Des cages de lumière pour les atomes :
la physique des pièges et des réseaux optiques

Cours 2. Réseaux optiques : principes de base

Jean Dalibard
Chaire *Atomes et rayonnement*
Année 2012-13

COLLÈGE DE FRANCE 1530

Buts de ce cours

Potentiel dipolaire périodique créé par une onde lumineuse stationnaire
$V(x) = V_0 \sin^2(kx)$ (cas 1D) ou sa version bi/tri dimensionnelle

- Comment exploiter l'invariance par translation discrète du potentiel ?

$$V(x+a) = V(x) \qquad a = \pi/k$$

Théorème de Bloch, bandes d'énergie
Résultats explicites pour le potentiel sinusoïdal

- Branchement et débranchement du potentiel

diffraction de Bragg, « band mapping »

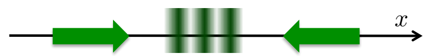
- Propagation de paquets d'ondes

vitesse de groupe, masse effective

1.

Comment générer un réseau optique

Onde lumineuse stationnaire à une dimension



$\mathcal{E}_0 \sin(kx - \omega t + \phi_1)$ $\quad$ $\mathcal{E}_0 \sin(kx + \omega t - \phi_2)$

Champ résultant : $\mathcal{E}(x,t) = 2\mathcal{E}_0 \sin(kx - \Phi)\cos(\omega t - \varphi)$

avec $\Phi = (\phi_2 - \phi_1)/2 \qquad \varphi = (\phi_1 + \phi_2)/2$

On définit l'origine de l'axe x pour avoir $\Phi = 0$

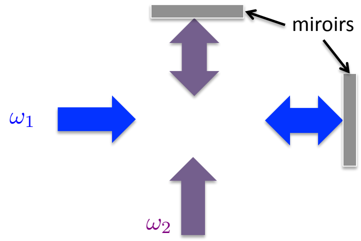
Potentiel dipolaire : $$V(x) = \frac{[2d_0\mathcal{E}_0 \sin(kx)]^2}{4\hbar\bar{\Delta}} = V_0 \sin^2(kx)$$

d_0 : élément de matrice du dipôle atomique

$$\frac{1}{\bar{\Delta}} = \frac{1}{\omega - \omega_0} - \frac{1}{\omega + \omega_0} \qquad V_0 = \frac{d_0^2\mathcal{E}_0^2}{\hbar\bar{\Delta}}$$

Réseaux optiques à plusieurs dimensions

Une technique simple et robuste : une couleur par axe



Si la différence des fréquences

$$|\omega_1 - \omega_2|$$

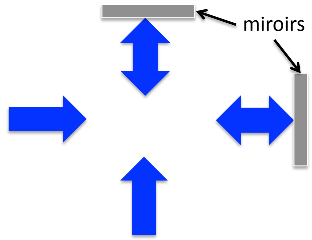
est grande devant les fréquences caractéristiques du mouvement du centre de masse atomique, on peut ignorer tout phénomène d'interférence entre les différentes paires de faisceaux

$$V(x,y) = V_1 \sin^2(kx) + V_2 \sin^2(ky)$$

En pratique, une différence de quelques dizaines de MHz suffit

Réseaux optiques à plusieurs dimensions (suite)

Une technique plus sophistiquée (et plus riche) : deux ou trois ondes stationnaires à la même fréquence et verrouillées en phase entre elles



$$\mathcal{E}(\vec{r},t) = \mathcal{E}_1 \sin(kx)\cos(\omega t - \varphi_1)$$
$$+\mathcal{E}_2 \sin(ky)\cos(\omega t - \varphi_2)$$

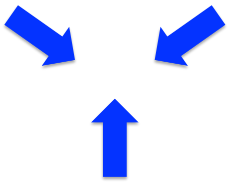
Le paysage de potentiel $\propto \overline{|\mathcal{E}(\vec{r},t)|^2}$ dépend de la phase relative $\varphi_1 - \varphi_2$

techniquement non trivial...

Hänsch, Hemmerich, Esslinger...

Réseaux optiques à plusieurs dimensions (fin)

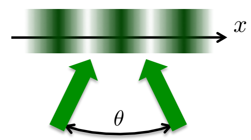
Configuration à nombre minimal de faisceaux (Grynberg *et al.*, 1993)



- trois faisceaux non colinéaires à deux dimensions
- quatre faisceaux non coplanaires à trois dimensions

Le changement de phase d'un des faisceaux par rapport à l'autre ne change pas le profil d'interférence, mais cause simplement une translation globale de $V(\vec{r})$

L'échelle d'énergie naturelle : l'énergie de recul



$$V(x) = V_0 \sin^2(kx)$$

période spatiale : $a = \pi/k$

échelle d'énergie : $E_r = \dfrac{\hbar^2 k^2}{2m}$

^{7}Li @ 671 nm : 60 kHz = 3 μK

^{87}Rb @ 780 nm : 4 kHz = 0.2 μK

Le nombre d'onde *k* le long de l'axe x est ajustable : $k = k_L \sin(\theta/2)$

augmentation de l'échelle de longueur, diminution de l'échelle d'énergie

2.

Le théorème de Bloch

En résumé :

- On va chercher les états propres de l'hamiltonien périodique (de période $a = \pi/k$)

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V_0 \sin^2(k\hat{x})$$

sous la forme d'ondes de Bloch $\psi_{n,q}(x) = e^{iqx}u_{n,q}(x)$ où la fonction $u_{n,q}(x)$ est également périodique, de période $a = \pi/k$

- Deux quasi-moments q et q' qui diffèrent de $2k$ correspondent au même état propre

  On peut donc restreindre notre recherche en prenant le quasi-moment q dans la première zone de Brillouin : $-k < q \leq k$

- Pour chaque valeur de q, on trouve un ensemble d'énergies $E_n(q), \quad n = 0,1,\ldots$

  $n^{\text{ième}}$ bande d'énergie : intervalle parcouru par $E_n(q)$ quand q varie entre $-k$ et k

Le rôle des symétries : la parité du potentiel

Potentiel symétrique par rapport à l'origine : $V(x) = V(-x)$

L'hamiltonien commute avec l'opérateur parité : $\hat{P}\psi(x) = \psi(-x)$

base de fonctions de Bloch : $\psi_{n,q}(x) = e^{ixq}\, u_{n,q}(x)$

$$\hat{H}\left(\hat{P}|\psi\rangle\right) = \hat{P}\left(\hat{H}|\psi\rangle\right) \quad \Rightarrow \quad \hat{H}\left[e^{-ixq}\, u_{n,q}(-x)\right] = E_n(q)\left[e^{-ixq}\, u_{n,q}(-x)\right]$$

La fonction $e^{-ixq}\, u_{n,q}(-x)$ vérifie donc toutes les propriétés d'une fonction de Bloch associée au quasi-moment $-q$.

Si on a su résoudre le problème aux valeurs propres pour q, on connait aussi les solutions pour $-q$ en prenant

$$\psi_{n,-q}(x) \propto \psi_{n,q}(-x) \qquad\qquad E_n(-q) = E_n(q)$$

Le rôle des symétries : invariance par renversement du temps

Physiquement : a-t-on le mouvement « inversé » quand on fait le changement

$$\vec{r} \to \vec{r} \qquad\qquad \vec{p} \to -\vec{p}$$

pas de force de type « Lorentz » en $\vec{v} \times \vec{B}$

Mathématiquement : l'hamiltonien commute avec l'opérateur (anti-unitaire) $\hat{K}_0$

$\hat{K}_0\psi(\vec{r}) = \psi^*(\vec{r})$ pour une particule sans spin

Invariance par renversement du temps (2)

Hamiltonien périodique invariant par renversement du temps $\hat{H}$: $[\hat{H}, \hat{K}_0] = 0$

base de fonctions de Bloch : $\psi_{n,q}(x) = e^{ixq}\, u_{n,q}(x)$

$$\hat{H}\left(\hat{K}_0|\psi\rangle\right) = \hat{K}_0\left(\hat{H}|\psi\rangle\right) \Rightarrow \hat{H}\left[e^{-ixq}\, u^*_{n,q}(x)\right] = E_n(q)\left[e^{-ixq}\, u^*_{n,q}(x)\right]$$

La fonction $e^{-ixq}\, u^*_{n,q}(x)$ vérifie donc toutes les propriétés d'une fonction de Bloch associée au quasi-moment $-q$.

Si on a su résoudre le problème aux valeurs propres pour q, on connait aussi les solutions pour $-q$ en prenant

$$\psi_{n,-q}(x) \propto \psi^*_{n,q}(x) \qquad E_n(-q) = E_n(q)$$

3.

Les bandes d'énergie pour le potentiel sinusoïdal

un problème « académique » pour la physique des solides,
le pain quotidien en physique des atomes froids...

L'équation centrale & le cas d'un réseau faible

L'équation « centrale »

On injecte la forme de Bloch $\psi_q(x) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} C_j(q)\, e^{i(2jk+q)x}$ dans l'équation aux valeurs propres :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi_q}{dx^2} + \underbrace{V_0 \sin^2(kx)}_{\frac{V_0}{4}\left(2 - e^{2ikx} - e^{-2ikx}\right)}\psi_q = E(q)\,\psi_q$$

On obtient un système (infini) pour les coefficients $C_j(q)$:

$$\frac{\hbar^2}{2m}(2jk+q)^2\, C_j(q) + \frac{V_0}{2} C_j(q) - \frac{V_0}{4}\left(C_{j+1}(q) + C_{j-1}(q)\right) = E(q)\, C_j(q)$$

L'énergie de recul $E_{\rm r} = \hbar^2 k^2/(2m)$ fournit l'échelle naturelle d'énergie :

$$\left[\left(2j + \frac{q}{k}\right)^2 + \frac{V_0}{2E_{\rm r}}\right] C_j - \frac{V_0}{4E_{\rm r}}(C_{j-1} + C_{j+1}) = \frac{E}{E_{\rm r}}\, C_j$$

Résolution de l'équation « centrale »

Pour q fixé dans la zone de Brillouin : $-k < q \leq k$

$$\left[\left(2j + \frac{q}{k}\right)^2 + \frac{V_0}{2E_{\rm r}}\right] C_j - \frac{V_0}{4E_{\rm r}}(C_{j-1} + C_{j+1}) = \frac{E}{E_{\rm r}}\, C_j$$

Problème aux valeurs propres pour une matrice tridiagonale infinie

Pour chaque valeur de q, infinité de solutions
correspondant aux énergies $E_0(q), E_1(q), E_2(q), \ldots$

On tronque la matrice au domaine $|j| \leq j_{\rm max}$ avec $j_{\rm max} = 20$

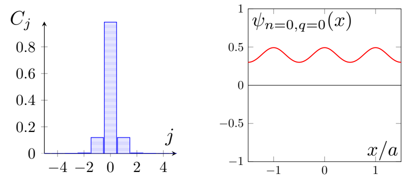
bonne précision pour les valeurs propres les plus basses pour $V_0/E_{\rm r} \leq 50$

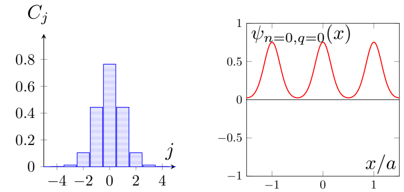
Exemples de solutions pour $q=0$

potentiel « faible » : $V_0 = 2E_r$

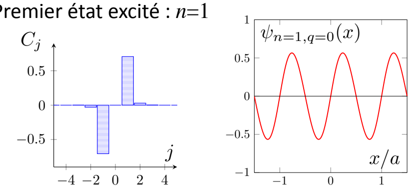
potentiel « fort » : $V_0 = 20E_r$

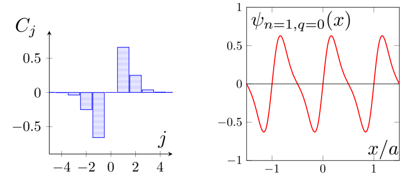
Fondamental : $n=0$



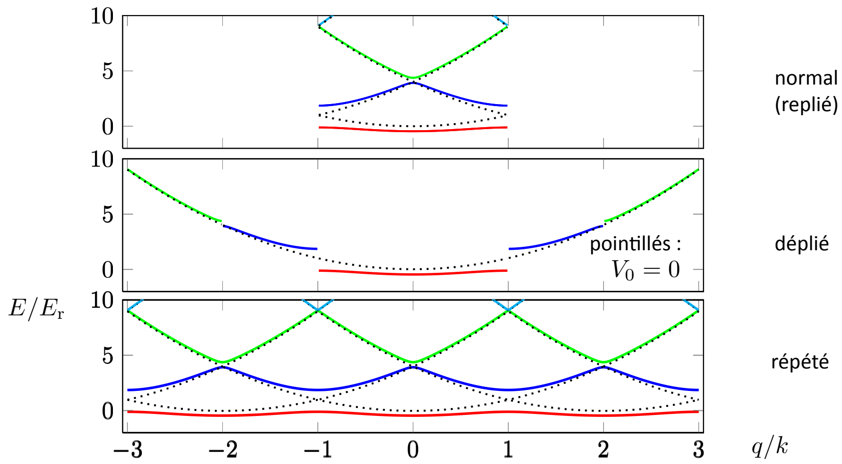


Premier état excité : $n=1$





Bandes d'énergie pour le potentiel sinusoïdal $V_0 = 4E_r$



Le cas du potentiel nul

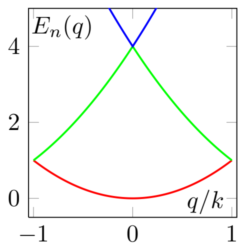
Le potentiel $V(x) = 0$ est périodique de période $a = \pi/k$

Les états propres de l'hamiltonien sont les ondes planes $\phi_p(x) = e^{ipx/\hbar}$

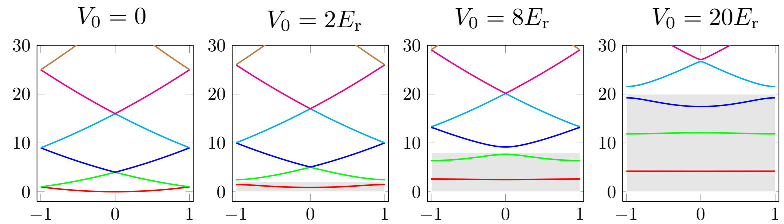
qui s'écrivent $\phi_p(x) = e^{iqx} e^{2ijkx}$ avec $\frac{p}{\hbar} = 2jk + q,$

j : entier le plus proche de $p/(2\hbar k)$

$$E(p) = \frac{p^2}{2m} \quad \begin{cases} E_0(q) = \dfrac{\hbar^2 q^2}{2m} & \text{bande fondamentale} \\ E_1(q) = \dfrac{\hbar^2}{2m}(q \pm 2k)^2 & \text{première bande excitée} \\ \dots \end{cases}$$



Evolution de la structure de bande avec V_0



ouverture d'un « gap »
au niveau des croisements

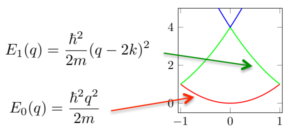
bandes de basse énergie
de plus en plus plates

réseau faible

réseau fort

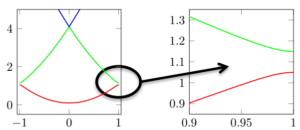
Le cas du réseau faible

$V_0 = 0$



$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m}$$

$V_0 = 0.2E_\mathrm{r}$



$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \underbrace{\frac{V_0}{4}\left(2 - e^{2ik\hat{x}} - e^{-2ik\hat{x}}\right)}$$

couple l'onde plane d'impulsion p
aux ondes planes d'impulsion $p \pm 2\hbar k$

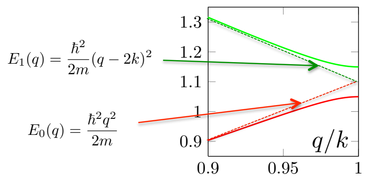
Ce couplage peut avoir une conséquence significative si les deux états couplés ont une énergie voisine vis-à-vis de $\hat{H}_0$:

$$\frac{p^2}{2m} \approx \frac{(p \pm 2\hbar k)^2}{2m} \quad \Rightarrow \quad p \approx \mp \hbar k.$$

bord de zone de Brillouin

Le cas du réseau faible (2)

Plaçons-nous exactement au point de croisement pour $V_0 = 0$: $q = k$



Deux états « onde plane » $\begin{cases} e^{iqx} = e^{ikx} \\ e^{i(q-2k)x} = e^{-ikx} \end{cases}$

couplés par $\frac{V_0}{4}\left(2 - e^{2ik\hat{x}} - e^{-2ik\hat{x}}\right)$

A l'ordre 1 de la théorie des perturbations, les états propres sont obtenus par diagonalisation de la matrice 2 x 2:

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} E_\mathrm{r} + V_0/2 & -V_0/4 \\ -V_0/4 & E_\mathrm{r} + V_0/2 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} E_1(k) = E_\mathrm{r} + \frac{3V_0}{4} & \psi_{1,k} \propto \sin(kx) \\ E_0(k) = E_\mathrm{r} + \frac{V_0}{4} & \psi_{0,k} \propto \cos(kx) \end{cases}$$

Diffraction de Bragg

4.

Branchement et débranchement d'un réseau

Approximation adiabatique, diffraction de Bragg & « band mapping »

Le théorème de Bloch dans un cas dépendant du temps

Potentiel spatialement périodique $V(x)$ dont l'amplitude $f(t) \equiv f_t$ dépend du temps :

$$\hat{H}(t) = \frac{\hat{p}^2}{2m} + f_t\, V(\hat{x})$$

On suppose qu'à $t = 0$, l'état de la particule a la forme d'une fonction de Bloch :

$\phi(x, t=0) = e^{iqx}\; u(x, t=0)$ $\qquad u(x, t=0)$: périodique de période a

Alors, cette forme est préservée durant l'évolution avec le même quasi-moment q

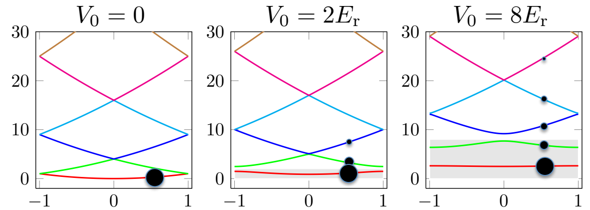
$\phi(x, t) = e^{iqx}\; u(x, t)$ $\qquad u(x, t)$: périodique de période a

Démonstration : $[\hat{H}(t), \hat{T}_a] = 0 \quad \Rightarrow \quad [\hat{U}(0 \to t), \hat{T}_a] = 0 \qquad \hat{U}$: opérateur d'évolution

Physiquement clair : les échanges d'impulsion entre atome et lumière se font par processus « absorption-émission stimulée » qui transfèrent $\pm 2\hbar k$: ne changent pas le quasi-moment q

Adiabaticité du branchement (ou du débranchement)

Partons d'un atome d'impulsion donnée, par exemple $p = \hbar k/2$ en absence de lumière



?

Evolution de la partie périodique de la fonction de Bloch $\phi(x,t) = e^{iqx}\, u(x,t)$

$$i\hbar \frac{\partial |u(t)\rangle}{\partial t} = \hat{H}_{\text{per.}}[q, f_t] |u(t)\rangle \quad \text{avec} \quad \hat{H}_{\text{per.}}[q,f] = \frac{(\hat{p} + \hbar q)^2}{2m} + fV(\hat{x})$$

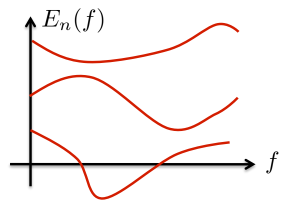
A quelle condition la fonction $u(x,t)$ reste-t-elle voisine de $u_0^{[f_t]}(x)$?

L'approximation adiabatique

Hamiltonien dépendant d'un paramètre f :

Etats propres $|\phi_n(f)\rangle$

Energies $E_n(f)$



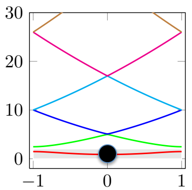
On suppose que f dépend du temps.

A l'instant initial, le système est dans un état propre particulier $|\phi_n[f(0)]\rangle$

Le système va suivre cet état propre si on a à chaque instant :

$$\hbar \left| \langle \phi_{n'} | \frac{d}{dt} |\phi_n\rangle \right| \ll |E_{n'} - E_n|, \quad \forall n' \neq n,$$

L'approximation adiabatique pour le branchement du réseau



$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{fV_0}{4}\left(2 - e^{2ik\hat{x}} - e^{-2ik\hat{x}}\right)$$

Cas d'un réseau faible $V_0 \lesssim E_r$

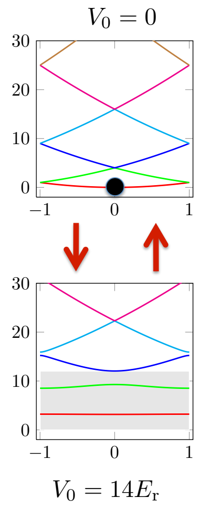
Atome préparé dans la bande fondamentale, impulsion nulle

Etat propre qu'on souhaite suivre adiabatiquement (1er ordre des perturbations) :

$$|\psi_{n=0,q=0}\rangle \approx |p=0\rangle + \frac{fV_0/4}{4E_r}\left(|p = 2\hbar k\rangle + |p = -2\hbar k\rangle\right)$$

Le critère général s'écrit dans ce cas : $\dot{f} \ll 32\sqrt{2}\, \frac{E_r^2}{\hbar V_0}$

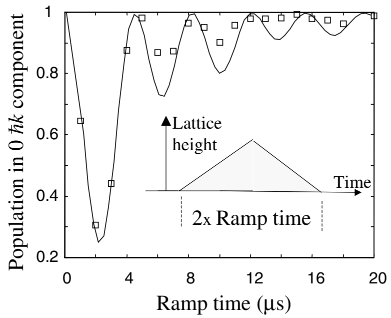
Si on passe de $V_0 = 0$ à $V_0 = E_r$ linéairement en un temps τ : $\tau \gg \frac{1}{32\sqrt{2}} \frac{\hbar}{E_r}$



Vérification expérimentale (NIST)

Atomes de sodium : $\hbar/E_r \approx 6\,\mu s$

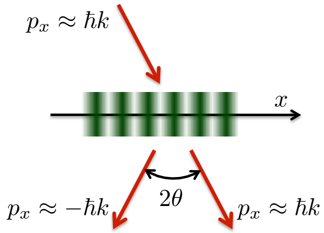
Denschlag *et al.*, 2002



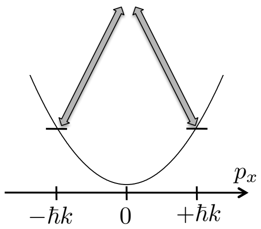
Remarque : problème en bord de bandes !

La diffraction de Bragg

Tire parti de la périodicité du réseau pour diffracter l'onde dans une direction donnée



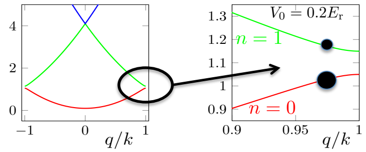
$$\lambda_{\text{dB}} = 2a \sin\theta$$
$$\lambda_{\text{dB}} = h/p$$
$$p_x \equiv p \sin\theta = \hbar k$$



Comment retrouver ce résultat dans le formalisme de la théorie des bandes ?

Champenois *et al.*, 2001

La diffraction de Bragg (2)



On se place au voisinage du bord de la zone de Brillouin et on branche soudainement le réseau

$$|\Psi(t=0)\rangle = |p\rangle = \cos(\theta/2)\,|\psi_{n=0,q}\rangle - \sin(\theta/2)\,|\psi_{n=1,q}\rangle$$

Evolution de type « oscillation de Rabi »:

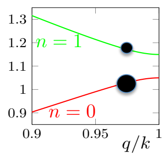
$$|\Psi(t)\rangle = \cos(\theta/2)\,e^{-iE_{0,q}t/\hbar}\,|\psi_{n=0,q}\rangle - \sin(\theta/2)\,e^{-iE_{1,q}t/\hbar}\,|\psi_{n=1,q}\rangle$$

A la fin de l'évolution, on éteint soudainement le réseau et on projette l'état obtenu à cet instant sur la base des ondes planes :

$$\mathcal{P}_{p\to p-2\hbar k}(t) = \sin^2\theta\ \sin^2(\Omega t/2) \qquad \hbar\Omega = E_{1,q} - E_{0,q} \approx V_0/2$$

Oscillation « Pendellösung »

Sélectivité en vitesse de la diffraction de Bragg



$$|\Psi(t=0)\rangle = |p\rangle = \cos(\theta/2)\,|\psi_{n=0,q}\rangle - \sin(\theta/2)\,|\psi_{n=1,q}\rangle$$

$$\mathcal{P}_{p\to p-2\hbar k}(t) = \sin^2\theta\ \sin^2(\Omega t/2)$$

angle de mélange : $\cos\frac{\theta}{2} = \langle p|\psi_{n=0,q}\rangle$

Pour un réseau faible, les états propres $|\psi_{n=0/1,q}\rangle$ sont obtenus par diagonalisation de la matrice 2x2 :

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} \frac{p^2}{2m} + V_0/2 & -V_0/4 \\ -V_0/4 & \frac{(p-2\hbar k)^2}{2m} + V_0/2 \end{pmatrix}$$

écrite dans la base $|p\rangle, |p-2\hbar k\rangle$

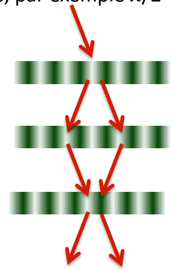
dont on déduit : $\sin^2\theta = \dfrac{(V_0/8E_r)^2}{[p/(\hbar k) - 1]^2 + (V_0/8E_r)^2}$

d'autant plus sélectif en vitesse que V_0 est faible

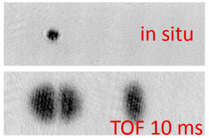
Observation et utilisation de la diffraction de Bragg

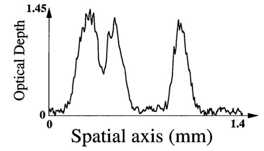
Observée d'abord avec des jets atomiques traversant des ondes lumineuses stationnaires (groupe de Pritchard, MIT 1988)

à la base de schémas interférométriques variés, par exemple $\pi/2$ - π - $\pi/2$

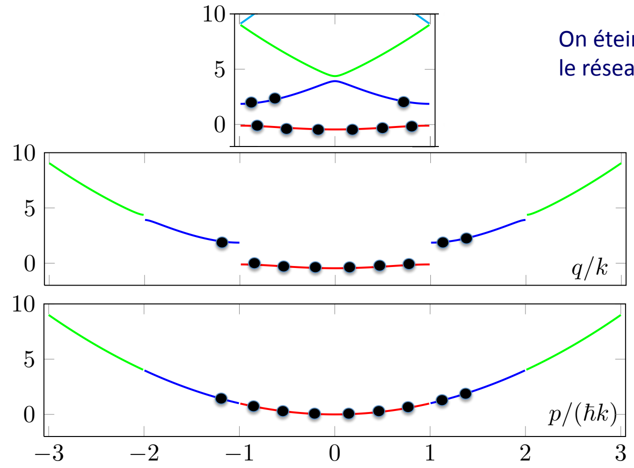


Expérience faite au NIST avec des condensats :
Kozuma *et al.*, 1999





Comment mesurer la population des différentes bandes ?



On éteint adiabatiquement le réseau. Qu'obtient-on ?

Chaque bande est projetée sur deux segments de longueur $\hbar k$ dans l'espace des impulsions

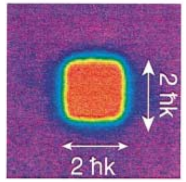
« Band mapping »

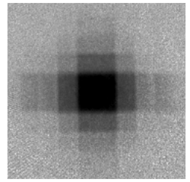
Mesure de la population des différentes bandes

Greiner *et al.*, 2001 : bosons (^{87}Rb) dans un réseau carré à 2D

Exploring Phase Coherence in a 2D Lattice of Bose-Einstein Condensates

Markus Greiner, Immanuel Bloch, Olaf Mandel, Theodor W. Hänsch,* and Tilman Esslinger



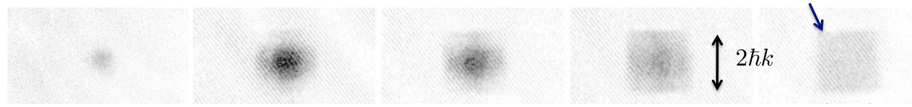


Köhl *et al.*, 2005 : fermions (^{40}K) dans un réseau cubique 3D

Fermionic Atoms in a Three Dimensional Optical Lattice: Observing Fermi Surfaces, Dynamics, and Interactions

Michael Köhl,* Henning Moritz, Thilo Stöferle, Kenneth Günter, and Tilman Esslinger

Isolant de bande



5.

Propagation de paquets d'ondes

vitesse de groupe & masse effective

La vitesse de groupe

Rappel : pour une onde de relation de dispersion $\omega(k)$, un paquet d'ondes piqué autour d'un valeur $\bar{k}$ se propage à la vitesse de groupe :

$$v_{\rm g} = \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k=\bar{k}}$$

Cette relation s'étend presque à l'identique à un réseau.

Etat initial : $\psi(x,0) = \int c(q)\, \psi_{n,q}(x)\; dq$

Paquet d'ondes
- composé de fonctions de Bloch d'une seule bande d'énergie n
- centré en q_0 avec une dispersion $\Delta q \;<<\; k$

La vitesse de groupe (2)

$$\psi(x,0) = \int c(q)\, \psi_{n,q}(x)\, dq \quad \text{évolue en} \quad \psi(x,t) = \int c(q)\, \psi_{n,q}(x)\, e^{-iE_n(q)t/\hbar}\, dq$$

Développement de l'énergie au voisinage de q_0 : $E_n(q) = E_n(q_0) + (q - q_0)\left.\dfrac{dE_n}{dq}\right|_{q=q_0}$

On définit : $v_{g,n}(q_0) = \dfrac{1}{\hbar}\left.\dfrac{dE_n}{dq}\right|_{q=q_0}$

et on obtient : $\psi(x,t) \approx e^{-i\omega_0 t}\displaystyle\int c(q)\, \psi_{n,q}(x)\, e^{-iqv_{g,n}t}\, dq$

Choisissons une durée *t* telle que $v_{g,n}t = a$ (une période spatiale du réseau)

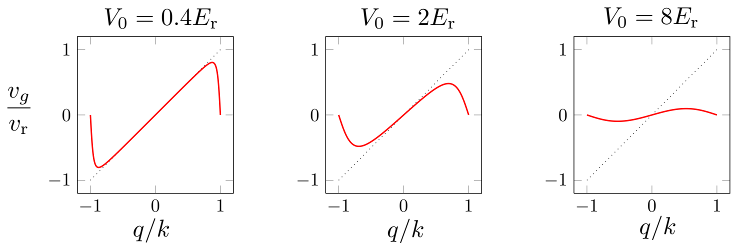
Par définition d'une fonction de Bloch : $e^{-iqa}\psi_{n,q}(x) = \psi_{n,q}(x-a)$

$$\rightarrow \quad \psi(x,t) \approx e^{-i\omega_0 t}\, \psi(x-a, 0)$$

Exemples de vitesse de groupe

$$v_{g,n}(q_0) = \frac{1}{\hbar}\left.\frac{dE_n}{dq}\right|_{q=q_0}$$

On considère la bande fondamentale du réseau sinusoïdal



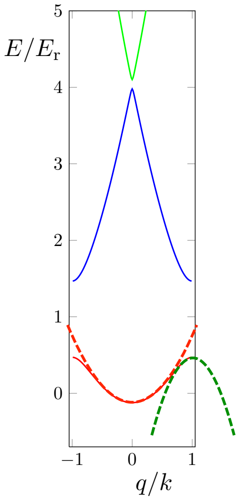
Unité naturelle pour une vitesse dans un réseau optique : la vitesse de recul

$$v_r = \frac{\hbar k}{m}$$

6 cm/s pour Na, 6mm/s pour Rb

Particule libre : $E_0(q) = \hbar^2 q^2/(2m) \quad \longrightarrow \quad v_g = \hbar q/m$

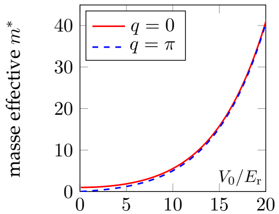
La masse effective



Approximation parabolique au voisinage du fond d'une bande ou de son sommet :

$$E(q) = \frac{\hbar^2 q^2}{2m^*} + \text{constante} \qquad \frac{1}{m^*} = \frac{1}{\hbar^2}\frac{d^2 E_n}{dq^2}$$

Pour la bande fondamentale :



Notion pas aussi centrale qu'en physique des solides