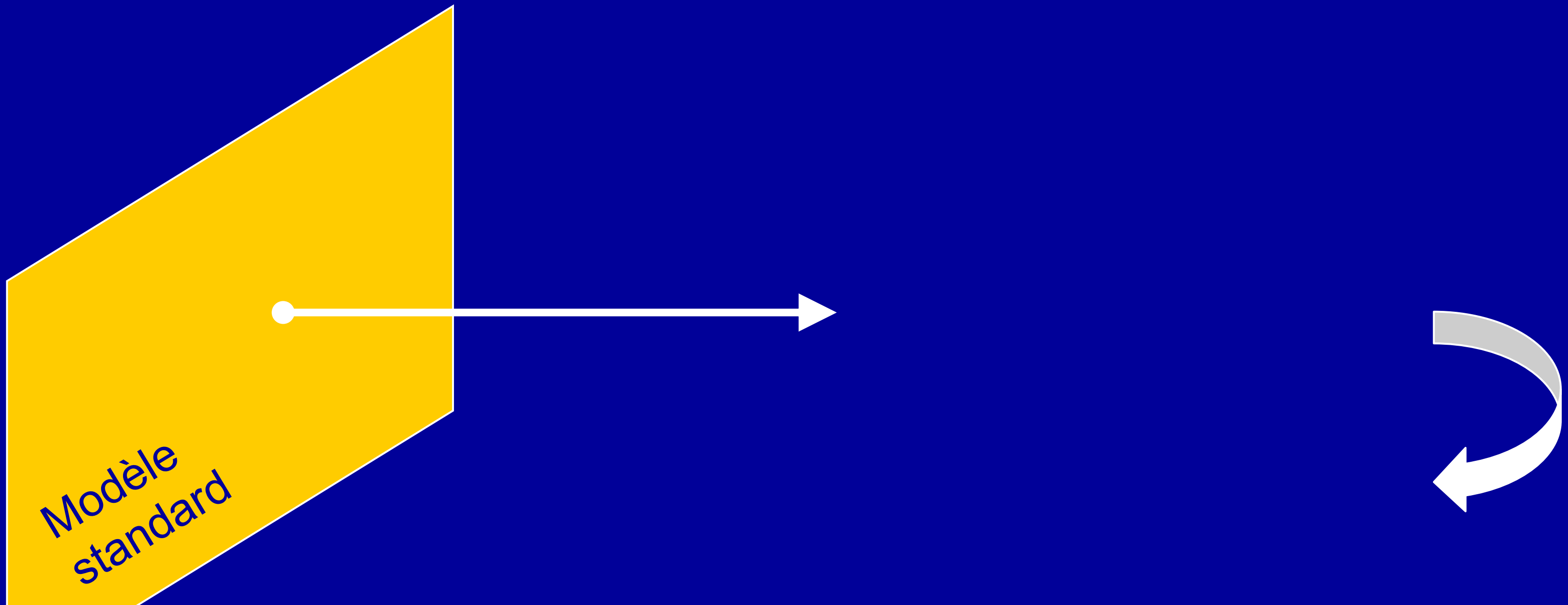
Gravitation modifiée à grande distance

Continuum de gravitons massifs

En 1972, Arkady Vainshtein <u>conjecture</u> une solution au problème vDVZ

Ce « mécanisme de Vainshtein » repose sur une extension non linéaire de la théorie de Fierz et Pauli et nécessite l'existence de deux métriques dans l'Univers (on parle de théories bimétriques)

Boulware et Deser (1972) « prouvent » que Toute théorie massive non linéaire est instable …



Les solutions cosmologiques du modèle DGP (C.D. 2001) offrent la première indication (fondée sur des solutions explicites) que le mécanisme de Vainshtein peut fonctionner…

(et montrent pour la première fois que l'accélération cosmique pourrait être causée par une modification à grande distance de la gravitation liée à la gravité massive)

De nombreux travaux depuis cherchant à étendre, améliorer le modèle DGP:

grand renouveau d’intérêt pour la « gravité massive »

Dans le modèle DGP: infinité de gravitons massifs (modes de Kaluza-Klein)

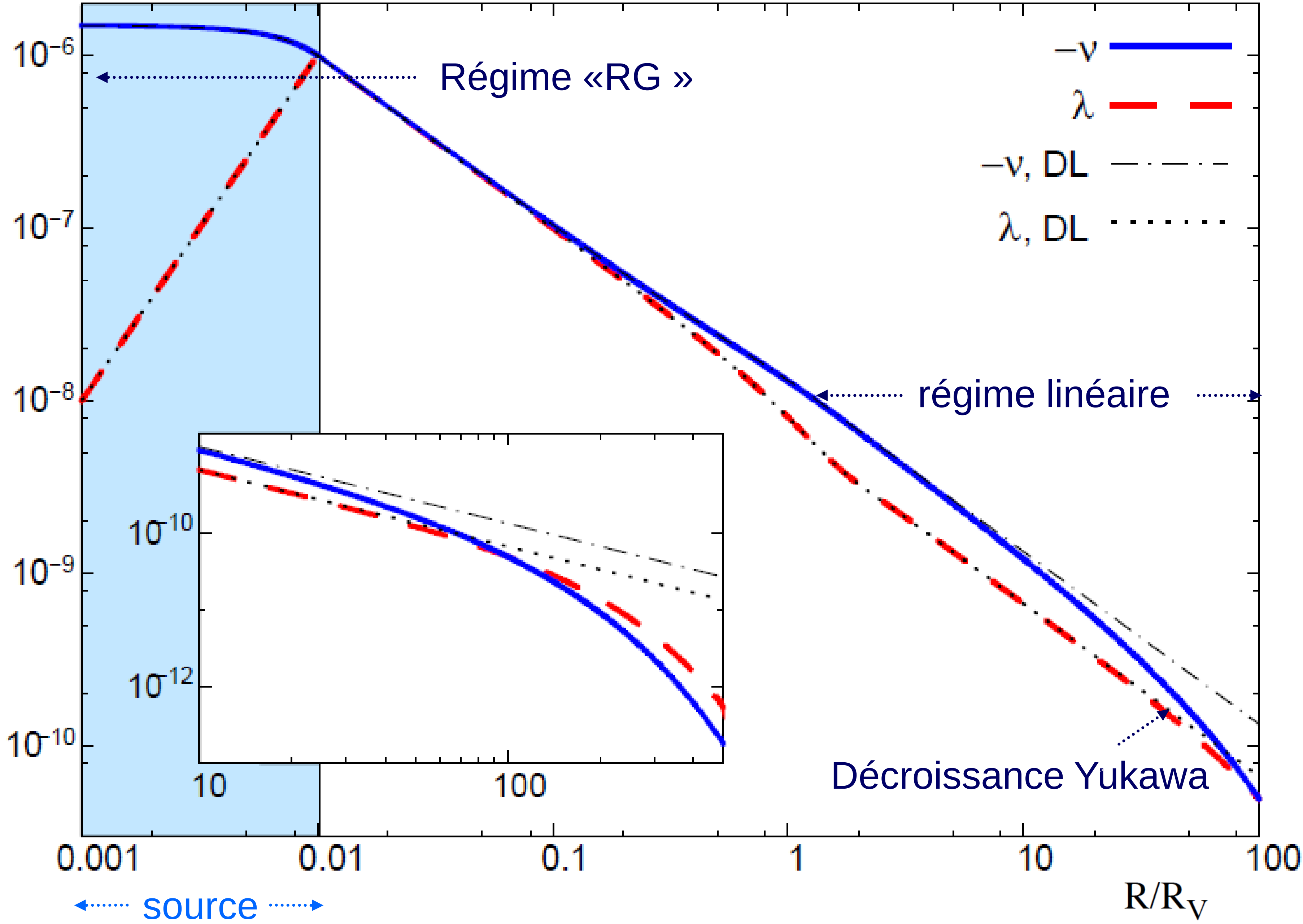
Le modèle DGP a relancé la quête d’une théorie avec un seul graviton massif !

2009-2010: Première démonstration explicite que le mécanisme de Vainshtein marche précisément comme attendu (Babichev, C.D., Ziour)

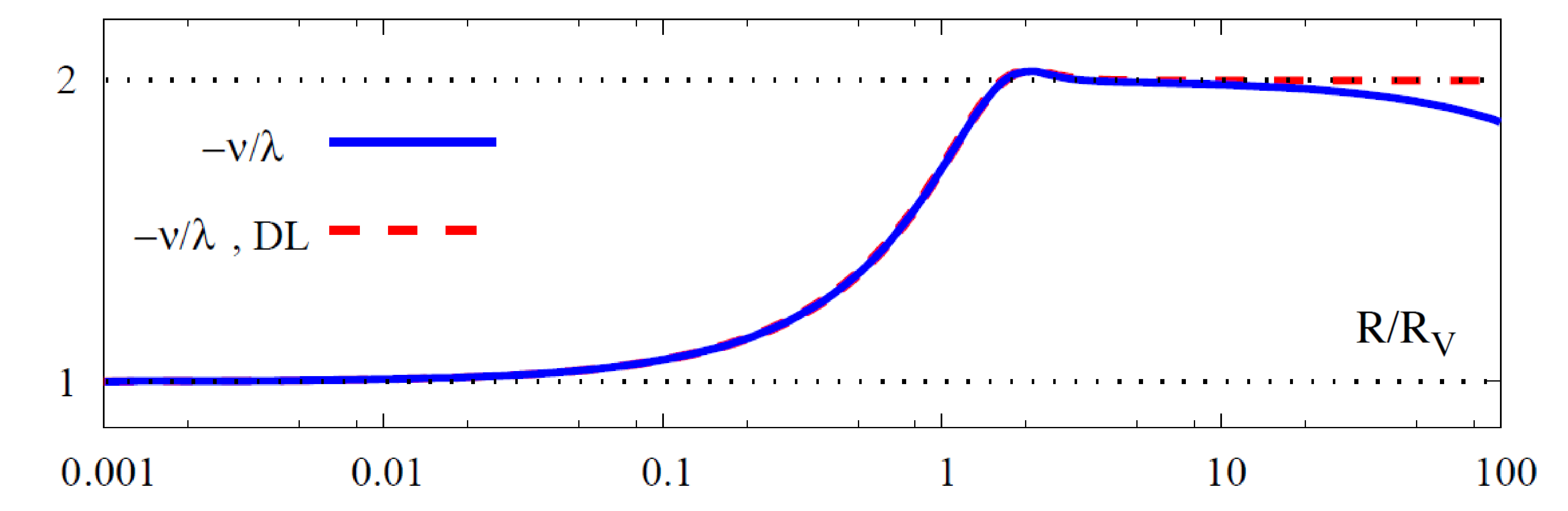
Pour une métrique statique à symétrie sphérique:

$$g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -e^{\nu(R)} dt^2 + e^{\lambda(R)} dR^2 + R^2 d\Omega^2$$

Coefficients de la métrique (statique à symétrie spérique)



La discontinuité de vDVZ est effacée à petite distance (plus petites que R_v) comme prédit par Vainshtein



2010-2011: découverte d’une famille de théorie de gravité massive sans instabilité de Boulware-Deser: théorie dRGT (de Rham, Gabadadze, Tolley)

Action de la théorie dRGT:

$$S = M_P^2 \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ R + 2m^2 \sum_{n=1}^{3} \beta_n e_n (\mathbf{K}) \right\}$$

avec

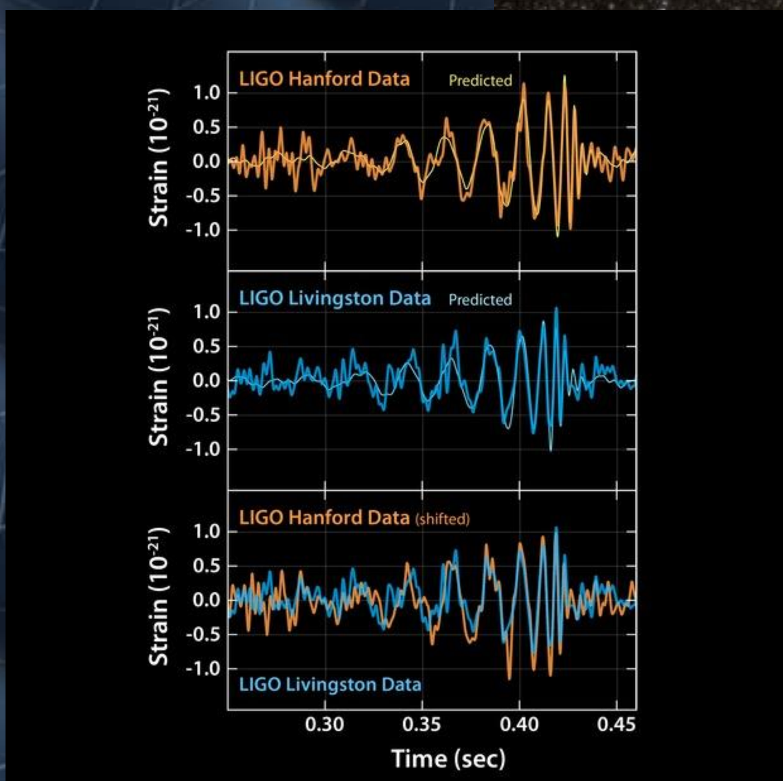
$$\begin{cases} K^\mu{}_\nu = \sqrt{g^{\mu\rho} f_{\rho\nu}} \\ e_1 (\mathbf{K}) = tr\ \mathbf{K} \\ e_2 (\mathbf{K}) = \frac{1}{2} \left((tr\ \mathbf{K})^2 - tr\ \mathbf{K}^2 \right) \\ e_3 (\mathbf{K}) = \frac{1}{6} \left((tr\ \mathbf{K})^3 - 3\ tr\ \mathbf{K}\ tr\ \mathbf{K}^2 + 2\ tr\ \mathbf{K}^3 \right) \end{cases}$$

Depuis: de nombreux travaux sur cette théorie visant à mieux la comprendre et à étudier son application à la cosmologie

- Aujourd'hui, pas de modèle gravité modifiée intéressant pour la cosmologie et aussi « simple » que ΛCDM

- Les modèles de gravité modifiée permettent cependant de mieux comprendre la gravité et la cosmologie standard

Les observations de LIGO-VIRGO permettent de contraindre la masse du graviton !



Merci de votre attention !