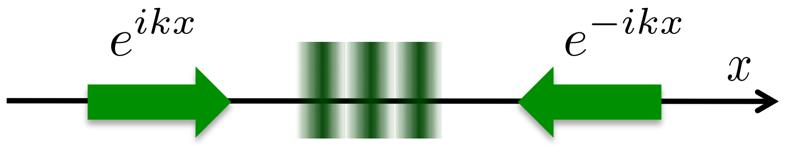
Des cages de lumière pour les atomes :
la physique des pièges et des réseaux optiques

Cours 5.
Les oscillations de Bloch dans un réseau optique

Jean Dalibard
Chaire *Atomes et rayonnement*
Année 2012-13

COLLÈGE DE FRANCE
1530

Bilan des cours précédents



période $a = \lambda/2$

Atome dans un réseau optique stationnaire :

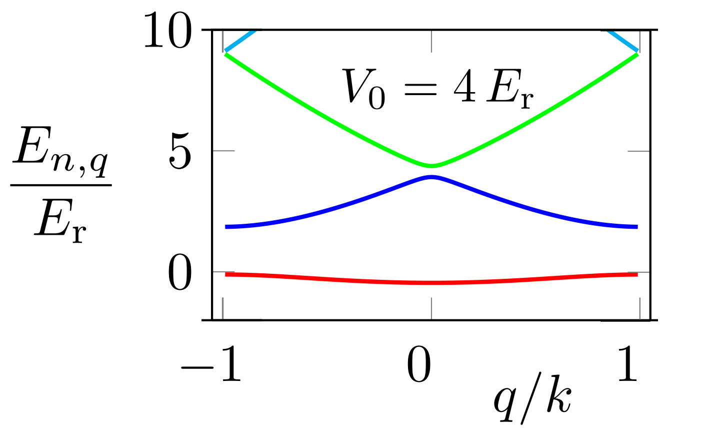
$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}) \qquad V(x) = V_0 \sin^2(kx)$$

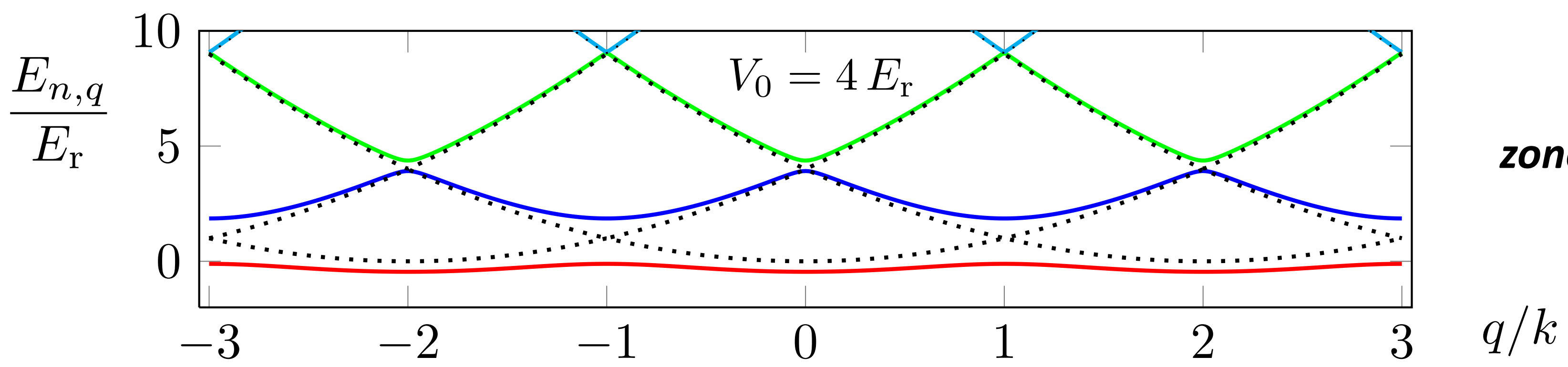
Fonctions de Bloch : $\psi_{n,q}(x) = e^{ixq} u_{n,q}(x)$

Bandes d'énergie : $E_n(q)$

Echelle d'énergie : $E_r = \hbar^2 k^2/2m$

zone de Brillouin : $-k < q \leq k$

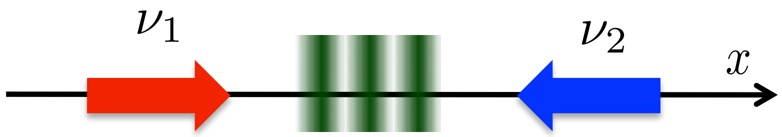




zone répétée

Bilan des cours précédents

Réseau dépendant du temps :



$$V(x) = V_0 \sin^2(kx) \longrightarrow V(x,t) = V_0\cancel{(t)} \sin^2[k(x - x_0(t))]$$

Identification de trois hamiltoniens équivalents pour décrire ce problème

$$A(t) = m\dot{x}_0(t)$$

$$F(t) = -\dot{A}(t) = -m\ddot{x}_0(t)$$

$$\hat{H}_0(t) = \frac{[\hat{p} - A(t)]^2}{2m} + V(\hat{x})$$

$$\hat{H}_0 \xrightarrow{\hat{U}_1} \hat{H}_1 \qquad \hat{H}_0 \xrightarrow{\hat{U}_2} \hat{H}_2$$

$$\hat{H}_1(t) = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}) - F(t)\,\hat{x}$$

$$\hat{H}_2(t) = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V[\hat{x} - x_0(t)]$$

Les trois hamiltoniens utiles

$$\hat{H}_0(t) = \frac{[\hat{p} - A(t)]^2}{2m} + V(\hat{x})$$

$$\hat{H}_1(t) = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}) - F(t)\,\hat{x}$$

$$\hat{H}_2(t) = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V[\hat{x} - x_0(t)]$$

Si $\hat{H}_2$ est l'hamiltonien dans le référentiel du laboratoire, alors $\hat{H}_1$ est l'hamiltonien du même problème dans le référentiel accéléré

$F(t) = -m\ddot{x}_0(t)$ *: force d'inertie*

Mais $\hat{H}_1$ peut également être l'hamiltonien dans le référentiel du laboratoire si on ajoute une « vraie » force constante : champ électrique sur un électron, gravité, gradient de champ magnétique sur un atome neutre

Evolution d'une onde de Bloch pour les trois hamiltoniens

Hamiltonien $\hat{H}_0(t) = \frac{[\hat{p} - A(t)]^2}{2m} + V(\hat{x})$

Forme de Bloch conservée, $e^{ixq}u(x,0) \to e^{ixq}u(x,t)$ $\qquad q(t) = q(0)$

Hamiltonien $\hat{H}_2(t) = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V[\hat{x} - x_0(t)]$

Forme de Bloch conservée, $e^{ixq}u(x,0) \to e^{ixq}u(x,t)$ $\qquad q(t) = q(0)$

Hamiltonien $\hat{H}_1(t) = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}) - F(t)\,\hat{x}$

Forme de Bloch conservée mais avec un changement de quasi-moment:

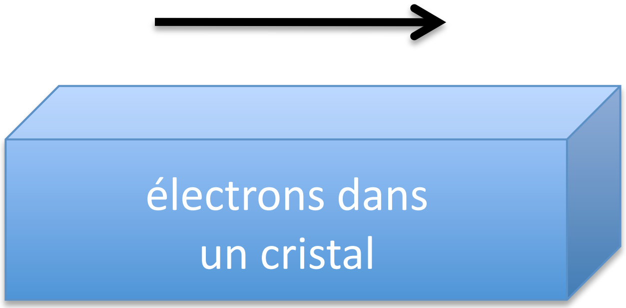
$e^{ixq}u(x,0) \to e^{ix\,q(t)}u(x,t)$ $\qquad q(t) = q(0) - p_0(t)/\hbar = q(0) + \frac{1}{\hbar}\int_0^t F(t')\,dt'$

1.

Le principe des oscillations de Bloch

Le problème de Zener (1934)

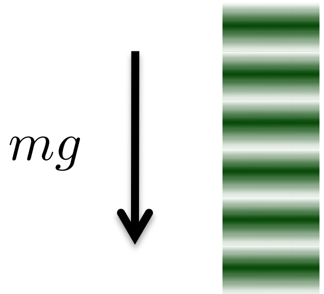
champ électrique uniforme



A quel champ se produit le « claquage » ?

extraction irréversible des électrons
depuis la bande de conduction

Exemple de transposition
avec des atomes

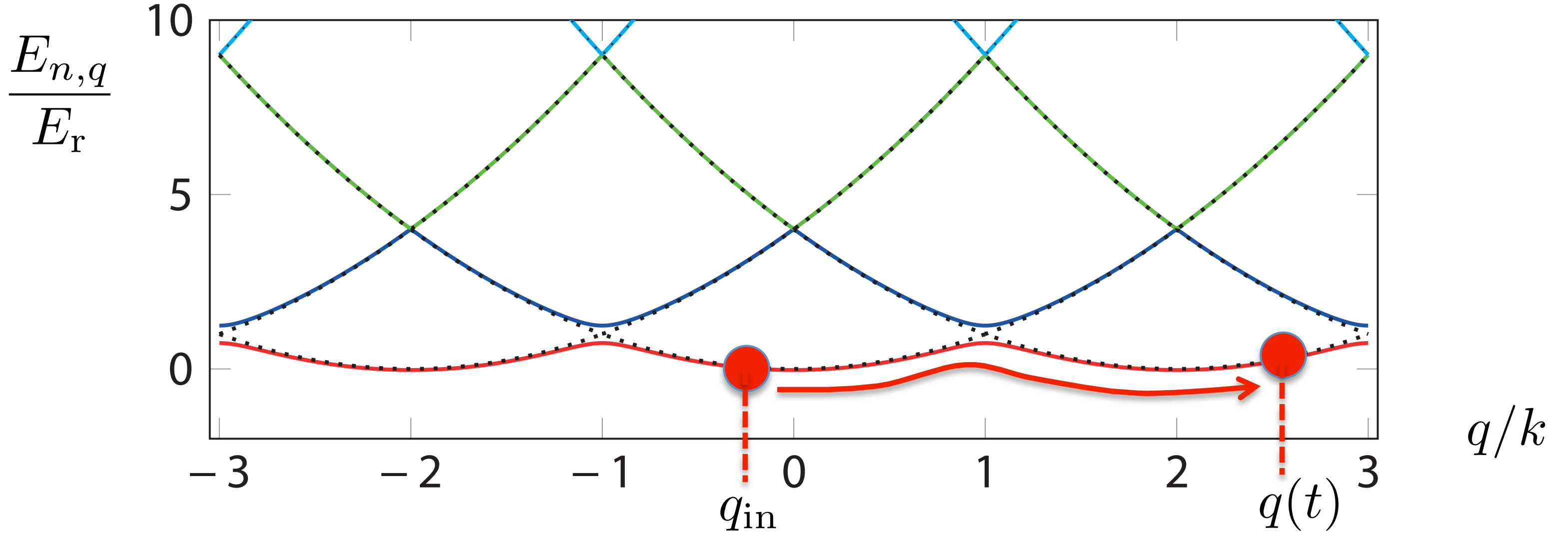


Hamiltonien « de type $\hat{H}_1$ » avec une force constante
(indépendante du temps et de l'espace) en plus du potentiel périodique

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}) - F\hat{x} \qquad\qquad V(x+a) = V(x)$$

Que gagne-t-on par rapport à la relation générale $q(t) = q_{\text{in}} + \frac{1}{\hbar}\int_0^t F(t')\,dt'$?

L'approximation adiabatique



Instant initial : $\psi(x, t=0) = \psi_{n,q_{in}}(x) = e^{ix\,q_{in}} u_{n,q_{in}}(x)$

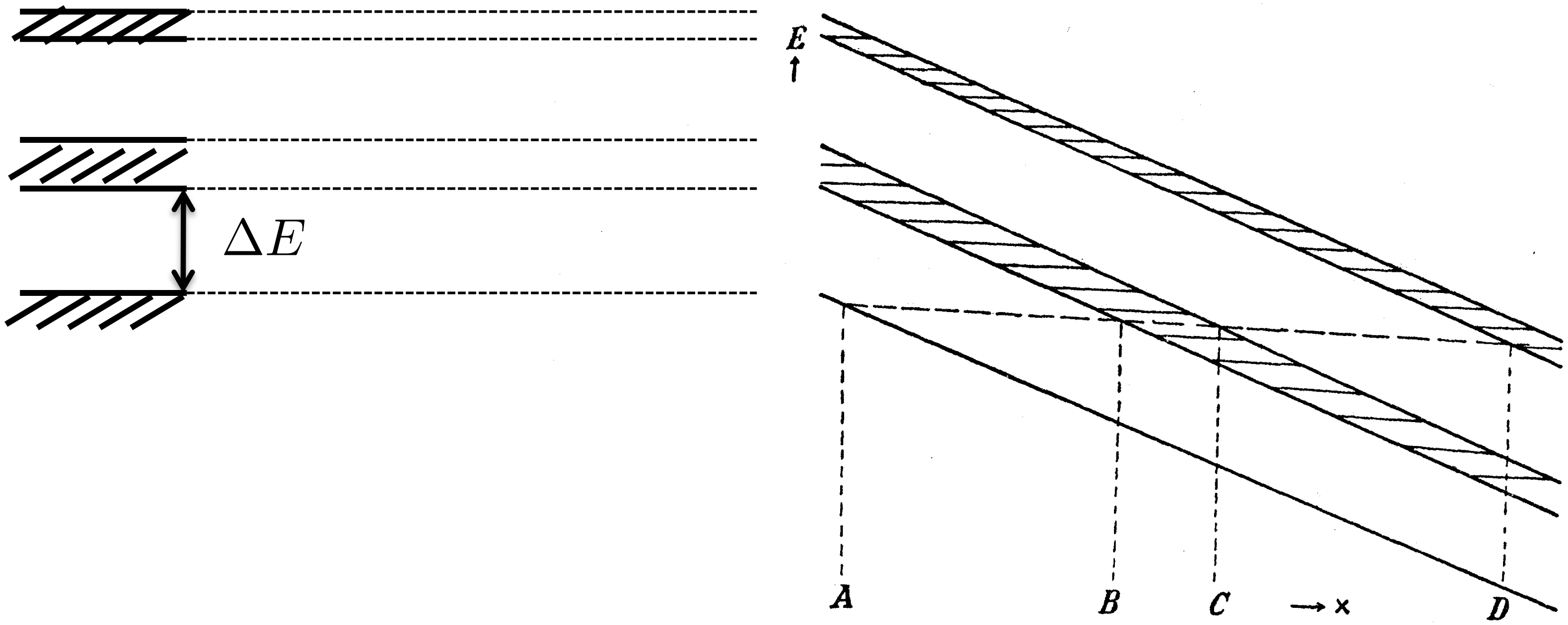
L'approximation adiabatique consiste à supposer que l'état de l'atome reste dans la bande de départ

$$\psi(x,t) \propto \psi_{n,q(t)}(x) = e^{ix\,q(t)} u_{n,q(t)}(x) \qquad q(t) = q_{in} + Ft/\hbar$$

En particulier, au bout d'une période de Bloch $\psi(x, \tau_B) \propto \psi(x, 0)$

égalité à une phase près : dynamique + géométrique (Zak)

L'approche de Zener (1934)



Mélange la notion de bande (espace des quasi-impulsions)
et de potentiel (espace des positions)

« spectre d'énergie local »

Amplitude de l'oscillation dans l'espace réel : $x_b - x_A = \Delta E/F$

La vitesse de groupe en absence de force

$$v_{\mathrm{g},n}(q_0) = \frac{1}{\hbar}\left.\frac{dE_n}{dq}\right|_{q=q_0}$$

Evolution générale dans le potentiel périodique dans une bande *n* :

$$\psi(x,0) = \int c(q)\,\psi_{n,q}(x)\,dq \quad \longrightarrow \quad \psi(x,t) = \int c(q)\,\psi_{n,q}(x)\,e^{-iE_n(q)t/\hbar}\,dq$$

On considère un paquet d'ondes centré en q_0 avec une dispersion Δq << k :

Développement au voisinage de q_0 : $E_n(q) \approx E_n(q_0) + (q-q_0)\left.\dfrac{dE_n}{dq}\right|_{q=q_0}$

$$= E_n(q_0) + \hbar(q-q_0)v_{\mathrm{g},n}(q_0)$$

$$\longrightarrow \quad \psi(x,t) \propto \int c(q)\;\psi_{n,q}(x)\;e^{-iqv_{\mathrm{g},n}(q_0)\,t}\;dq$$

Choisissons une durée *t* telle que $v_{\mathrm{g},n}t = a$ (une période spatiale du réseau)

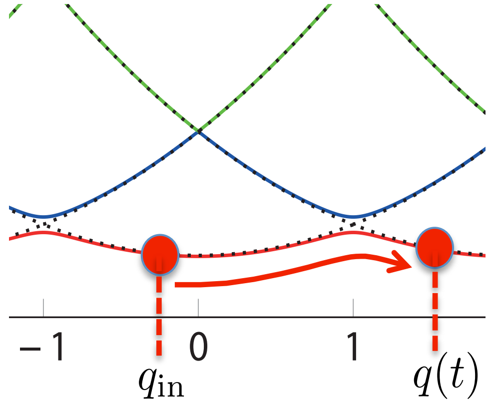
$$e^{-iqa}\psi_{n,q}(x) = \psi_{n,q}(x-a) \quad \longrightarrow \quad \psi(x,t) \propto \psi(x-a,0)$$

Propagation à vitesse $v_{\mathrm{g},n}(q_0)$

L'approche « paquet d'ondes » en présence de la force F

Le défilement du quasi-moment $q(t) = q_{\text{in}} + Ft/\hbar$
entraine une modification de la vitesse de groupe :

$$v_{\text{g}}(q) \to v_{\text{g}}[q(t)]$$



Evolution du centre du paquet d'ondes :

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = v_{\text{g}}(t) = \frac{1}{\hbar}\left.\frac{dE_{n,q}}{dq}\right|_{q=\bar{q}(t)}$$

ce qui s'intègre en : $\bar{x}(t) - \bar{x}(0) = \frac{1}{\hbar}\int_0^t \frac{dE_{n,q}}{dq}\,dt = \frac{1}{F}\int_{q_{\text{in}}}^{q(t)} \frac{dE_{n,q}}{dq}\,dq,$

où encore : $\bar{x}(t) - \bar{x}(0) = \frac{1}{F}\left(E_{n,\bar{q}(t)} - E_{n,q_{\text{in}}}\right)$ *identique à la prédiction de Zener*

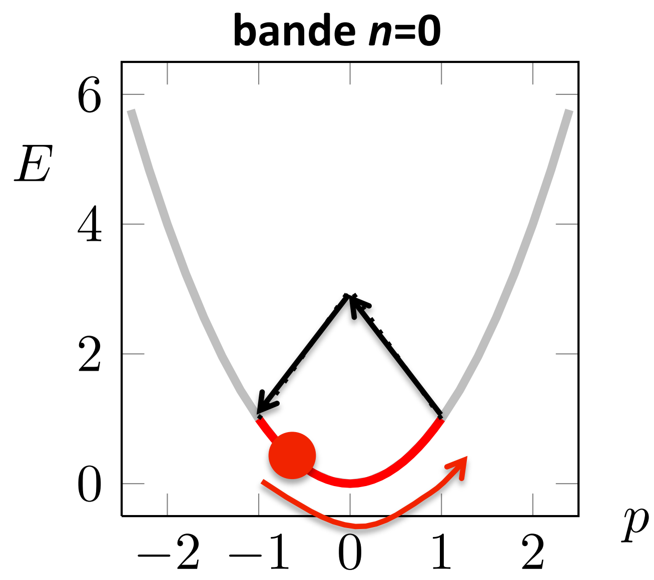
Raisonnement semi-classique qui est valable si $\Delta q_{\text{in}} \ll \pi/a \quad \Delta x_{\text{in}} \gg a$

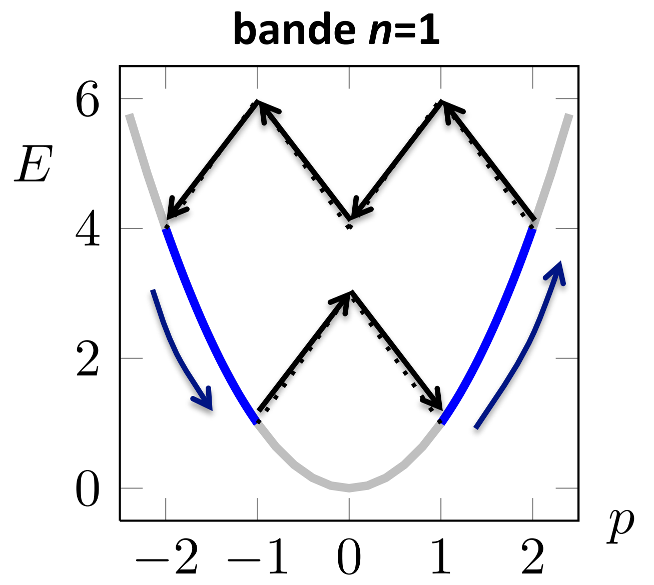
Interprétation en termes de photons

Image perturbative de l'interaction atome-lumière

L'atome est accéléré comme une particule libre selon la loi $\dot{p} = F$

L'effet du réseau se fait sentir quand une transition multi-photonique conservant l'énergie et l'impulsion devient possible





2.

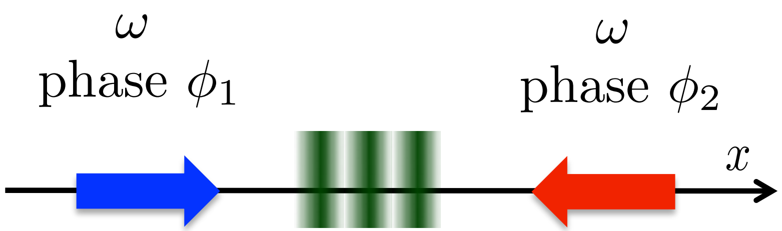
Observations expérimentales avec des atomes froids

Observations initiales avec des électrons dans des super-réseaux
(cf. article de revue par Mendez & Bastard)

Les premières expériences avec des atomes froids

1995-97 : groupes de M. Raizen (Austin, Texas) et C. Salomon (Paris)

Réseau accéléré dans le référentiel du laboratoire :



$\phi_1 = k\gamma t^2/2$ $\qquad$ $\phi_2 = -k\gamma t^2/2$

pulsations instantanées

$$\omega_j = \omega + \frac{d\phi_j}{dt} = \omega \pm k\gamma t$$

$$x_0(t) = \gamma t^2/2$$

Paris, atomes de ^{133}Cs

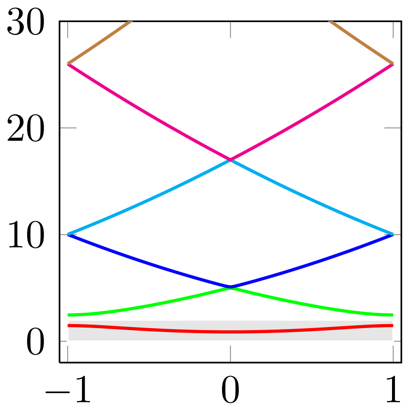
$$\gamma \sim 1 \text{ à } 30 \text{ m/s}^2$$

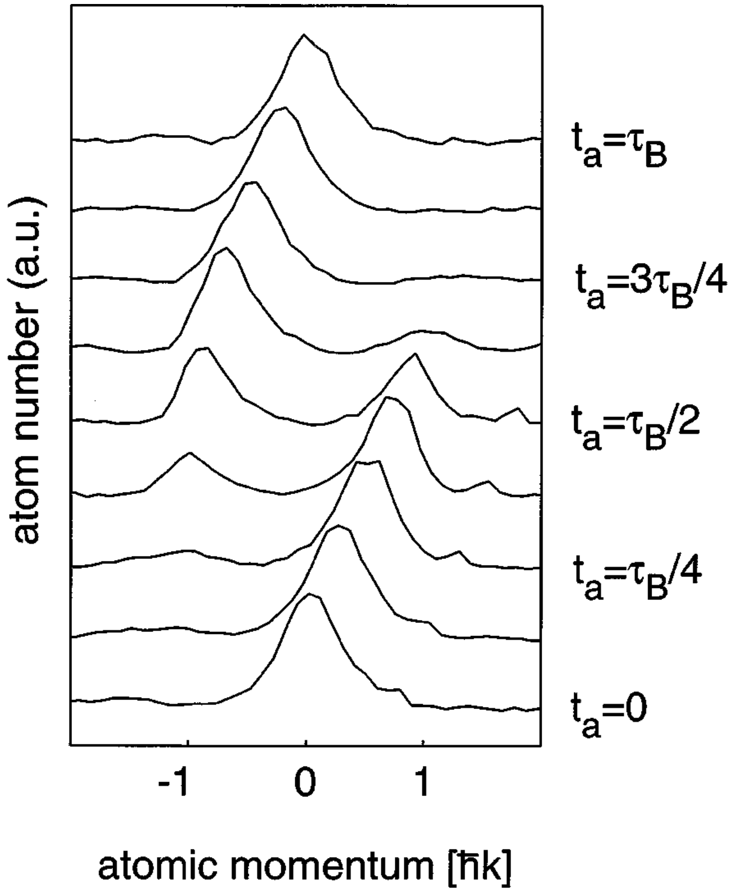
Austin, atomes de ^{23}Na

$$\gamma \sim 1000 \text{ à } 3000 \text{ m/s}^2$$

Expériences de Paris (1995-97, groupe de C. Salomon)

$V_0 = 2E_\mathrm{r}$





Atomes de césium

$$\Delta p_0 \sim \hbar k/4$$

$$a = \lambda/2 = 425 \text{ nm}$$

$$V_0 = 2.3\, E_\mathrm{r}$$

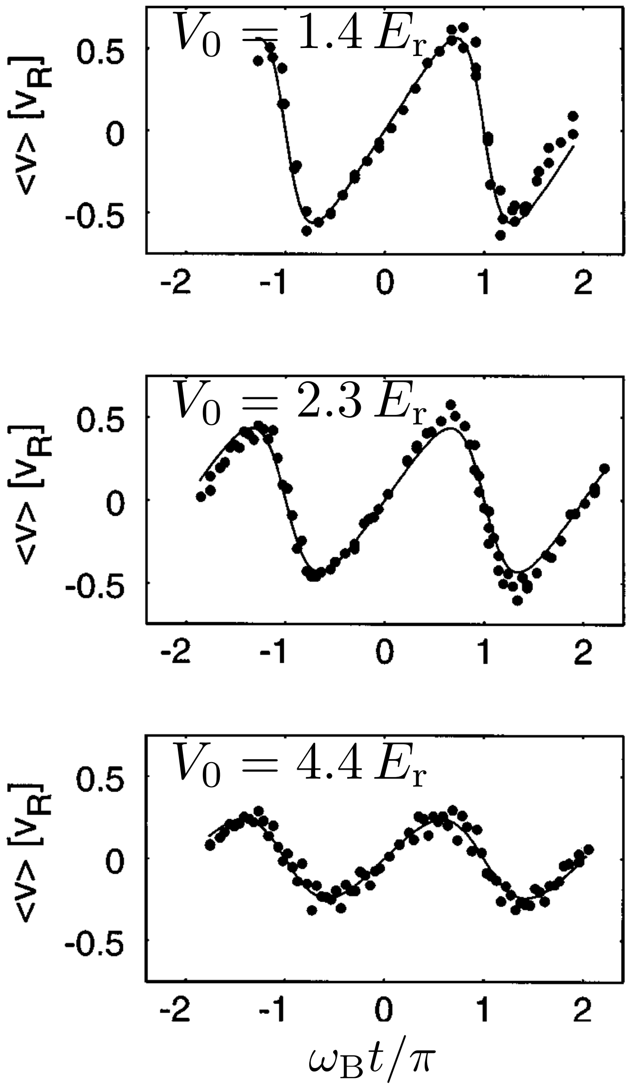
$$\gamma = -0.85 \text{ m/s}^2$$

$$\tau_B = 8.2 \text{ ms}$$

Distribution en impulsion dans le référentiel du réseau, mesurée par temps de vol

Vitesse atomique moyenne (Paris, 1996)

Référentiel du réseau



$$v_{g,n}[q(t)] = \frac{1}{\hbar}\left.\frac{dE_n}{dq}\right|_{q(t)} \qquad q = \frac{Ft}{\hbar}$$

Liaisons faibles : $E_{n=0}(q) \approx \dfrac{\hbar^2 q^2}{2m}$

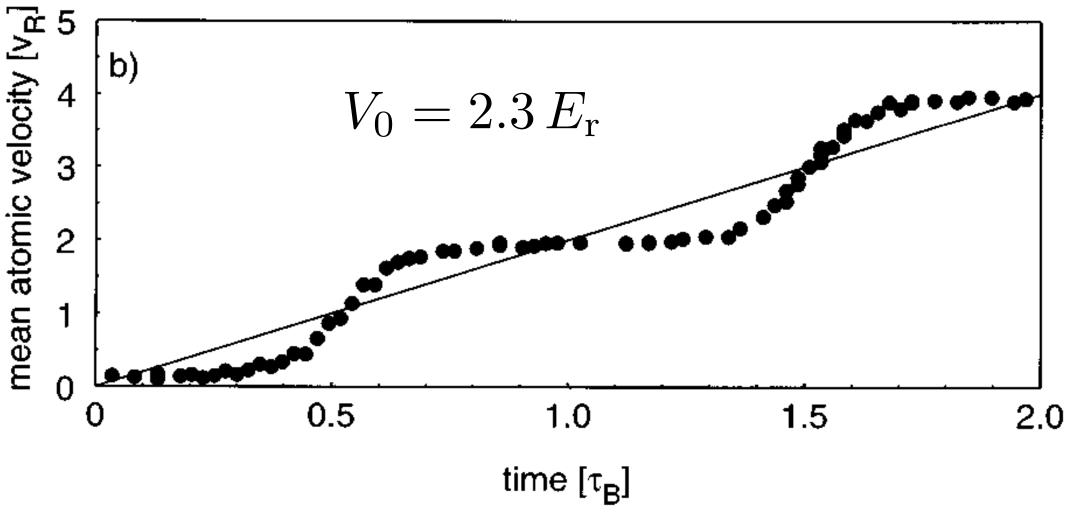
$\Rightarrow \quad v_{g,n=0}[t] \approx$ linéaire en temps

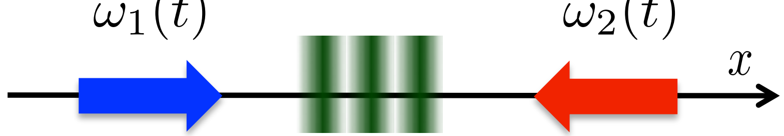
sauf en bord de bande

Liaisons fortes : $E_{n=0}(q) \approx -2J\cos(aq)$

$$\Rightarrow \quad v_{g,n=0}[t] \propto \sin(aFt/\hbar)$$

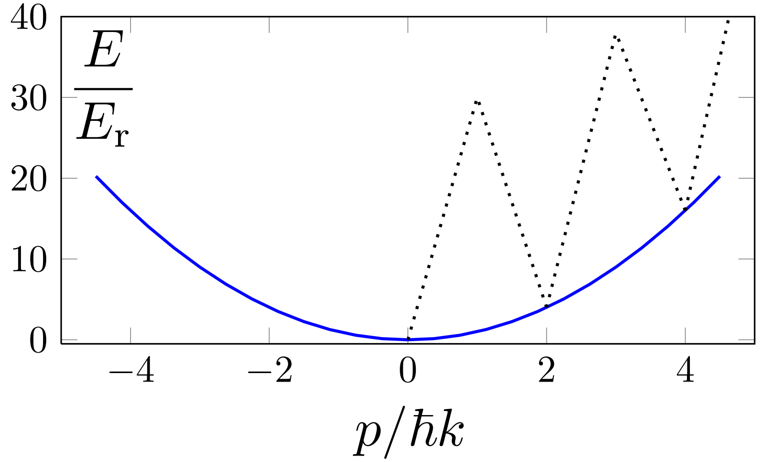
Evolution dans le référentiel du laboratoire





$$\omega_j = \omega + \frac{d\phi_j}{dt} = \omega \pm k\gamma t$$

Image perturbative



Condition de résonance :

$$\hbar[\omega_1(t_j) - \omega_2(t_j)] = [(2j+2)^2 - (2j)^2]E_r$$

$$\Rightarrow \quad t_j = (j + \frac{1}{2})\ \tau_B$$

$$\tau_B = 2\hbar k/m\gamma$$

Un « quizz »

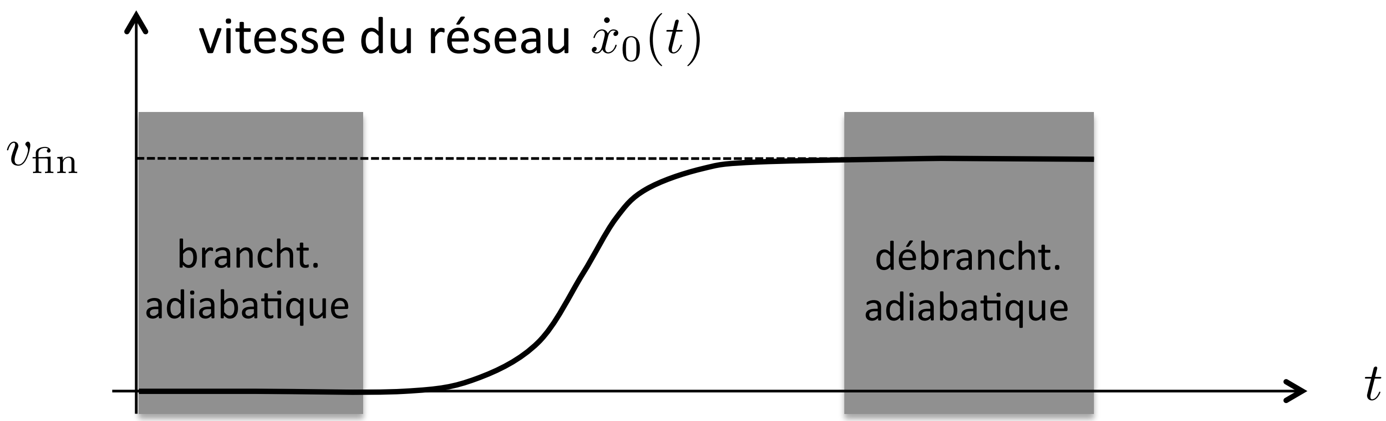
inspiré d'une conférence de W.D. Phillips

Initialement : réseau éteint, atomes à vitesse nulle ou basse : $v \ll \hbar k/m$

On branche adiabatiquement le réseau avec une vitesse nulle

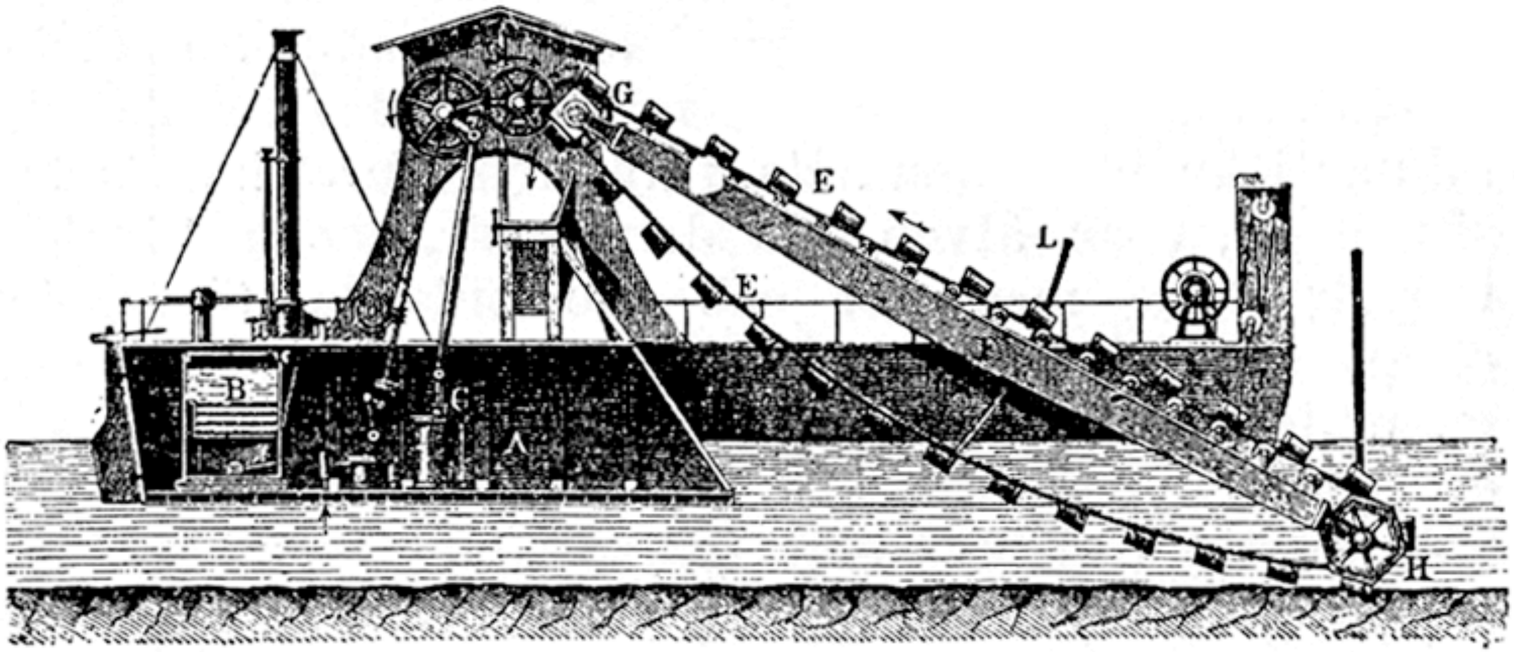
On accélère le réseau jusqu'à une vitesse $v_{\rm fin}$

On éteint adiabatiquement le réseau pendant qu'il bouge à la vitesse $v_{\rm fin}$



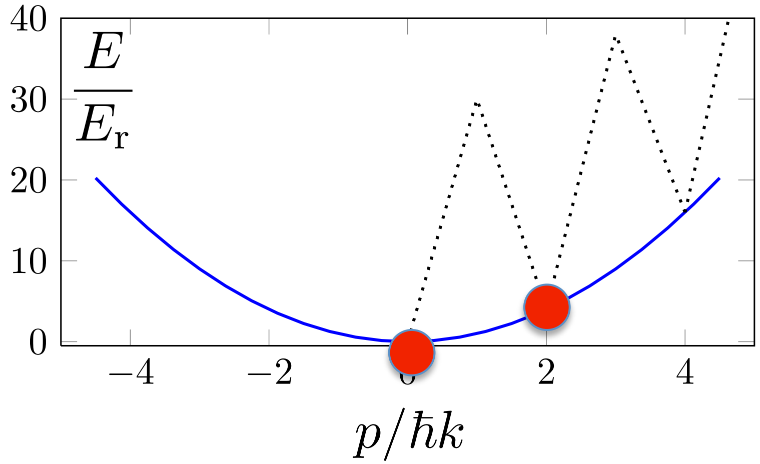
Quelle est la vitesse finale des atomes
mesurée dans le référentiel du laboratoire ?

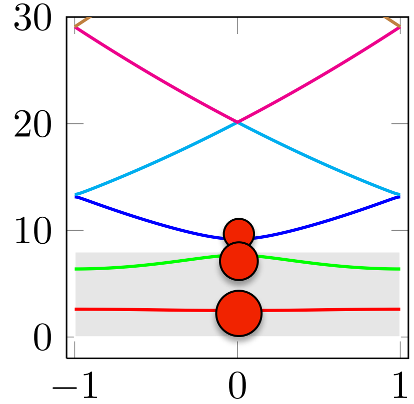
Des atomes dans un réseau optique en mouvement
ne sont pas comme de l’eau dans un élévateur à godets...



Bilan d'impulsion pour un réseau accéléré

Dans le référentiel du laboratoire : $p_{\text{fin}}^{\text{labo}} = p_{\text{ini}}^{\text{labo}} + 2N\hbar k$



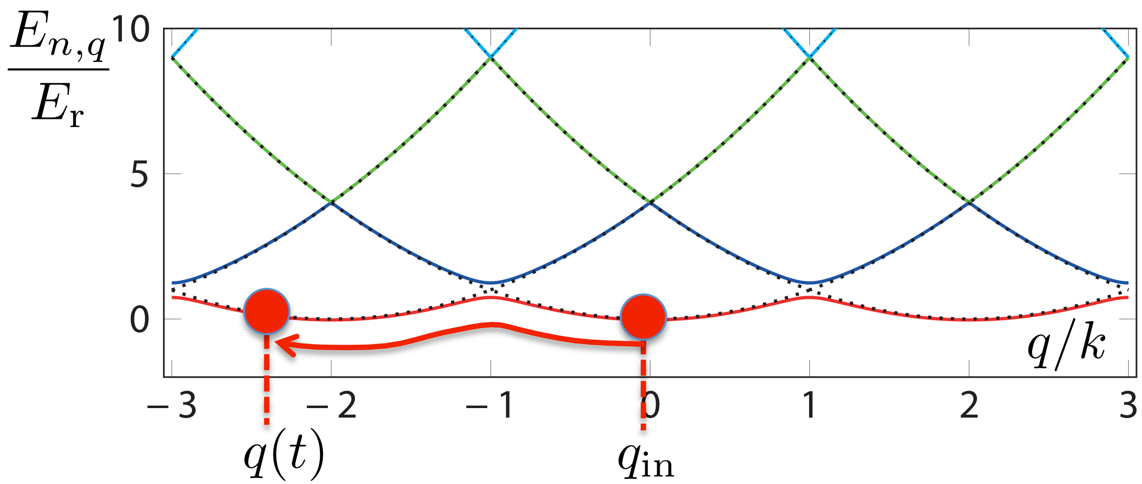


Dans le référentiel du réseau :

$$F(t) = -m\ddot{x}_0(t)$$

$$q(t) = q_{\text{in}} + \frac{1}{\hbar}\int_0^t F(t')\,dt'$$

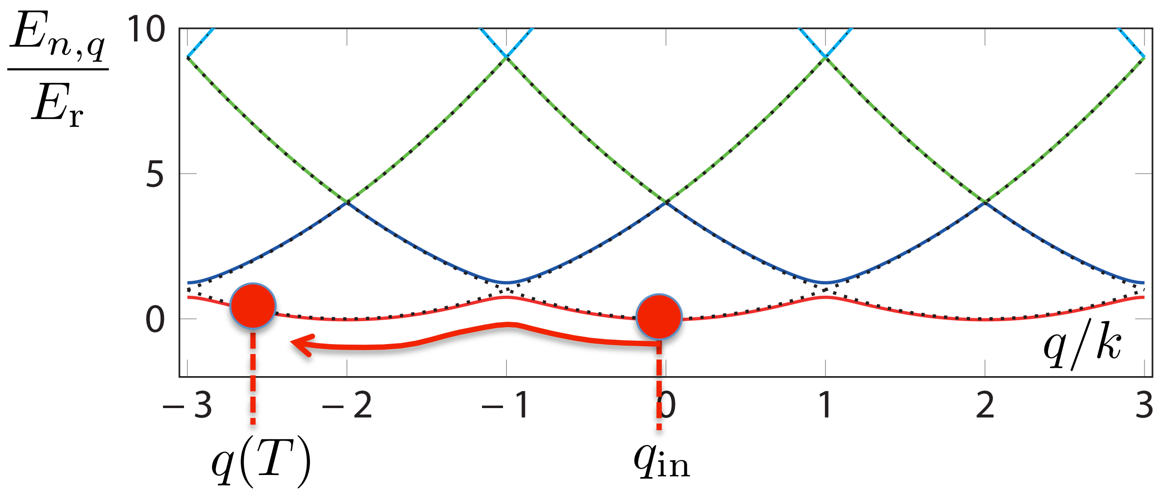
$$= q_{\text{in}} - \frac{m}{\hbar}\dot{x}_0(t)$$



Bilan d'impulsion (suite)

Référentiel du réseau :

$$q(T) = q_{\rm in} - \frac{m}{\hbar}\dot{x}_0(T)$$



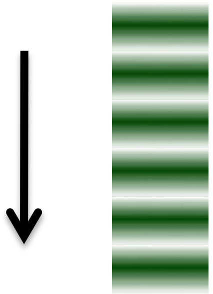
Une mesure d'impulsion va donner : $p_{\rm fin}^{\rm (reseau)} = \hbar q(T) + 2N\hbar k \qquad \in [-\hbar k, \hbar k]$

ce qui correspond dans le laboratoire à :

$$\begin{aligned} p_{\rm fin}^{\rm (labo)} &= p_{\rm fin}^{\rm (reseau)} + mv^{\rm (reseau)}(T) \\ &= p_{\rm fin}^{\rm (reseau)} + m\dot{x}_0(T) \\ &= \hbar q(T) + 2N\hbar k + m\dot{x}_0(T) \\ &= p_{\rm in} + 2N\hbar k \end{aligned}$$

Oscillations de Bloch dues à la gravité

mg



Stanford 1998, Florence 2004,...

$\hat{H}_1$ est maintenant l'hamiltonien dans le référentiel du laboratoire

$$\hbar\omega_B = amg$$

Florence 2011, Groupe de G. Tino : ^{88}Sr

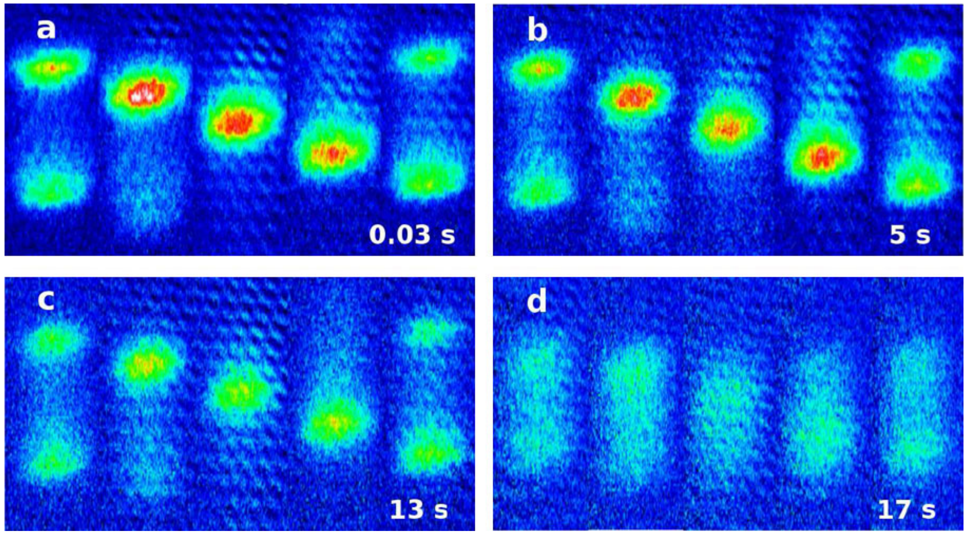
$$a = 266 \text{ nm} \qquad \omega_B/2\pi = 574 \text{ Hz} \qquad V_0 \approx 2 \text{ à } 3\ E_{\mathrm{r}}$$

1ère oscillation

oscillation n° 2900

oscillation n° 7500

oscillation n° 9800



distributions après temps de vol

g à 6 x10^{-6} près

3.

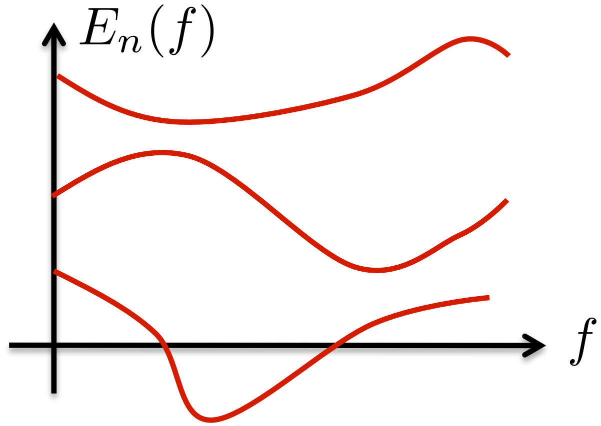
L’approximation adiabatique et au delà

Validité de l'approximation adiabatique

Déjà abordée au cours 2 :
Hamiltonien dépendant d'un paramètre f

Etats propres $|\phi_n(f)\rangle$

Energies $E_n(f)$

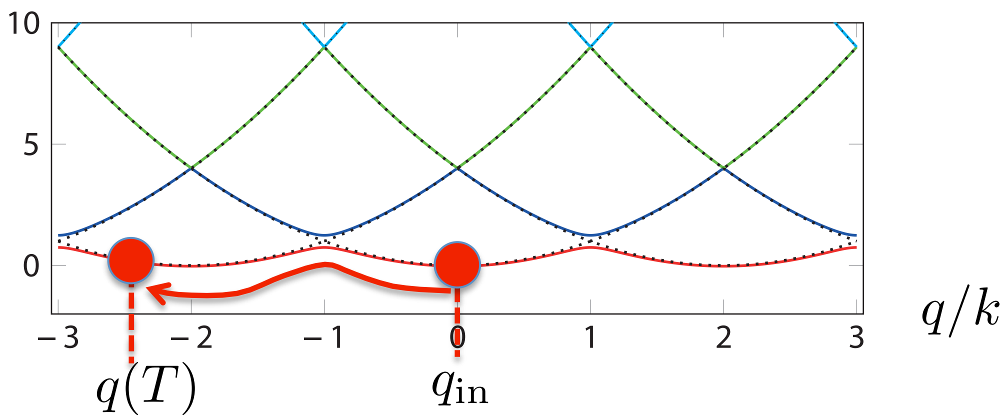


On suppose que f dépend du temps.

A l'instant initial, le système est dans un état propre particulier $|\phi_n[f(0)]\rangle$

Le système suit cet état propre si : $\hbar \left| \langle \phi_{n'} | \frac{d}{dt} | \phi_n \rangle \right| \ll |E_{n'} - E_n|\,, \quad \forall n' \neq n,$

Ici, le quasi-moment q joue le rôle du paramètre f



Le critère d'adiabaticité

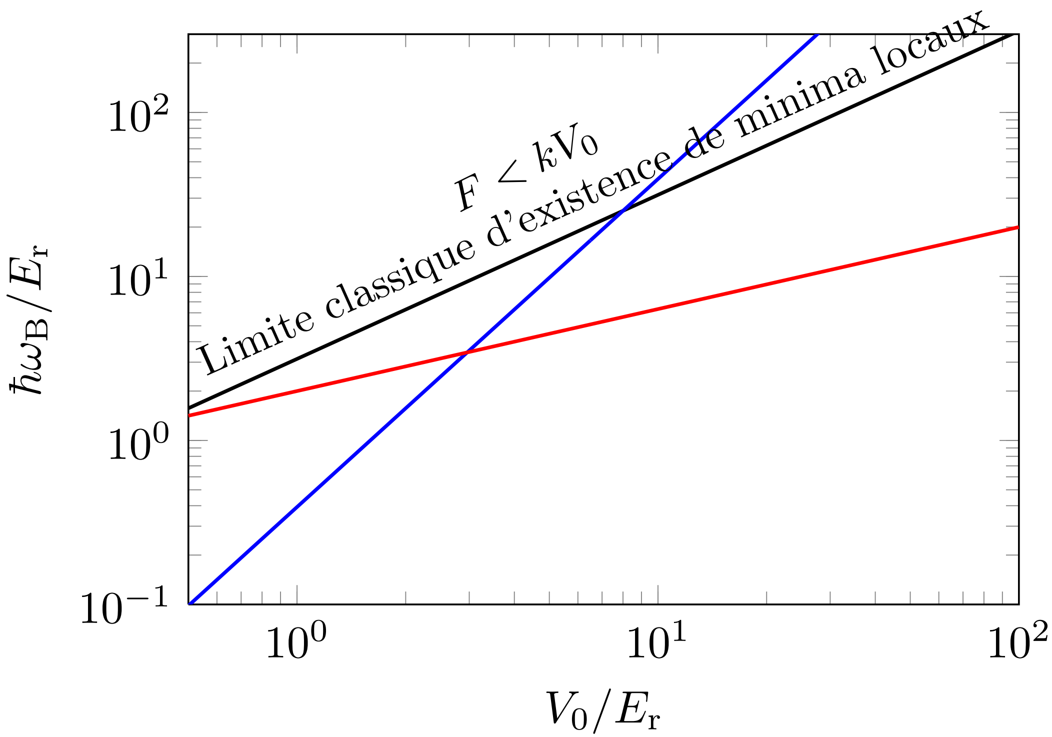
On remplace le paramétrage en temps par un paramétrage en quasi-moment :

$$\dot{q} = F \qquad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} = F\frac{d}{dq}$$

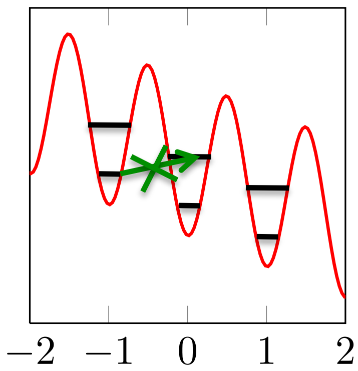
$$F\,|\langle u_{n',q}|\partial_q u_{n,q}\rangle| \ll |E_{n'}(q) - E_n(q)|$$

Liaisons faibles : $F \ll \dfrac{V_0^2}{8E_\mathrm{r}}k$

$$\frac{\hbar\omega_\mathrm{B}}{E_\mathrm{r}} \ll \frac{\pi}{8}\left(\frac{V_0}{E_\mathrm{r}}\right)^2$$



Liaisons fortes :

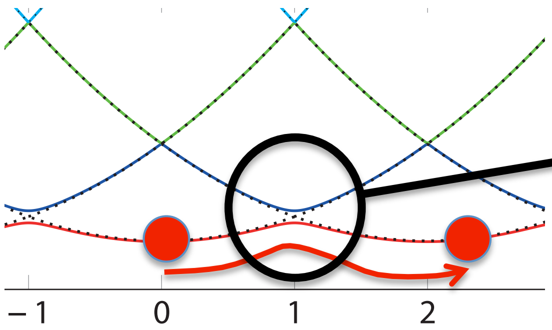


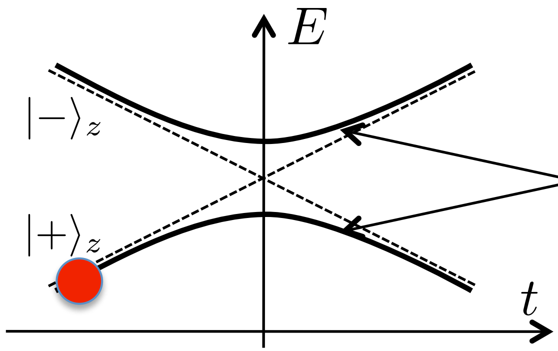
$$aF < \hbar\omega_\mathrm{osc}$$

$$\frac{\hbar\omega_\mathrm{B}}{E_\mathrm{r}} < 2\left(\frac{V_0}{E_\mathrm{r}}\right)^{1/2}$$

Transition de Landau-Zener

Liaisons faibles : modèle de croisement évités entre deux niveaux (Zener 1932)



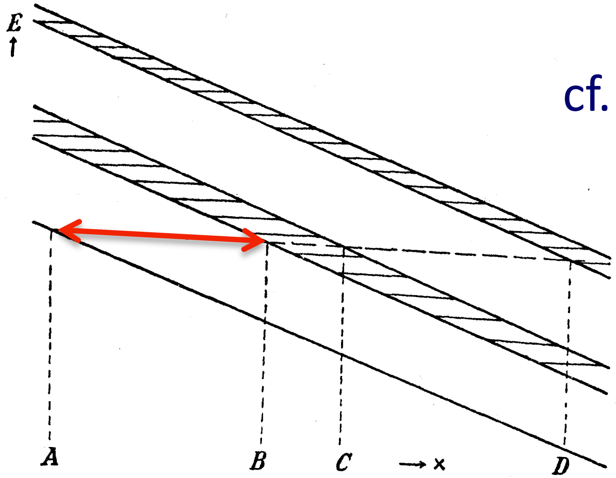


$$\hat{H}(t) = \alpha t\,\hat{\sigma}_z + \beta\hat{\sigma}_x$$

$$E_\pm(t) = \pm\sqrt{\alpha^2 t^2 + \beta^2}$$

Probabilité de suivi adiabatique : $\mathcal{P} = 1 - e^{-\pi\beta^2/(\hbar\alpha)}$

qui devient pour notre problème : $\mathcal{P} = 1 - e^{-F_\mathrm{c}/F}$ $\qquad F_\mathrm{c} = \frac{\pi}{32}\frac{V_0^2}{E_\mathrm{r}}k$



cf. modèle de Gamow pour la radioactivité (1931)

L'électron « tente sa chance » τ_B fois par seconde ;
probabilité d'être encore dans la bande de départ :

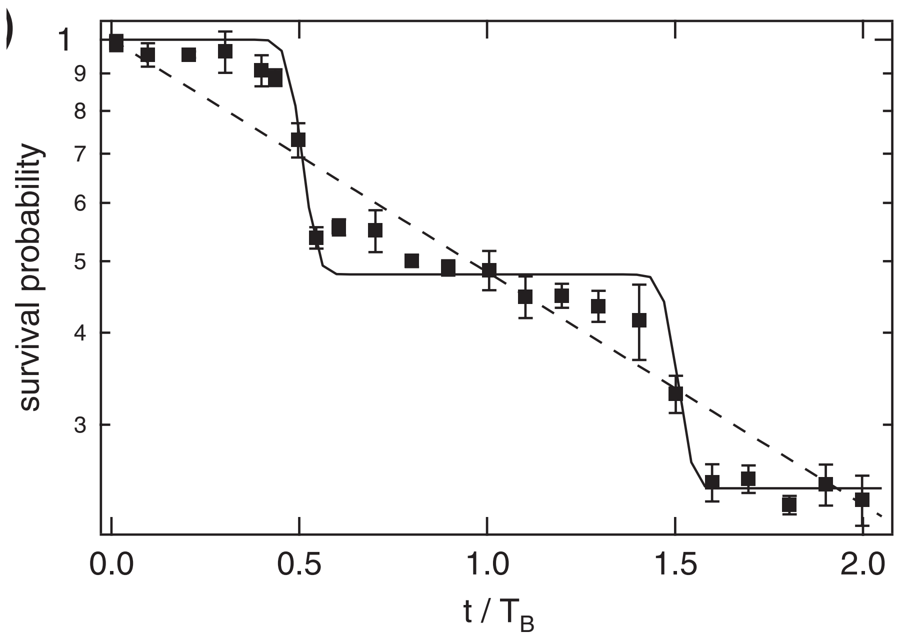
$$\Pi(t) \approx \mathcal{P}^j = \exp\left[j\ln\left(1 - e^{-F_\mathrm{c}/F}\right)\right] \approx \exp(-t/\tau)$$

$$j = t/\tau_\mathrm{B} \qquad\qquad \tau = \tau_\mathrm{B}\; e^{F_\mathrm{c}/F}$$

Mise en évidence expérimentale des transitions de Landau-Zener

Paris, Austin 1997

Pise 2009



Probabilité de survie d'atomes de rubidium dans la bande $n = 0$ d'un réseau accéléré de période $a = 421\,\mathrm{nm}$

$$V_0 = E_\mathrm{r}$$
$$\hbar\omega_\mathrm{B} = 0.4\,E_\mathrm{r}$$

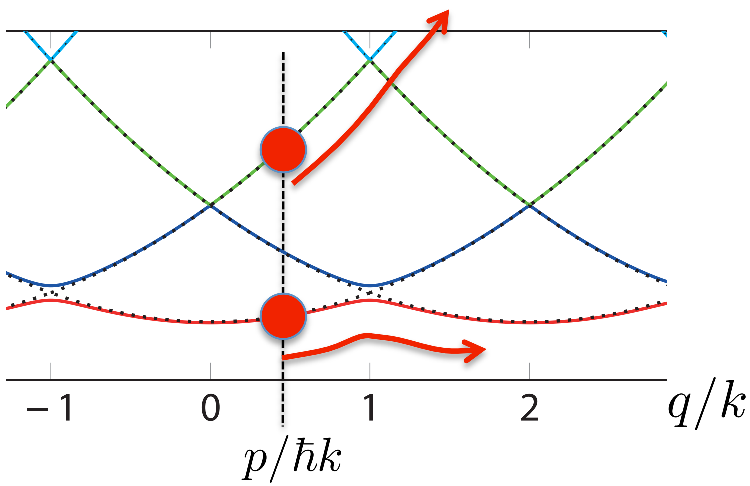
Un séparateur de faisceau à base d'oscillations de Bloch

NIST 2002, ENS 2009, Stanford 2009

Point de départ : atomes d'impulsion $p \leq \hbar k$

Transition de Bragg : superposition de p et $p + 2\hbar k$

On branche adiabatiquement un réseau immobile



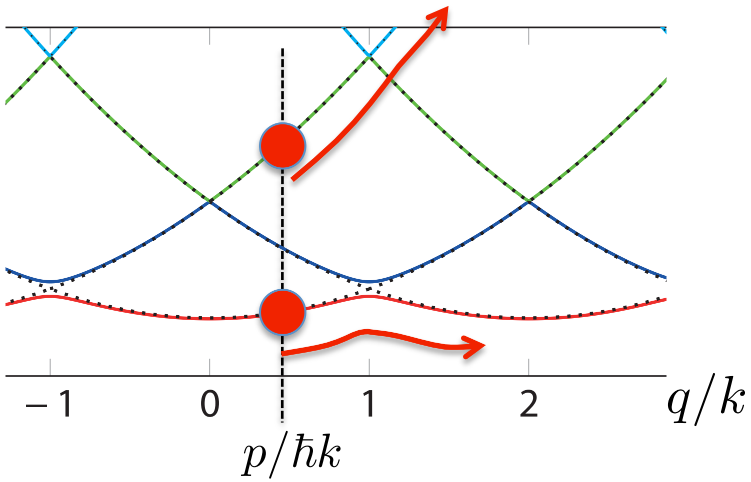
On accélère le réseau et on cherche à avoir

- un suivi adiabatique pour la bande $n = 0$: l'atome acquiert une impulsion $2N\,\hbar k$ dans le référentiel du laboratoire

- une absence de suivi adiabatique pour la bande $n = 2$: l'atome « ne voit pas » le réseau et reste avec son impulsion initiale dans le référentiel du laboratoire

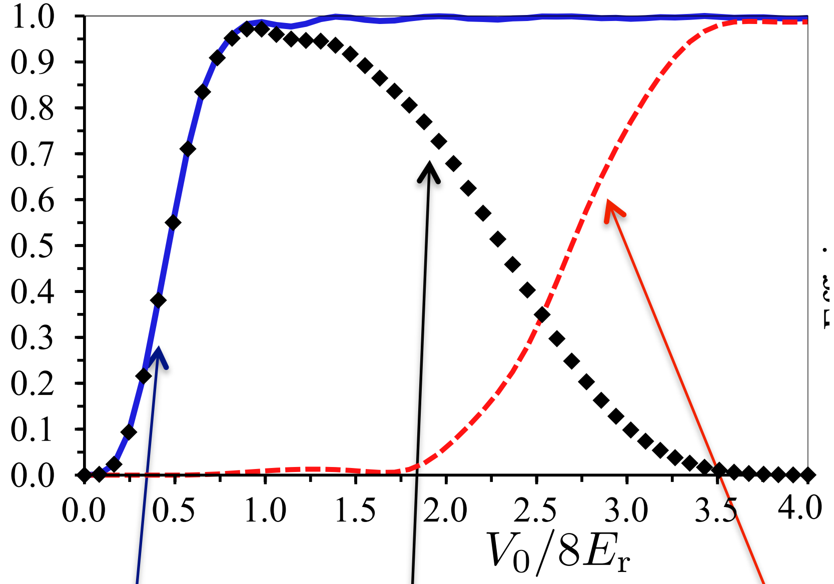
$$|\Psi\rangle = \alpha|p + 2N\hbar k\rangle + \beta|p + 2\hbar k\rangle$$

Séparateur de faisceaux (suite)



$$|\Psi\rangle = \alpha|p + 2N\hbar k\rangle + \beta|p + 2\hbar k\rangle$$

Cladé et al. 2009, Rb $\gamma \approx 100\,\mathrm{m/s}^2$



probabilité de suivi adiabatique pour n=0

$\mathcal{P}_0(1 - \mathcal{P}_2)$

probabilité de suivi adiabatique pour n=2

NIST 2002: jusqu'à 12 $\hbar k$ d'écart entre les deux bras + interféromètre Mach-Zender

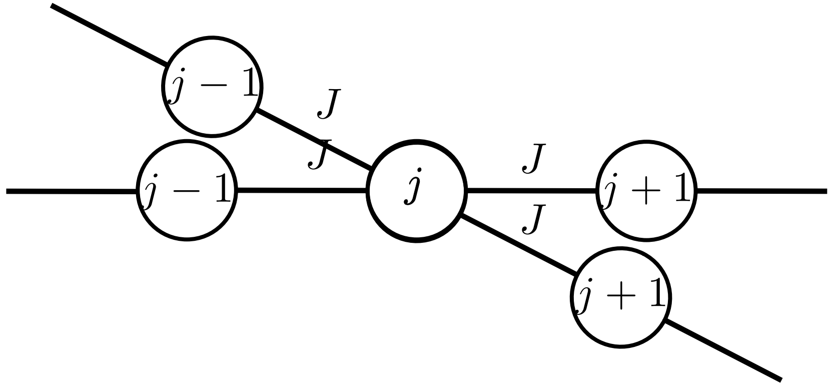
Difficultés liées au fait que les déplacements lumineux ne sont pas les même dans les deux bras

4.

Les oscillations de Bloch dans la limite des liaisons fortes

La fonction d'onde oscillante

Hamiltonien en liaisons fortes (de type $\hat{H}_1$) :



$$\hat{H} = -J\left(\hat{T} + \hat{T}^\dagger\right) - Fa\sum_j j\,|w_j\rangle\langle w_j|$$

$$\hat{T} = \sum_j |w_{j+1}\rangle\langle w_j|$$

Si F=0, fonctions de Bloch : $|\psi_q\rangle = \sum_j e^{i\,jaq}\,|w_j\rangle$ $\qquad E(q) = -2J\cos(aq)$

Si F≠0, la forme de Bloch est préservée avec $q(t) = q_{\text{in}} + Ft/\hbar$

On cherche une solution sous la forme : $|\psi(t)\rangle = e^{-i\Phi(t)}\sum_j e^{i\,ja\,q(t)}|w_j\rangle$

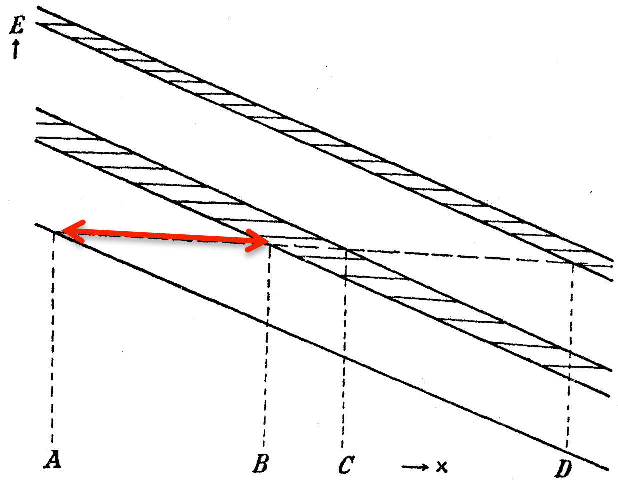
cf. cours n°4 : $\Phi(t) = \Phi(0) + \dfrac{1}{\hbar}\displaystyle\int_0^t E[q(t')]\,dt'$

La fonction d'onde oscillante (suite)

Phase globale d'une fonction de Bloch : $|\psi(t)\rangle = e^{-i\Phi(t)} \sum_j e^{i\,j a\,q(t)} |w_j\rangle$

$$E(q) = -2J\cos(aq)$$

$$\Phi(t) = \Phi(0) + \frac{1}{\hbar}\int_0^t E[q(t')]\,dt'$$
$$= \frac{\nu}{2}\left\{\sin\left[aq(t)\right] - \sin[aq_{\mathrm{in}}]\right\}$$



$\nu = \dfrac{4J}{aF}$: nombre de sites entre les points A et B

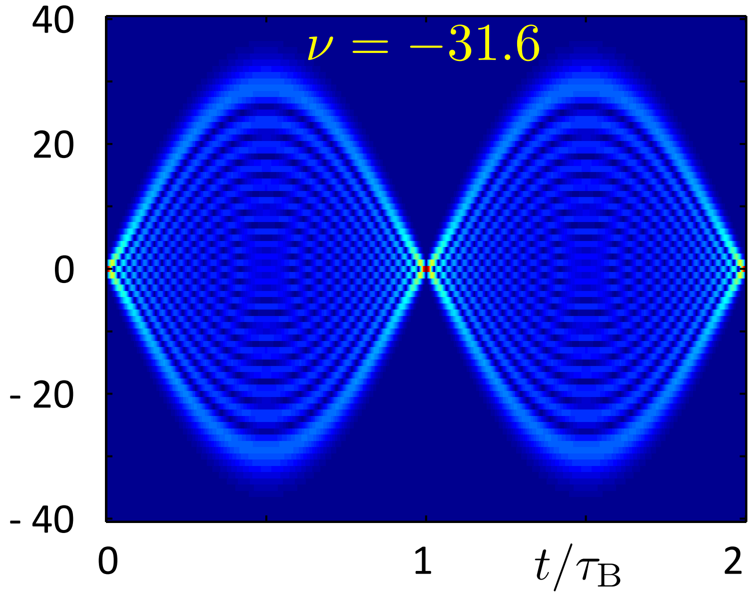
Connaissant l'évolution de chaque fonction de Bloch, on peut alors déterminer l'opérateur d'évolution $\hat{U}(t)$

base des ondes de Bloch : $\langle \psi_{q'} | \hat{U}(t) | \psi_q \rangle \propto \delta(q' - q - Ft/\hbar)$

base des fonctions de Wannier : $\langle w_{j'} | \hat{U}(t) | w_j \rangle \propto \mathcal{J}_{j'-j}[\nu \sin(\omega_{\mathrm{B}} t/2)]$

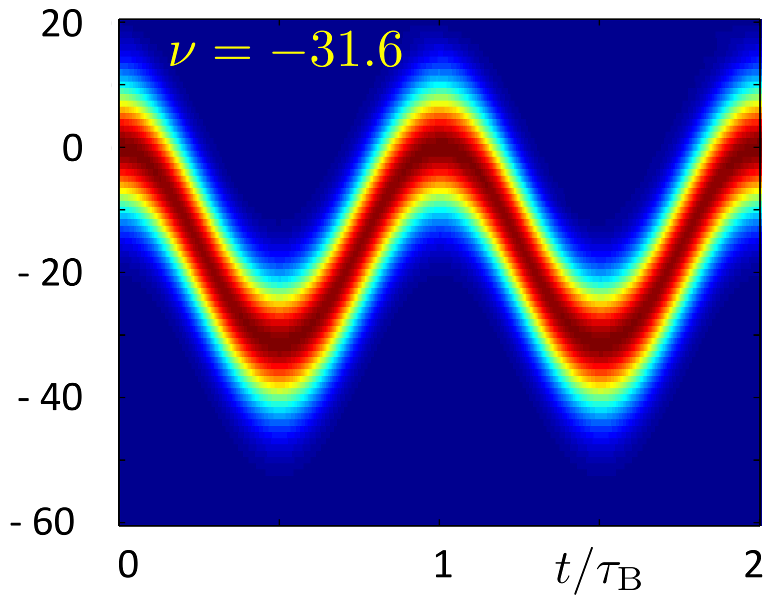
Exemples d'évolution en modèle de liaisons fortes

Hartmann et al, 2004 $$\nu = \frac{4J}{aF} = \frac{\Delta E}{\hbar\omega_{\rm B}}$$



Point de départ :
paquet localisé sur un site donné (j=0)

$$\langle w_j|\hat{U}(t)|w_0\rangle \propto \mathcal{J}_j[\nu\sin(\omega_{\rm B}t/2)]$$



Point de départ :
paquet d'ondes étendu : $\sigma = 5$ sites
vitesse initiale nulle

A suivre :

- Les échelle de Wannier Stark
- Perspectives et applications