Courbes invariantes sans propriété de torsion[1] [2]

Michael Robert HERMAN

1. Introduction

Soit M^2 une variété de dimension 2 et soit $\Gamma \subset M^2$ une courbe simple lisse de fibré normal trivial. Un voisinage tubulaire fermé V de Γ dans M^2 est difféomorphe à l'anneau $\mathbb{A}_\delta := \mathbb{T}^1 \times [-\delta, \delta]$, où Γ est identifié à $\mathbb{T}^1 \times 0$.

Soit F un difféomorphisme de M^2 qui laisse Γ invariante. Quitte à remplacer F par F^2, on peut supposer que F préserve l'orientation de V et que $F_{|\Gamma}$ préserve l'orientation de Γ.

Définition 1.1. (Propriété d'intersection.) *Le difféomorphisme F a la propriété d'intersection* IP_+ *si toute courbe de Jordan dans $\mathbb{A}_\delta^+ := \mathbb{T}^1 \times [0, \delta]$ homotope à $\mathbb{T}^1 \times 0$ rencontre son image. On définit la propriété* IP_- *de façon similaire.*

Exemple 1.2. *Si F préserve une mesure de Radon positive de support total, alors F a les propriétés* IP_+ *et* IP_-.

Remarque 1.3. *Si F est un plongement C^∞ de $\mathbb{A}_\delta^+$ dans $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}_+$, on peut étendre F en un plongement C^∞ de $\mathbb{A}_\delta$ dans $\mathbb{A} := \mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$.*

Définition 1.4. *Pour $\beta \geq 0$ et $\gamma > 0$ on note*

$$CD_{\beta,\gamma} := \left\{ \alpha \in \mathbb{R} \mid \forall\, p, q \in \mathbb{Z} \text{ avec } q \geq 1, |q\alpha - p| \geq \gamma q^{-1-\beta} \right\}.$$

On dit que α est diophantien s'il appartient à $CD := \bigcup_{\beta \geq 0, \gamma > 0} CD_{\beta,\gamma}$.

On rappelle que, pour $\beta > 0$, la mesure de Lebesgue de $CD_{\beta,\gamma} \cap [0,1]$ tend vers 1 lorsque γ tend vers 0.

Théorème 1.5. *Soit F un plongement C^∞ de $\mathbb{A}_\delta$ dans $\mathbb{A}$ laissant invariant $\mathbb{T}^1 \times 0$. On suppose que :*
– *F préserve l'orientation de $\mathbb{A}$ et de $\mathbb{T}^1 \times 0$;*
– *F a la propriété d'intersection* IP_+ *;*
– *le nombre de rotation α_0 de $F_{|\mathbb{T}^1 \times 0}$ appartient à $CD_{\beta,\gamma}$.*

Alors il existe un ensemble $K \subset \mathbb{R}_+$ contenant 0 et, pour tout $c \in K$, une fonction $\psi_c \in C^\infty(\mathbb{T}^1, \mathbb{R}_+)$ avec les propriétés suivantes :
– *$\psi_c(0) = c$ et $\psi_0 \equiv 0$;*
– *le graphe T_c de ψ_c est une courbe lisse invariante par F ; le nombre de rotation α_c de $f_c := F_{|T_c}$ est diophantien et le difféomorphisme f_c est C^∞ conjugué à la rotation R_{α_c} ;*

[1] Ce document, extrait des archives de Michel Herman, a été préparé par F. Laudenbach et J.-C. Yoccoz. Le titre n'était pas mentionné sur l'original. Les notes en bas de pages sont de B. Fayad et R. Krikorian.

[2] Une preuve détaillée du résultat principal de ce document et qui s'inspire de conférences données par M. Herman au Séminaire de Dynamique de Jussieu à la fin des années 90 se trouve dans la publication : B. Fayad, R. Krikorian "Herman's last geometric theorem", *Annales de l'Ecole Normale Supérieure* (4) **42**, no 2, pp. 193-219 (2009)

– *pour* $c \neq c' \in K$ *les courbes* T_c *et* $T_{c'}$ *sont disjointes ;*
– *l'ensemble* $K \subset \mathbb{R}_+$ *est de mesure de Lebesgue strictement positive ;*
– *l'union des courbes* T_c*,* $c \in K$*, est de mesure de Lebesgue strictement positive ;*
– *lorsque* c *tend vers* 0*, la fonction* ψ_c *tend vers* 0 *dans la topologie* C^∞*.*

2. Théorème de la courbe translatée

Rappelons le théorème de la courbe translatée avec paramètres dans la direction normale. Pour $a, b \in \mathbb{R}$, on note $R_{a,b}$ la translation de $\mathbb{A} : (\theta, r) \mapsto (\theta + a, r + b)$. Soit

$$L(\theta, r) = (\theta + \alpha_0 + \ell(r), r)$$

un difféomorphisme de $\mathbb{A}$ de classe C^∞ complètement intégrable, avec $\ell(0) = 0$. Soit $\beta > 0, \gamma > 0$ tels que la mesure de Lebesgue de $CD_{\beta,\gamma} \subset \mathbb{T}^1$ soit strictement positive.[3]

Théorème 2.1. *Soit* $\rho \geq 0$ *une classe de différentiabilité finie. Il existe des classes de différentiabilité finie* k_1, k_2*, où* $k_1 > k_2$*, et un réel* ε_0 *avec les propriétés suivantes.*

Pour tout $\alpha \in CD_{\beta,\gamma}$ *, pour tout* $c \in [-1, 1]$ *et pour tout plongement* $F : \mathbb{A}_2 \to \mathbb{A}$ *de classe* C^∞ *vérifiant*

$$\|F - L\|_{C^{k_1}(\mathbb{A}_2)} =: \varepsilon < \varepsilon_0$$

il existe
– *des nombres réels* $\lambda_F(\alpha, c)$*,* $\mu_F(\alpha, c)$*,*
– $\psi_{\alpha,c} \in C^\infty(\mathbb{T}^1, \mathbb{R})$ *vérifiant* $\psi_{\alpha,c}(0) = c$ *et, pour tout* $k \geq k_1$ *,*

$$\|\psi_{\alpha,c} - c\|_{C^{k-k_2}(\mathbb{T}^1)} < C'_k\, \varepsilon\,, \tag{1}$$

– $h_{\alpha,c} \in \mathrm{Diff}^\infty_+(\mathbb{T}^1)$ *vérifiant* $h_{\alpha,c}(0) = 0$*,*

tels que, en notant $\Phi_F(\alpha, c) := \alpha - \alpha_0 - \ell(c) + \lambda_F(\alpha, c)$*,*
– *le difféomorphisme* $\check{F} := R_{\Phi_F(\alpha,c),\mu_F(\alpha,c)} \circ F$ *laisse invariant le graphe* $T_{\alpha,c}$ *de* $\psi_{\alpha,c}$ *;*
– *le difféomorphisme* $h_{\alpha,c}$ *conjugue la restriction* $f_{\alpha,c}$ *de* $\check{F}$ *à* $T_{\alpha,c}$*, muni de la coordonnée* θ*, à la rotation* R_α*.*

De plus, le théorème admet des compléments portant sur l'unicité locale de la solution et la régularité par rapport aux paramètres (α, c). On pose $S_{\alpha,c} := (\lambda_F(\alpha, c), \mu_F(\alpha, c), \psi_{\alpha,c}, h_{\alpha,c})$.

Compléments.

(i) *Pour* α, c *fixés, la solution* $S_{\alpha,c}$ *est unique dans le sens suivant : si* $\check{S} = \big(\check{\lambda}, \check{\mu}, \check{\psi}, \check{h}\big)$ *est une autre solution vérifiant*

$$|\check{\lambda} - \lambda| < \varepsilon_0, \quad |\check{\mu} - \mu| < \varepsilon_0, \quad \|\check{\psi} - \psi\|_{C^{k_2}(\mathbb{T}^1)} < \varepsilon_0, \quad \|\check{h} - h\|_{C^{k_2}(\mathbb{T}^1)} < \varepsilon_0,$$

alors $\check{S} = S$*.*

(ii) *Pour* α *fixé, l'application* $c \mapsto S_{\alpha,c}$ *est de classe* C^∞*.*

(iii) *Pour* c *fixé, l'application* $\alpha \mapsto S_{\alpha,c}$ *est de classe* C^ρ *au sens de Whitney.*

[3] L'usage de k_1, k_2, ρ et k n'est pas très clair dans l'énoncé suivant et dans ses compléments. Peut-être le mieux serait de garder la condition de proximité de F à L en norme C^{k_1} et de mettre toutes les conclusions en classe C^ρ. Il faudrait aussi inclure dans les conclusions la mention que h est proche de l'identité.

(iv) *L'application* $(\alpha,c)\mapsto\lambda_F(\alpha,c)$ *s'étend en une fonction* $\hat\lambda_F$ *de classe* C^ρ *sur* $[-2,2]\times[-2,2]$ *telle que*

$$\|\hat\lambda_F\|_{C^\rho}<A_\rho\,\varepsilon.$$

(v) *Pour* c *fixé, l'application* $\alpha\in CD_{\beta,\gamma}\mapsto\psi_{(\alpha,c)}$ *s'étend en une application* $\alpha\mapsto\hat\psi_{(\alpha,c)}$ *de classe* C^ρ *sur* $[-2,2]$ *telle que*

$$\|\hat\psi_{(\alpha,c)}-c\|_{C^\rho}<A_\rho\,\varepsilon.$$

3. Démonstration du théorème ??.

On rappelle quelques résultats classiques. Tout d'abord, sachant que α_0 est diophantien, le difféomorphisme f_0 est C^∞-conjugué à la rotation R_{α_0} : on a $f_0=h\circ R_{\alpha_0}\circ h^{-1}$ avec $h\in\mathrm{Diff}^\infty_+(\mathbb{T}^1)$ et $h(0)=0$.

On pose $H(\theta,r)=\big(h(\theta),\,{}^t\!(Dh(\theta))^{-1}r\big)$ et on considère

$$H^{-1}\circ F\circ H(\theta,r)=\big(\theta+\alpha_0,a(\theta)\,r\big)+O(r^2),$$

où la fonction a est strictement positive. En utilisant que F a la propriété d'intersection IP_+, on peut, pour tout $k>1$, C^∞-conjuguer F à une forme normale de Birkhoff :

$$\begin{array}{rcl} F_k(\theta,r) &=& (\theta+\alpha_0+\ell_k(r),r)+O(r^k)\\ &=& L_k(\theta,r)+O(r^k),\end{array}$$

où ℓ_k est un polynôme de degré $<k$ vérifiant $\ell_k(0)=0$.

On notera que F_k n'est en général défini que sur un anneau $\mathbb{A}_{\delta_k}$ avec $\delta_k<\delta$. Pour $\eta\ll\delta_k$, on utillise une fonction plateau pour construire un difféomorphisme $\hat F_{k,\eta}$ de classe C^∞ de l'anneau $\mathbb{A}$ qui vérifie

$$\hat F_{k,\eta}(\theta,r)=\left\{\begin{array}{ll} F_k(\theta,r) & \text{pour } |r|\le\eta\\ L_k(\theta,r) & \text{pour } |r|\ge 2\eta\,.\end{array}\right.$$

Comme F_k a la propriété d'intersection IP_+ sur $\mathbb{A}_{\delta_k}$, le difféomorphisme $\hat F_{k,\eta}$ a la propriété d'intersection IP_+ sur $\mathbb{A}_\eta$.

Pour $1<k_1'<k$, on a

$$\|\hat F_{k,\eta}-L_k\|_{C^{k_1'}(\mathbb{A})}\le C_k\,\eta^{k-k_1'}\,,$$

où C_k est une constante dépendant de F et k.

On applique le théorème **??** à $\hat F_{k,\eta}$ avec $\rho=1$, $k_1'\ge k_1$ et $k=k_1'+2$. Pour η assez petit,

$$\|\hat F_{k,\eta}-L_k\|_{C^{k_1'}(\mathbb{A})}\le C_k\,\eta^2$$

est majoré par le ε_0 du théorème **??**. D'après ce théorème on a

$$\|\psi_{\alpha,c}-c\|_{C^{k-k_2}(\mathbb{T}^1)}<C_k'C_k\,\eta^2<\frac{\eta}{2}$$

et la courbe translatée $T_{\alpha,c}$, pour $|c|<\eta/2$, est donc contenue dans l'anneau $\mathbb{A}_\eta$. Il résulte de l'unicité locale dans le théorème **??** que l'on a $\lambda_F(\alpha_0,0)=0$.

On désigne par $\hat\lambda_F$ une extension de λ_F donnée par le théorème **??**. La fonction

$$\hat\Phi_F(\alpha,c):=\alpha-\alpha_0-\ell_k(c)+\hat\lambda_F(\alpha,c)$$

vérifie, pour η assez petit et tout $c \in [-1,1]$,

$$\frac{\partial \hat{\Phi}_F}{\partial \alpha} \geq 1 - A_\rho C_k \eta^2 \geq \frac{1}{2}.$$

Par le théorème des fonctions implicites, il existe une fonction $\hat{\ell}_F : [-1,+1] \to \mathbb{R}$ de classe C^1 vérifiant

(2) $$\hat{\ell}_F(0) = 0, \quad \hat{\Phi}_F\big(\alpha_0 + \hat{\ell}_F(c), c\big) = 0\,.$$

Lemme 3.1. *Soient $\beta > \beta_0 \geq 0$, $\gamma_0 > \gamma > 0$. Pour tout $\alpha_0 \in CD_{\beta_0,\gamma_0}$ et tout $\varepsilon > 0$, les intervalles $(\alpha_0, \alpha_0+\varepsilon)$ et $(\alpha_0-\varepsilon, \alpha_0)$ rencontrent $CD_{\beta,\gamma}$ suivant des ensembles de mesure positive.*[4]

On suppose que $0 \leq c \leq \eta/2$. Comme $\hat{\Phi}_F\big(\alpha_0 + \hat{\ell}_F(c), c\big) = 0$ et comme $\hat{F}_{k,\eta}$ a la propriété d'intersection IP_+, on a $\mu_F(\alpha_0 + \hat{\ell}_F(c), c) = 0$ lorsque $\alpha_0 + \hat{\ell}_F(c) \in CD_{\beta,\gamma}$. La courbe $T_{\alpha_0+\hat{\ell}_F(c),c}$ est alors invariante par F et $f_{\alpha_0+\hat{\ell}_F(c),c}$ est C^∞-conjugué à la rotation $R_{\alpha_0+\hat{\ell}_F(c)}$.

Pour étudier l'ensemble des $c \in [0,\eta/2]$ tels que $\alpha_0 + \hat{\ell}_F(c)$ appartienne à $CD_{\beta,\gamma}$, distingons deux cas.

1. Supposons que la fonction $\hat{\ell}_F$ est identiquement nulle sur $[0,\eta/2]$. Dans ce cas, pour tout $c \in [0,\eta/2]$ la courbe $T_{\alpha_0,c}$ est invariante et le difféomorphisme $\hat{F}_{k,\eta}$ est C^∞-conjugué à $(\theta,r) \mapsto (\theta+\alpha_0, r)$ au voisinage de $\{r=0\}$. En effet, les applications

$$(\theta,c) \mapsto \psi_{\alpha_0,c}(\theta), \quad (\theta,c) \mapsto h_{\alpha_0,c}(\theta)$$

sont de classe C^∞. L'application $\Psi : \mathbb{T}^1 \times [0,\eta/2] \to \mathbb{A}$ définie par $\Psi(\theta,c) = (\theta, \psi_{\alpha_0,c}(\theta))$ est de classe C^∞ et est un difféomorphisme sur son image car on a

$$\|D\Psi - Id\|_{C^0} \leq A_1 C_k \eta^2 < \frac{1}{2}\,.$$

2. Supposons que la fonction $\hat{\ell}_F$ n'est pas identiquement nulle sur $[0,\eta/2]$. Comme $\hat{\ell}_F([0,\eta/2])$ est connexe, il résulte du lemme ci-dessus que $\alpha_0 + \hat{\ell}_F([0,\eta/2])$ rencontre $CD_{\beta,\gamma}$ suivant un ensemble fermé K' de mesure positive.

   Posons $K := \hat{\ell}_F^{-1}(K' - \alpha_0)$. Comme $\hat{\ell}_F$ est de classe C^1, l'ensemble K est de mesure positive. Pour $c \in K$, posons $\alpha_c := \alpha_0 + \hat{\ell}_F(c) \in K'$. La courbe $T_{\alpha_c,c}$ est invariante par $\hat{F}_{k,\eta}$ et la dynamique y est C^∞-conjuguée à la rotation R_{α_c}. L'image de $\mathbb{T}^1 \times K \subset \mathbb{T}^1 \times [0,\eta/2]$ par le difféomorphisme Ψ est de mesure de Lebesgue (bidimensionnelle) strictement positive.

   Pour voir que $\psi_{\alpha_c,c}$ tend vers 0 dans la topologie C^∞ lorsque c tend vers 0, on applique l'inégalité (**??**) avec k assez grand et $\varepsilon := C_k\eta^2$ assez petit. Lorsque c tend vers 0, on montre de même que $h_{\alpha_c,c}$ tend vers l'identité dans la topologie C^∞.

[4]Une page manque dans le manuscrit pour la démonstration de ce lemme bien connu.

4. Applications

4.1. Soit F un difféomorphisme de classe C^∞ de l'anneau $\mathbb{A}_1 = \mathbb{T}^1 \times [-1,1]$ homotope à l'identité. Notons $T_\pm$ les composantes $\mathbb{T}^1 \times \{\pm 1\}$ du bord de $\mathbb{A}_1$, et $\alpha_\pm$ le nombre de rotation de $F_{|T_\pm}$. Si F a la propriété d'intersection et si α_+ (resp.α_-) est diophantien, alors T_+ (resp. T_-) est accumulé par une famille de courbes invariantes diophantiennes.

Si F a une orbite dense dans A_1 et a la propriété d'intersection, les nombres de rotation α_+ et α_- ne sont donc pas diophantiens.

Proposition 4.1. *On suppose que α_+ est diophantien, que F a la propriété d'intersection et n'a pas de points périodiques dans $\mathbb{A}_1$. Alors F est C^∞-conjugué à la rotation $R_{\alpha_+}(\theta,r) := (\theta+\alpha_+, r)$ au voisinage du bord de $\mathbb{A}_1$.*

Démonstration. On a $\alpha_+ = \alpha_-$: sinon, par le théorème de point fixe de Birkhoff, F aurait une infinité de points périodiques dans $\mathbb{A}_1$.

On raisonne au voisinage de T_- dans $\mathbb{A}_1$ translaté en $\mathbb{T}^1 \times \{0\}$. Considérons la fonction $\hat{\ell}_F$ introduite en (**??**). Si $\hat{\ell}_F$ n'était pas constante sur $[0,\eta/2]$, le difféomorphisme F possèderait (d'après la section précédente) une courbe invariante de nombre de rotation distinct de α_-, et F aurait une infinité de points périodiques par le théorème de point fixe de Birkhoff.

L'application $\hat{\ell}_F$ est donc constante sur $[0,\eta/2]$. On conclut comme dans la section précédente que F est C^∞-conjugué à la rotation R_{α_-} au voisinage de T_-. □

4.2. Soit F un difféomorphisme de classe C^∞ de $\mathbb{A}$ homotope à l'identité. On suppose que F a la propriété d'intersection et n'a pas de points périodiques. On suppose aussi que F préserve le cercle $\mathbb{T}^1 \times \{0\}$ et que le nombre de rotation α_0 de F sur ce cercle est diophantien avec $\alpha_0 \in CD_{\beta_0,\gamma_0}$.

Théorème 4.2. *Il existe $k_0 \geq 1$ et $\varepsilon_0 > 0$ (dépendant seulement de (β_0,γ_0)) tels que, si*

$$\|F - R_{\alpha_0}\|_{C^{k_0}(\mathbb{A})} < \varepsilon_0$$

(où la norme est celle de la topologie C^{k_0} uniforme sur $\mathbb{A}$), alors F est C^∞-conjugué à la rotation R_{α_0}.

Démonstration. Le théorème **??** reste vrai sur $\mathbb{A}$ avec la topologie C^{k_0} uniforme.

Considérons de nouveau la fonction $\hat{\ell}_F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ introduite en (**??**)[5]. On a $\hat{\ell}_F(0) = 0$. Si $\hat{\ell}_F$ n'était pas identiquement nulle, le difféomorphisme F aurait une infinité de points périodiques. Il en résulte que, pour tout $c \in \mathbb{R}$, le difféomorphisme F laisse invariante la courbe $T_{\alpha_0,c}$. Si ε_0 est assez petit, les applications

$$(\theta,c) \mapsto (\theta, \psi_{\alpha_0,c}(\theta)), \quad (\theta,c) \mapsto (h_{\alpha_0,c}(\theta), c)$$

sont des difféomorphismes de classe C^∞ de $\mathbb{A}$.[6] □

[5]On applique le théorème **??** et le théorème des fonctions implicites au voisinage de chaque niveau. Il faut vérifier que les solutions locales se recollent.

[6]Cette démonstration n'est pas tout à fait complète.

4.3. Points fixes elliptiques.

Soit F un difféomorphisme de classe C^∞ de $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ ayant en 0 un point fixe elliptique

$$F(z) = e^{2\pi i\alpha_0} z(1 + O(|z|)).$$

On pose $z = re^{2\pi i\theta}$. L'application F devient ainsi un difféomorphisme de classe C^∞ de $\mathbb{T}^1 \times (0, +\infty)$.

Lemme 4.3. *Le difféomorphisme F se prolonge en un difféomorphisme de classe C^∞ de $\mathbb{T}^1 \times [0, +\infty)$.*[7]

Si F a la propriété d'intersection sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \cong \mathbb{T}^1 \times (0, +\infty)$ et si α_0 est diophantien on peut ainsi appliquer les résultats précédents.

Exemple 4.4. Soit F un germe holomorphe de $(\mathbb{C}, 0)$

$$F(z) = e^{2\pi i\alpha_0} z + O(z^2).$$

Alors, F a la propriété d'intersection (pour les courbes entourant l'origine) sur un voisinage de 0.

En effet, supposons que cela ne soit pas le cas. Quitte à remplacer F par son inverse, il existe une courbe de Jordan C entourant 0 dont l'image par F est contenu dans l'intérieur du disque D bordé par C. D'après le lemme de Schwarz, on a $|F'(0)| < 1$. Contradiction.

Supposons que α_0 est diophantien. D'après le théorème **??**, F laisse invariante une courbe C entourant 0, et donc aussi le disque D bordé par C. Il suit du théorème de représentation conforme appliqué à D et du lemme de Schwarz que F est linéarisable en 0.

4.4. Soient α_1 et α_2 deux réels > 0 dont le rapport est irrationnel. Considérons le hamiltonien

$$H_\alpha(z) := \alpha_1 |z_1|^2 + \alpha_2 |z_2|^2$$

sur $\mathbb{C}^2 \cong T^*\mathbb{R}^2$. Son flot hamiltonien est

$$f_t(z) = \left(e^{2\pi i\alpha_1} z_1, e^{2\pi i\alpha_2} z_2\right).$$

Comme α_2/α_1 est irrationnel, ce flot a seulement deux orbites périodiques sur l'ellipsoïde $E := H_\alpha^{-1}(1)$, à savoir :

$$P_j := E \cap \{z_j = 0\}, \qquad j = 1, 2.$$

L'exposant de Floquet de P_1 est égal à $\exp(2\pi i\alpha_1/\alpha_2)$; et symétriquement pour P_2.

Soit X un champ de vecteurs de classe C^∞ sur E qui est C^1-proche du champ hamiltonien X_{H_α} restreint à E et qui préserve une forme volume. Alors, le flot f_t^X a deux orbites périodiques P_1^X et P_2^X qui sont C^1-proches de P_1 et P_2 respectivement.

Proposition 4.5. *On suppose que α_1/α_2 est diophantien. Il existe un entier $k_0 \geq 1$ et $\varepsilon_0 > 0$ tels que, si X vérifie :*

1) $\|X - X_{H_\alpha|E}\|_{C^{k_0}} < \varepsilon_0$ *;*

2) *l'exposant de Floquet de P_1^X est égal à* $\exp(2\pi i\alpha_1/\alpha_2)$ *;*

[7] La démonstration du manuscrit est incomplète.

3) *le flot* f_t^X *a un nombre fini d'orbites périodiques,*

alors, l'exposant de Floquet de P_2^X *est égal à* $\exp(2\pi i\alpha_2/\alpha_1)$ *et il existe une fonction* $\varphi : E \to (0, +\infty)$ *de classe* C^∞ *telle que les flots de* φX *et* $X_{H_\alpha|E}$ *soient* C^∞*-conjugués.*

Démonstration. Puisque le flot de X a un nombre fini d'orbites périodiques, l'holonomie de P_1^X est C^∞-conjuguée à $z \mapsto \exp(2\pi i\alpha_1/\alpha_2)\, z$.

Soit $T \cong \mathbb{T}^1 \times D^2$ un voisinage tubulaire fermé de P_1^X tel que $\{0\} \times \partial D^2$ soit une courbe invariante par l'holonomie de X ; le champ X est alors tangent au bord de T. On note T_1 l'adhérence du complémentaire de T dans E ; on a $T_1 \cong D^2 \times \mathbb{T}^1$ et X est transverse à $D^2 \times \{0\}$.

Sur $\partial D^2 \times \mathbb{T}^1$, l'holonomie de f_t^X est C^∞-conjuguée à $z \mapsto \exp(2\pi i\alpha_2/\alpha_1)\, z$ sur $\{|z| = 1\}$. (Noter que, sur les deux tores ∂T et ∂T_1, les deux coordonnées circulaires (θ_1, θ_2) ont des rôles échangés.)

D'après le théorème du point fixe de Birkhoff, l'exposant de Floquet de P_2^X est égal à $\exp(2\pi i\alpha_2/\alpha_1)$ et l'holonomie du flot de X est C^∞-conjuguée à la rotation R_{α_2/α_1}. [8] □

Remarques 4.6.

1) Si le champ X, de classe C^∞ sur une variété M de dimension 3, a une orbite dense dans M et si P^X est une orbite périodique de X dont le multiplicateur de Floquet est de la forme $\exp(2\pi i\beta)$, alors β n'est pas diophantien. [9]

2) Le flot de X sur E avec les hypothèses de la proposition **??** est feuilleté par des tores invariants C^∞ de dimension 2 notés T_a et la restriction $X_{|T_a}$ est une reparamétrisation C^∞ du champ (α_1, α_2) sur $\mathbb{T}^2$. Donc le champ $X_{|T_a}$ est C^∞-conjugué au champ $k_a(\alpha_1, \alpha_2)$ où $a \mapsto k_a$ est une fonction C^∞ réelle sur $E \setminus \{P_1^X, P_2^X\}$.

---

[8] La démonstration que le multiplicateur de Floquet de P_2^X est $\exp(2\pi i\alpha_2/\alpha_1)$ n'est pas très claire. Pour conclure quant à l'existence de la conjugaison φ, 1), 2) et 3) interviennent pour permettre d'utiliser le Théorème **??**.

[9] Il semble manquer une hypothèse de propriété d'intersection.