

La matière topologique et son exploration avec les gaz quantiques

Jean Dalibard

Chaire *Atomes et rayonnement*

Année 2017-18



COLLÈGE
DE FRANCE
— 1530 —

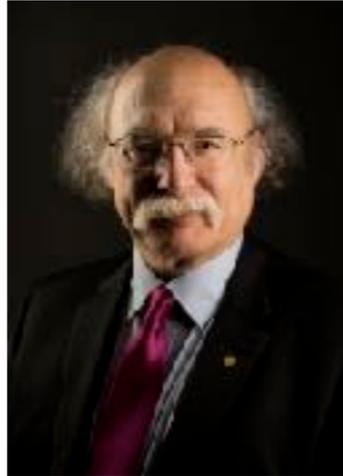
Physique et topologie



J.M. Kosterlitz



D.J. Thouless



F.D. Haldane

Prix Nobel de physique 2016

pour « les découvertes théoriques des transitions de phase topologiques et des phases topologiques de la matière »

Cours 2016-17 : transition de Kosterlitz-Thouless

Cours de cette année : phases topologiques de la matière

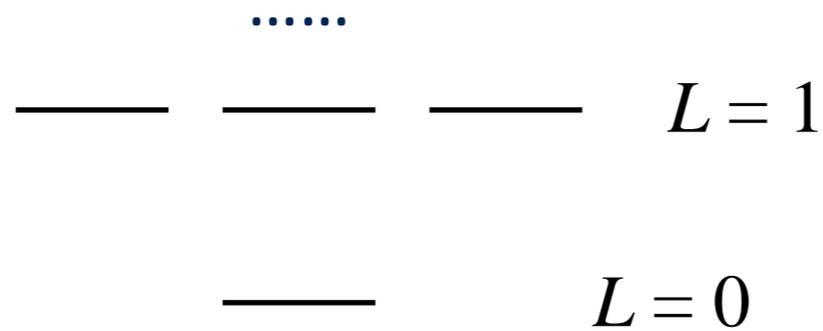
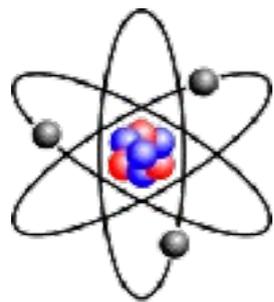
Une classification radicalement différente de celle fondée sur l'ordre géométrique

Géométrie ou topologie ?

L'ordre géométrique : apparaît pour des systèmes possédant une certaine symétrie

Exemple : système invariant par rotation

→ On peut classer ses états d'énergie en fonction de leur moment cinétique



*non robuste :
ordre brisé par
une perturbation*

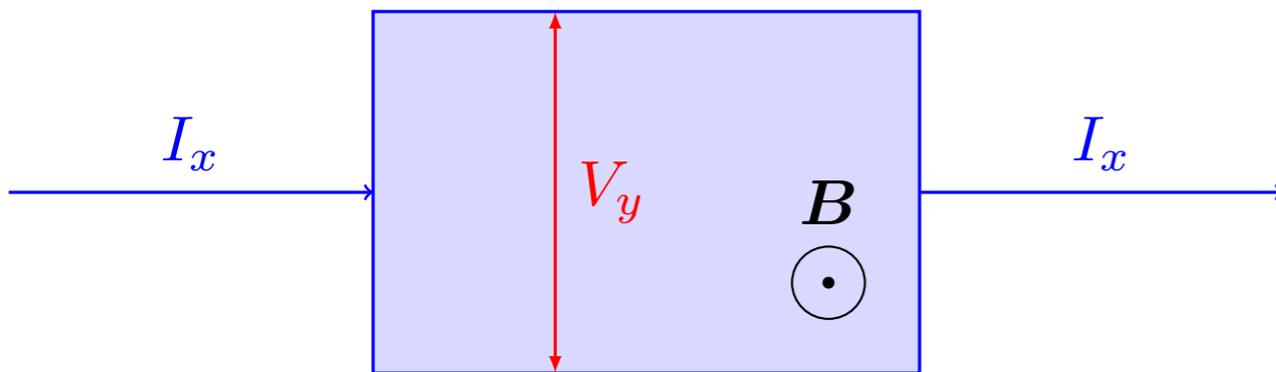
L'ordre topologique : défini par des classes d'objets stables quand on les « déforme »



Par essence, classification robuste

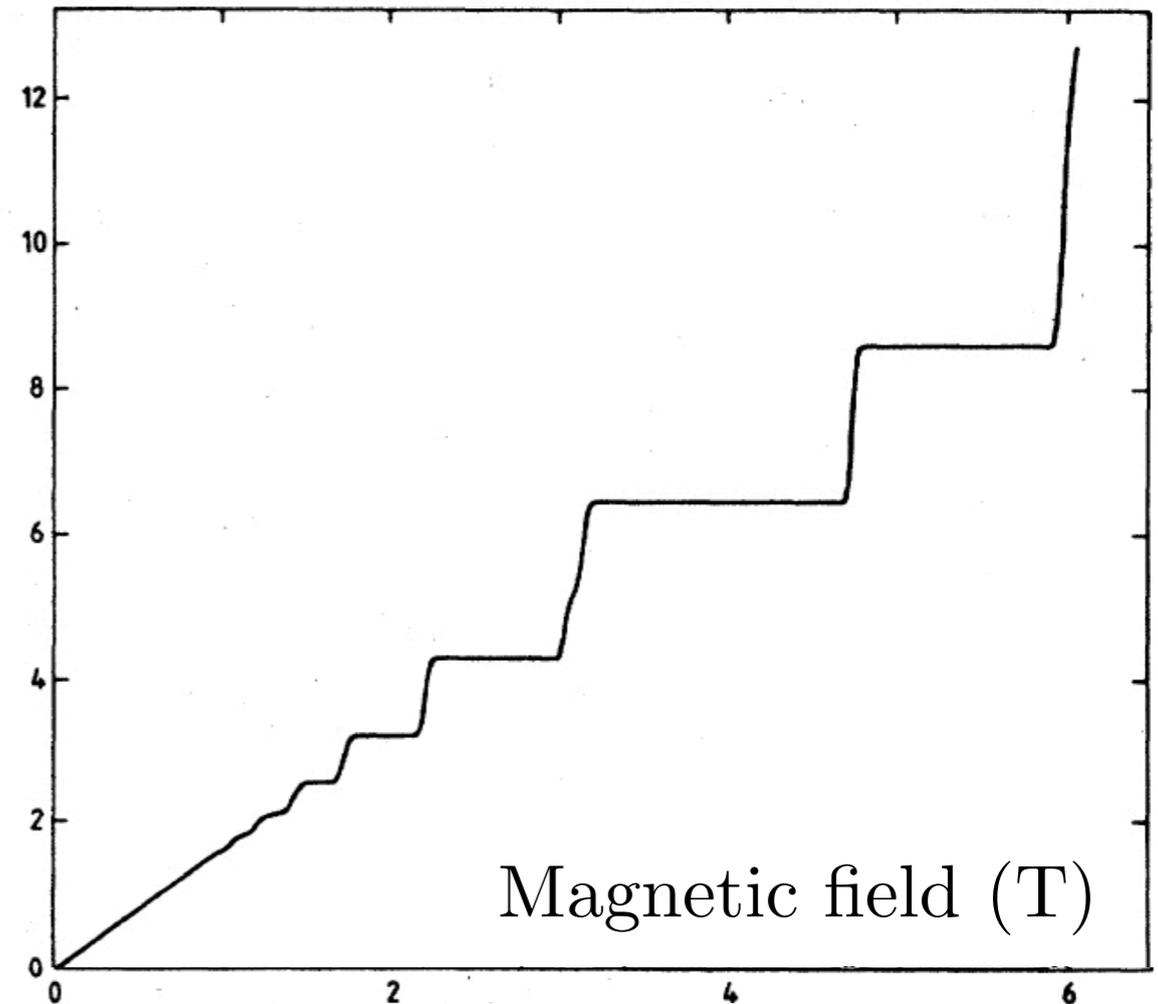
Un exemple historique en physique

Effet Hall quantique entier



Les plateaux correspondent à une quantification de la résistivité de Hall ρ_{xy}

ρ_{xy} (k Ω)



Robuste : les plateaux subsistent (à la même valeur !) en présence de désordre

Grand intérêt métrologique

Lien entre topologie et physique



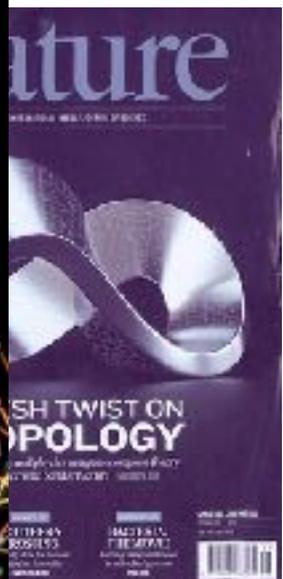
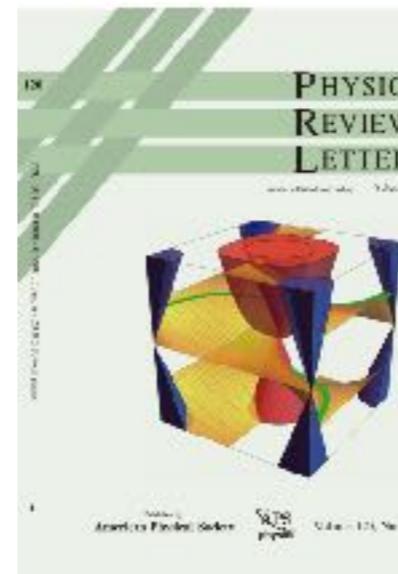
George Gamow, dans *The Great Physicists, from Galileo to Einstein*, 1961

When Einstein wanted to interpret gravity as the curvature of four-dimensional, space-time continuum, he found waiting for him Riemann's theory of curved multidimensional space.

When Heisenberg looked for some unusual kind of mathematics to describe the motion of electrons inside of an atom, noncommutative algebra was ready for him.

Only the number theory and topology (analysis situs) still remain purely mathematical disciplines without any application to physics. Could it be that they will be called to help in our further understanding of the riddles of nature?

2016 : 10 nouveaux manuscrits
chaque jour sur la base de données
arXiv-Physics avec le mot « topology »
dans son titre ou son résumé

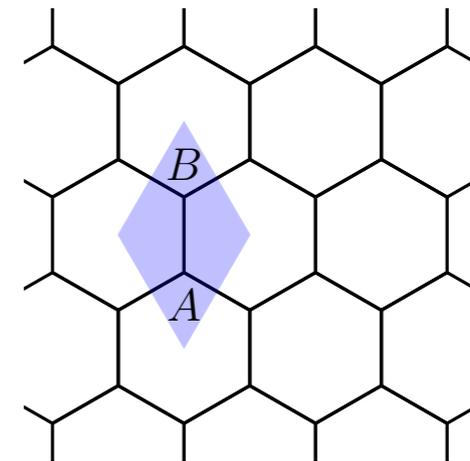
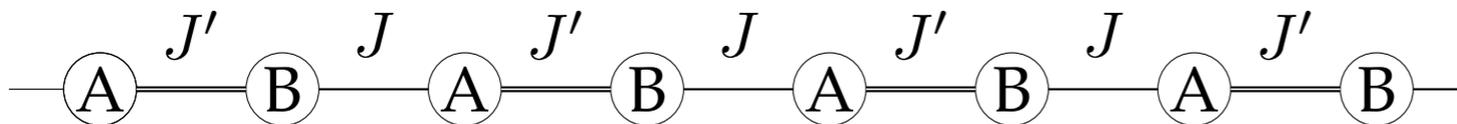


Objectif du cours de cette année

Introduction aux phases topologiques de la matière,
du point de vue des gaz d'atomes ou de photons

Systemes simples :

- Une ou deux dimensions
- Systemes periodiques



Réseaux optiques, arrangement régulier de guides d'onde

- Pas d'interaction entre particules, sauf lors d'une brève incursion du côté des supraconducteurs (modes de Majorana)

Souligner le rôle crucial des états de bords et des nombres topologiques

Documents en ligne

Notes de cours et copies des diapositives :

http://www.phys.ens.fr/~dalibard/2018_CdF.html

Deux articles de revue récents :

Ozawa, Price, Amo, et al., *Topological Photonics*, arXiv :1802.04173

Cooper, Dalibard, Spielman, *Topological Bands for Ultracold Atoms*, arXiv:1803.00249

Pour recevoir les annonces liées au cours, envoyer un courrier électronique à :

listes-diffusion.cdf@college-de-france.fr

avec pour sujet : subscribe chaire-ar.ipcdf

Séminaires

Mercredi 2 mai : *La dynamique de la photo-ionisation à l'échelle de l'attoseconde*
Anne L'Huillier, Université de Lund, Suède

Mercredi 9 mai : *Building quantum systems from scratch*
Tilman Esslinger, ETH Zurich, Suisse

Mercredi 16 mai : *Entanglement creation and characterization in a trapped-ion quantum simulator*
Christian Roos, IQOQI, Innsbruck, Académie des Sciences d'Autriche

Mercredi 23 mai : *Des composants pour générer et manipuler les photons un par un*
Pascale Senellart-Mardon, Centre pour les Nanosciences et les Nanotechnologies, CNRS, Marcoussis

Mercredi 30 mai : *La mission spatiale MICROSCOPE pour le test du principe d'équivalence*
Gilles Métris, Observatoire de la Côte d'Azur, Valbonne

Mercredi 6 juin: *Sonder les milieux opaques avec la lumière : de l'imagerie aux études fondamentales*
Sylvain Gigan, Laboratoire Kastler Brossel, Paris

Cours 1

De la phase de Berry à la topologie d'une bande d'énergie

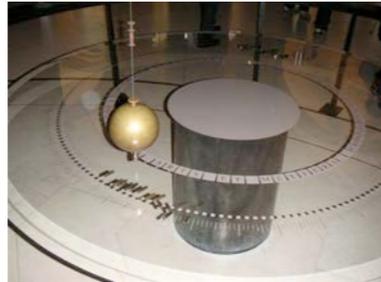


COLLÈGE
DE FRANCE
— 1530 —

But de cette première séance

Mise en place des notions et des outils centraux pour l'ensemble du cours

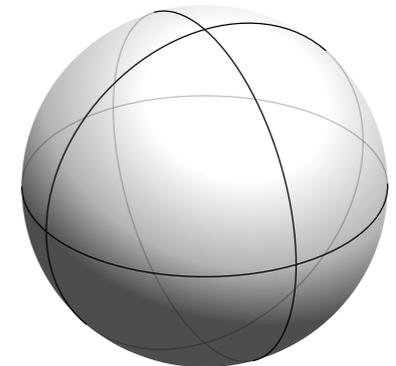
- Phase géométrique ou *phase de Berry*



Evolution adiabatique d'un système contrôlée par un paramètre externe

- L'exemple du système à deux niveaux : pseudo-spin 1/2

Sphère de Bloch



- Particule dans un potentiel périodique : bandes d'énergie

Un premier pas vers la topologie : le modèle SSH

Evolution adiabatique en physique quantique

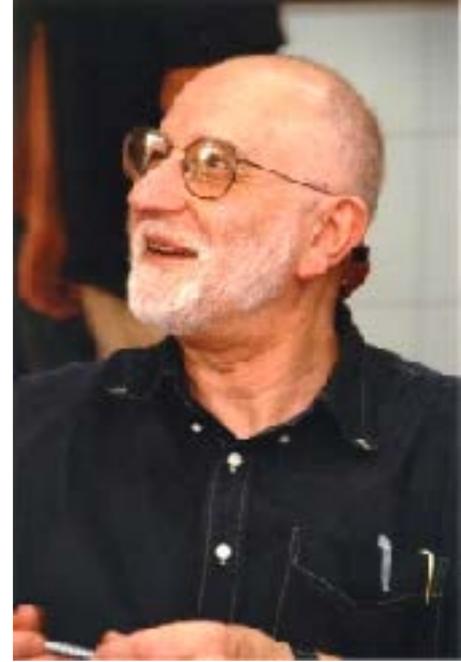
Système quantique (atome, molécule, corps macroscopique)
dépendant d'un paramètre extérieur $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$

Evolution décrite par l'hamiltonien \hat{H}_λ :

$$i\hbar \frac{d|\psi(t)\rangle}{dt} = \hat{H}_{\lambda(t)} |\psi(t)\rangle$$

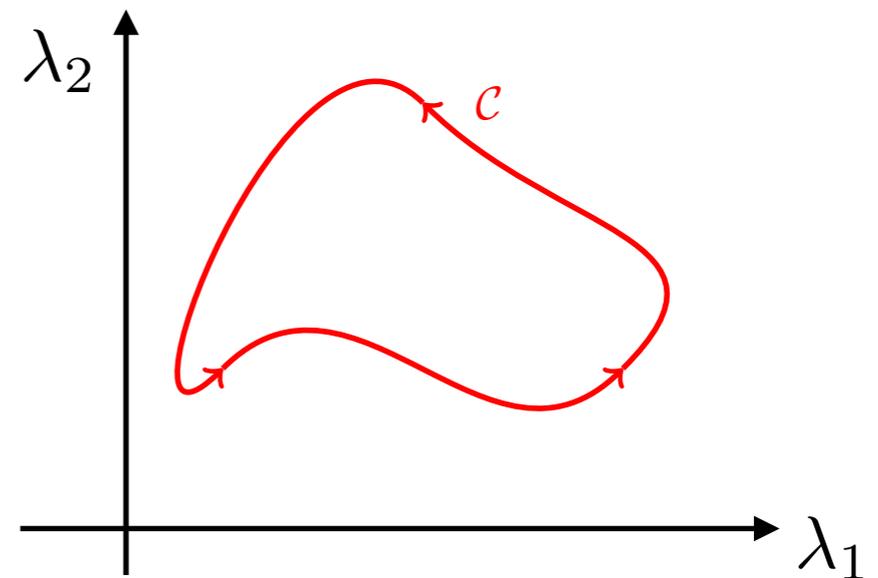
Que se passe-t-il quand :

- Le paramètre λ dépend lentement du temps ?
et
- Le paramètre λ décrit une trajectoire fermée ?

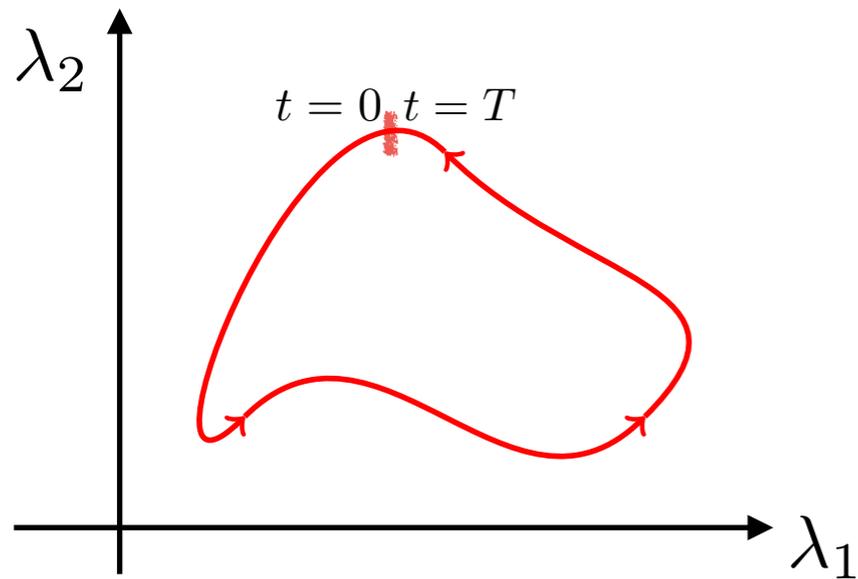


Berry 1984

Pancharatnam (1956)
Mead & Truhlar (1979)



Phase dynamique et phase géométrique



Supposons que le système est préparé initialement dans un état propre de l'hamiltonien

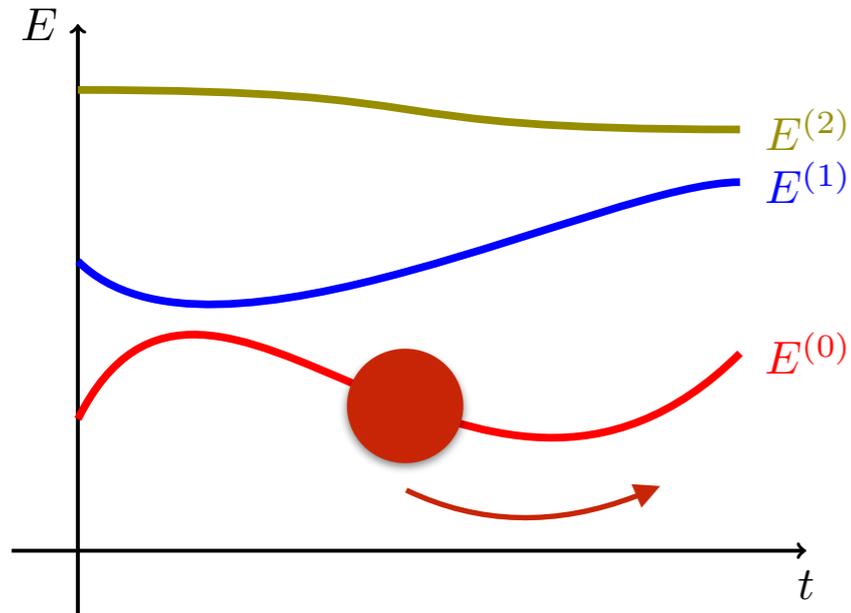
Alors, si l'évolution de λ est suffisamment lente, l'état final s'écrit (en absence de dégénérescences) :

$$|\psi(T)\rangle \approx e^{i\Phi} |\psi(0)\rangle$$

L'état initial et l'état final coïncident, à une phase près

$$\Phi = \Phi_{\text{dyn}} + \Phi_{\text{geom}} \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi_{\text{dyn}} \propto \int E(t) dt \quad \text{phase dynamique usuelle} \\ \Phi_{\text{geom}} = ? \end{array} \right.$$

Phase géométrique et connexion de Berry



A chaque instant t , on introduit une base d'états propres de l'hamiltonien \hat{H}_λ

$$|\psi_\lambda^{(n)}\rangle$$

On définit la connexion de Berry

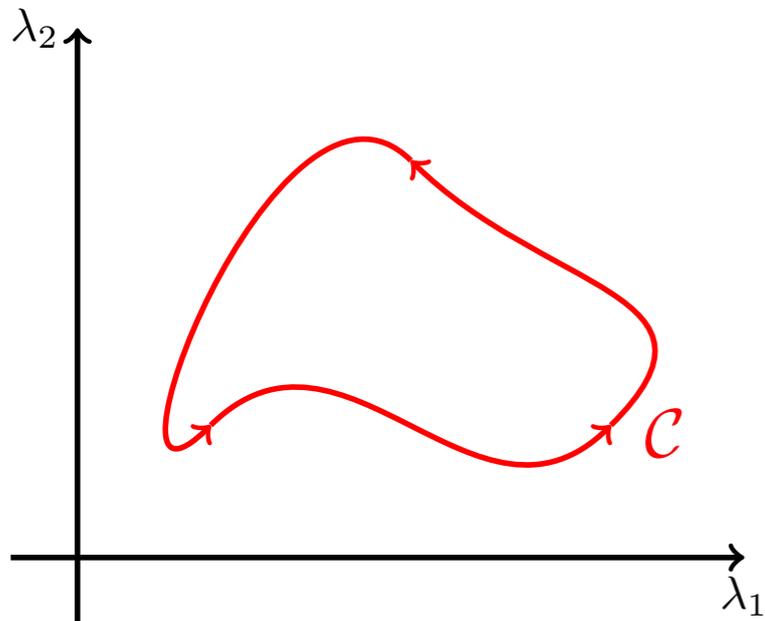
$$\mathcal{A}_\lambda^{(n)} = i \langle \psi_\lambda^{(n)} | \nabla \psi_\lambda^{(n)} \rangle \quad |\nabla \psi\rangle = \begin{pmatrix} \frac{d}{d\lambda_1} |\psi\rangle \\ \frac{d}{d\lambda_2} |\psi\rangle \\ \vdots \end{pmatrix}$$

quantité réelle car $\langle \psi | \nabla \psi \rangle$ imaginaire pur (ou nul)

Alors la phase géométrique s'écrit : $\Phi_{\text{geom}} = \int_{\lambda(0)}^{\lambda(t)} \mathcal{A}_\lambda^{(0)} \cdot d\lambda$

Dépend du chemin suivi pour aller de $\lambda(0)$ à $\lambda(t)$,
mais pas du temps mis pour parcourir ce chemin

Le cas d'un contour fermé



λ : paramètre à 1, 2 ou 3 dimensions

$$\Phi_{\text{geom}} = \oint_C \mathcal{A}_\lambda^{(0)} \cdot d\lambda$$

Calcul possible via la formule de Stokes : $\Omega_\lambda^{(n)} = \nabla \times \mathcal{A}_\lambda^{(n)} = i \langle \nabla \psi_\lambda^{(n)} | \times | \nabla \psi_\lambda^{(n)} \rangle$
Courbure de Berry

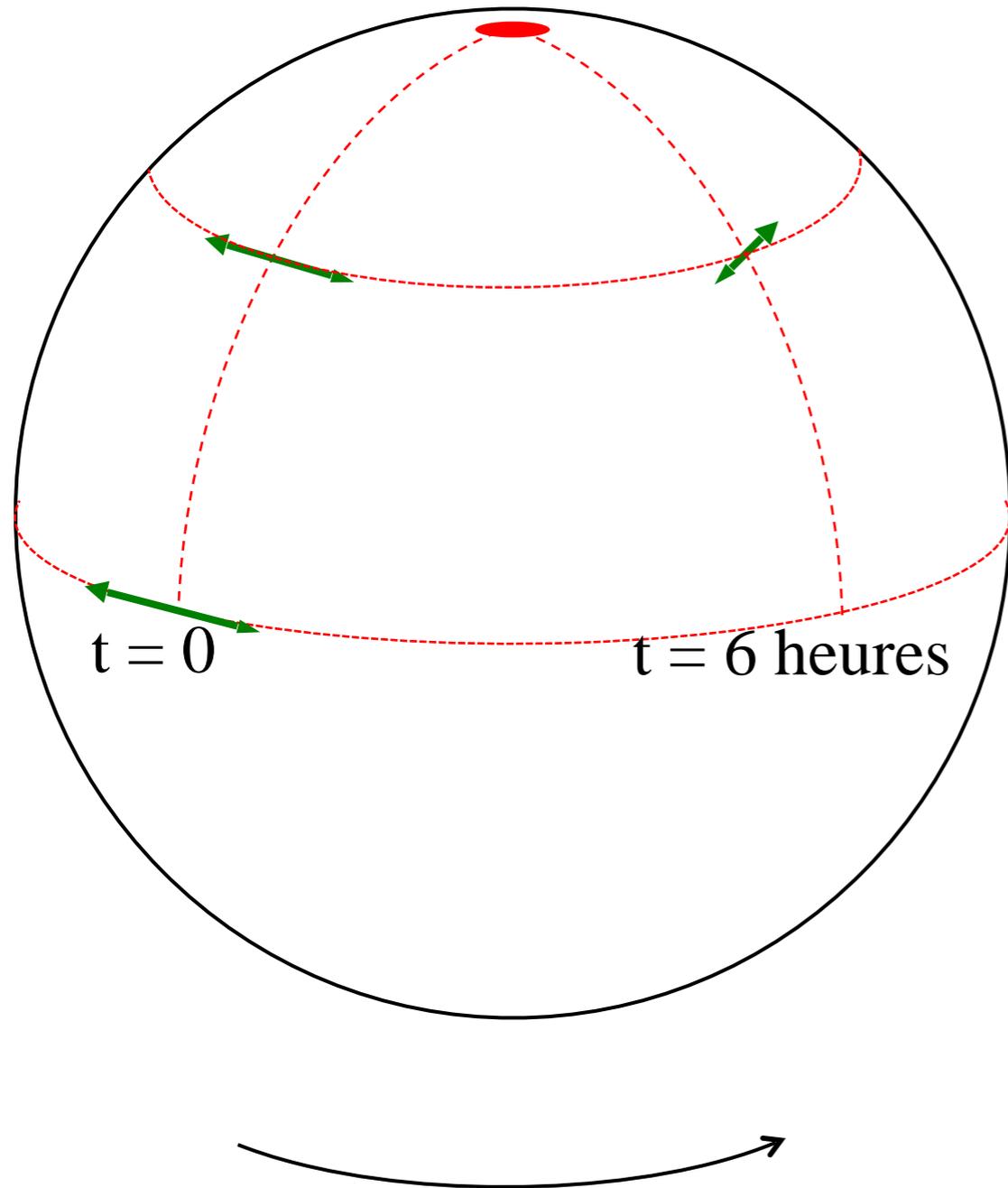
$$\longrightarrow \Phi_{\text{geom}} = \iint_\Sigma \mathbf{n} \cdot \Omega_\lambda^{(n)} d^2\lambda$$

Analogie avec la magnétostatique :

connexion de Berry	$\mathcal{A}_\lambda \longleftrightarrow \mathbf{A}(\mathbf{r})$	potentiel vecteur
courbure de Berry	$\Omega_\lambda \longleftrightarrow \mathbf{B}(\mathbf{r})$	champ magnétique

Ne semble pas très intéressant à 1D : simple aller-retour ?

Le pendule de Foucault



Wikipedia

En 24 heures, le paramètre extérieur — le point d'accroche du pendule — effectue une boucle fermée

Les deux modes propres d'oscillation circulaire (rotation dans le sens des aiguilles d'une montre et son inverse) accumulent des phases géométriques différentes

Se traduit par un changement du plan d'oscillation pour un mouvement linéaire

Courbure de Berry et invariance de jauge

Un changement de jauge en mécanique quantique s'écrit

$$|\psi_{\lambda}^{(n)}\rangle \longrightarrow |\tilde{\psi}_{\lambda}^{(n)}\rangle = e^{i\chi_{\lambda}^{(n)}} |\psi_{\lambda}^{(n)}\rangle$$

La connexion de Berry $\mathcal{A}_{\lambda}^{(n)} = i \langle \psi_{\lambda}^{(n)} | \nabla \psi_{\lambda}^{(n)} \rangle$ n'est pas invariante dans cette transformation :

$$\mathcal{A}_{\lambda}^{(n)} \longrightarrow \tilde{\mathcal{A}}_{\lambda}^{(n)} = \mathcal{A}_{\lambda}^{(n)} - \nabla \chi_{\lambda}^{(n)}$$

La courbure de Berry $\Omega_{\lambda}^{(n)} = \nabla \times \mathcal{A}_{\lambda}^{(n)}$ reste quant à elle inchangée :

$$\Omega_{\lambda}^{(n)} \longrightarrow \tilde{\Omega}_{\lambda}^{(n)} = \Omega_{\lambda}^{(n)}$$

cf. magnétostatique

$\Omega^{(n)}$ est une quantité physiquement mesurable

idem pour la phase géométrique $e^{i\tilde{\Phi}_{\text{geom}}} = e^{i\Phi_{\text{geom}}}$

Ordre suivant de l'approximation adiabatique

On s'est intéressé ici à l'ordre 0 : $|\psi(t)\rangle \approx e^{i\Phi} |\psi_{\lambda}^{(0)}\rangle$.

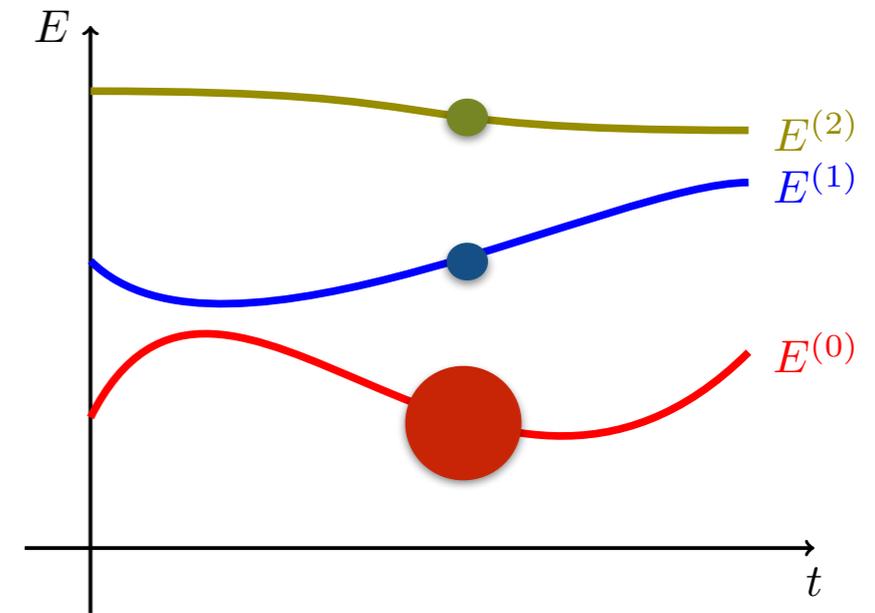
L'état du système est à chaque instant colinéaire avec l'état propre dont on est parti

On aura également besoin de l'ordre 1 :

$$|\psi(t)\rangle \approx e^{i\Phi} |\psi_{\lambda}^{(0)}\rangle + \sum_{n \neq 0} c_n |\psi_{\lambda}^{(n)}\rangle$$

On trouve après un calcul simple $c^{(n)}(t) \approx i\hbar \dot{\lambda} \cdot \frac{\langle \psi_{\lambda}^{(n)} | \nabla \psi_{\lambda}^{(0)} \rangle}{E_{\lambda}^{(n)} - E_{\lambda}^{(0)}}$

valide si $|c^{(n)}| \ll 1$ à chaque instant



Réponse linéaire du système au mouvement du paramètre extérieur

2.

L'exemple du spin $1/2$

Systeme « à deux états »

Espace des états de dimension 2 : $|\psi\rangle = \alpha|+\rangle + \beta|-\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$

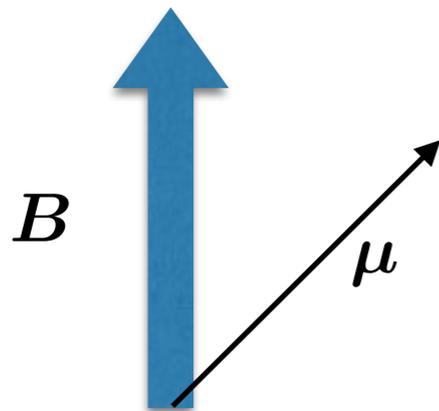
Hamiltonien le plus général pour ce type de système : matrice 2x2 hermitienne

$$\hat{H} = E_0 \hat{1} - \mathbf{h} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}$$

$E_0, (h_x, h_y, h_z)$: réels
 $\hat{\sigma}_j$: matrices de Pauli

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exemple: moment magnétique de spin 1/2 dans un champ magnétique



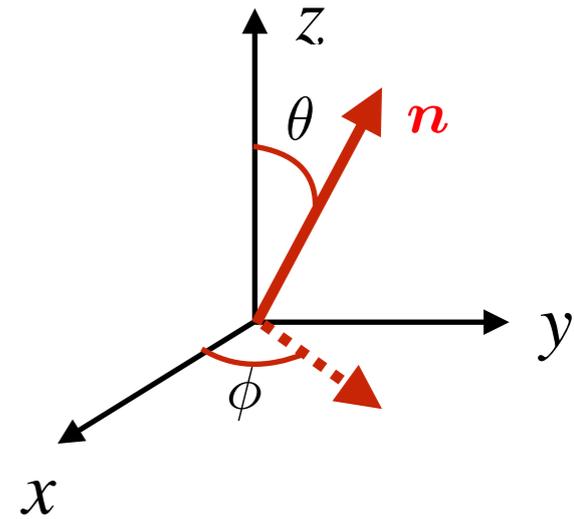
$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = \mu \hat{\boldsymbol{\sigma}} \quad \text{: opérateur « moment magnétique »}$$
$$\hat{H} = -\hat{\boldsymbol{\mu}} \cdot \mathbf{B} \quad \mathbf{h} = \mu \mathbf{B}$$

La sphère de Bloch

Energies et vecteurs propres de l'hamiltonien $\hat{H} = E_0 \hat{1} - \mathbf{h} \cdot \hat{\sigma}$?

$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{h}}{|\mathbf{h}|}$ vecteur unitaire de coordonnées sphériques (θ, ϕ)

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} \cos \phi \sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$



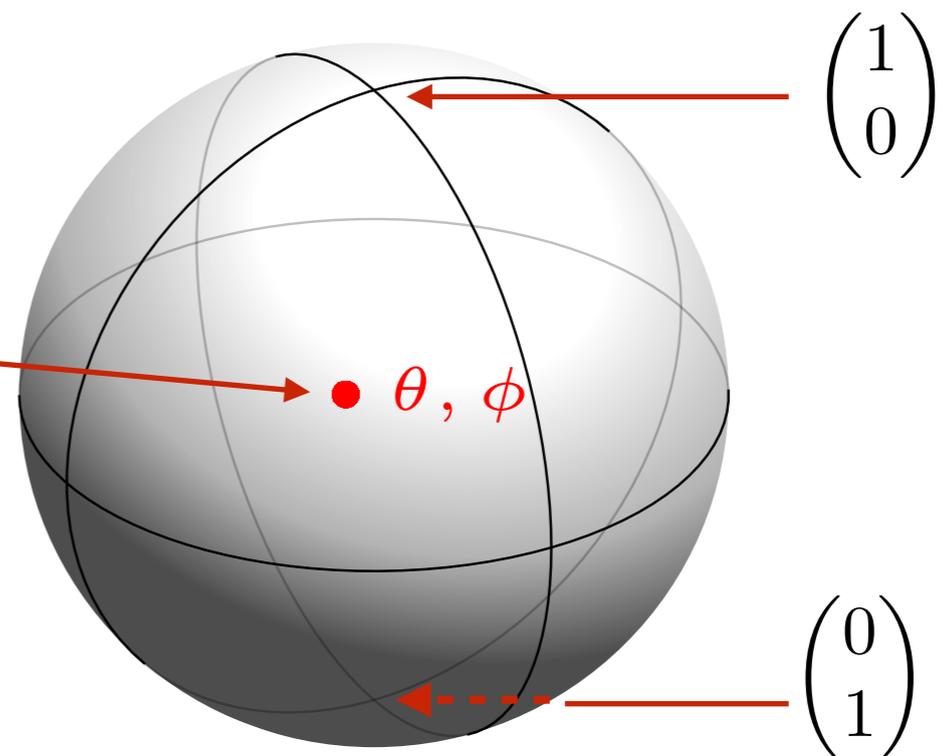
Avec cette paramétrisation : $\hat{H} = E_0 \hat{1} - |\mathbf{h}| \begin{pmatrix} \cos \theta & e^{-i\phi} \sin \theta \\ e^{i\phi} \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$

Energies propres : $E^{(\pm)} = E_0 \pm |\mathbf{h}|$

Vecteurs propres :

$$|\psi^{(-)}\rangle = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ e^{i\phi} \sin(\theta/2) \end{pmatrix}$$

$$|\psi^{(+)}\rangle = \begin{pmatrix} \sin(\theta/2) \\ -e^{i\phi} \cos(\theta/2) \end{pmatrix}$$

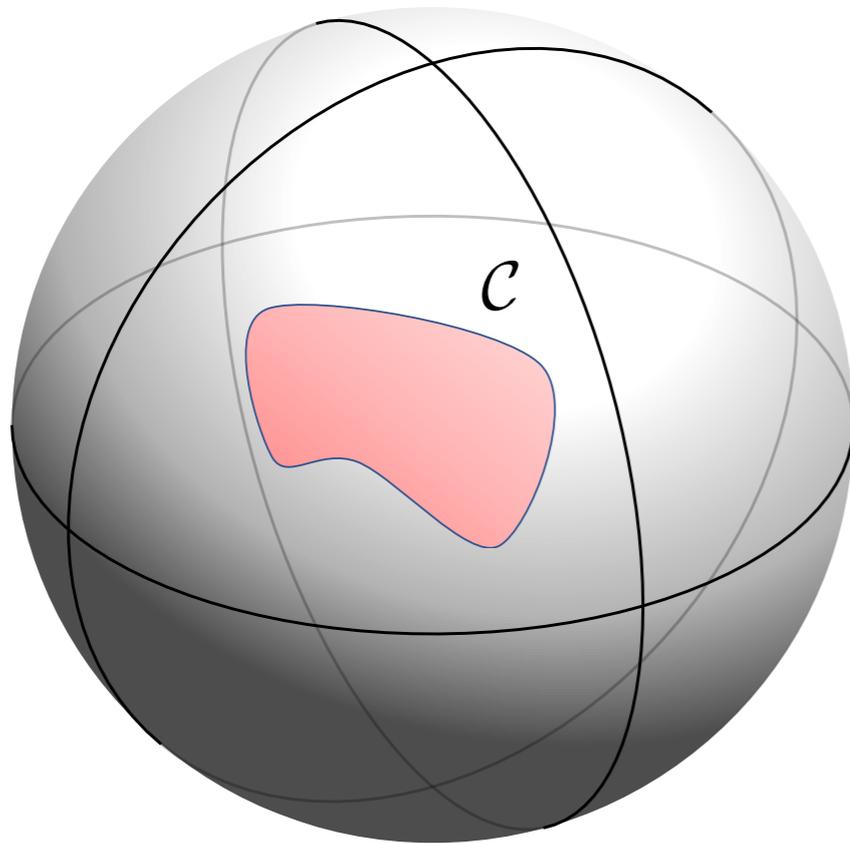


Courbure de Berry et phase géométrique

$$\hat{H} = E_0 \hat{1} - \mathbf{h} \cdot \hat{\sigma}$$

Situation où le vecteur \mathbf{h} varie dans le temps et décrit une boucle fermée

Quelle est la phase géométrique accumulée par l'état du système s'il suit adiabatiquement $|\psi^{(-)}\rangle$?



On note α l'angle solide sous-tendu par la trajectoire \mathcal{C} du vecteur \mathbf{h}

$$\Phi_{\text{geom.}}(\mathcal{C}) = \pm \frac{\alpha}{2}$$

Trajectoire qui fait le tour de l'équateur :

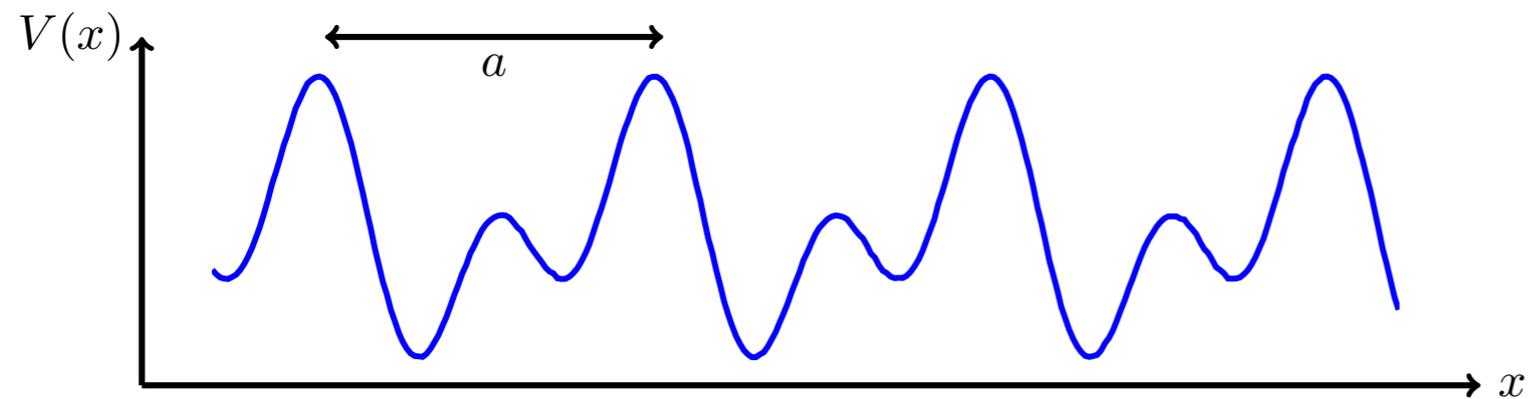
$$\alpha = 2\pi \longrightarrow \Phi_{\text{geom.}}(\mathcal{C}) = \pm\pi$$

3.

Potentiel périodique en mécanique quantique

Le théorème de Bloch

Mouvement d'une particule de masse m dans le potentiel périodique $V(x)$



$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x})$$

$$\hat{p} = -i\hbar \partial_x$$

On peut chercher les fonctions propres de \hat{H} sous la forme

$$\psi_q(x) = e^{iqx} u_q(x)$$

onde plane
de moment q

fonction périodique
 $u_q(x + a) = u_q(x)$

L'hamiltonien « périodique » \hat{H}_q

On reporte la forme de Bloch $\psi_q(x) = e^{iqx} u_q(x)$ dans l'équation aux valeurs propres de l'hamiltonien

$$\hat{H} \psi_q(x) = E_q \psi_q(x) \longrightarrow \hat{H}_q u_q(x) = E_q u_q(x)$$

\hat{H}_q : hamiltonien pour la partie périodique $u_q(x)$

$$\hat{H} = \frac{\hbar^2}{2m} (-i\partial_x)^2 + V(x) \longrightarrow \hat{H}_q = \frac{\hbar^2}{2m} (-i\partial_x + q)^2 + V(x)$$

C'est un exemple d'hamiltonien dépendant d'un paramètre, en l'occurrence q

La notion de phase géométrique va apparaître naturellement si on est capable de changer le moment q à volonté dans une expérience

Principe des oscillations de Bloch

La zone de Brillouin

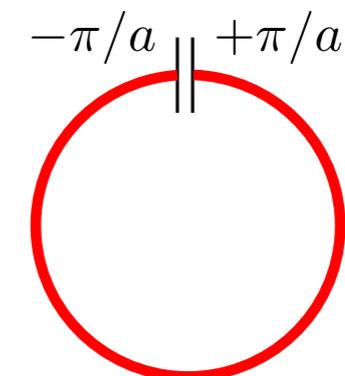
Le moment q peut prendre n'importe quelle valeur, mais elles ne sont pas toutes indépendantes

Considérons q et $q + \frac{2\pi}{a}$

$$\psi_q(x) = e^{iqx} u_q(x)$$

$$\begin{aligned} \psi_{q+2\pi/a}(x) &= e^{i(q+2\pi/a)x} u_{q+2\pi/a}(x) \\ &= e^{iqx} \underbrace{\left(e^{i2\pi x/a} u_{q+2\pi/a}(x) \right)}_{\text{fonction périodique}} \end{aligned}$$

Pour éviter le double comptage, il faut restreindre q à une zone de Brillouin :



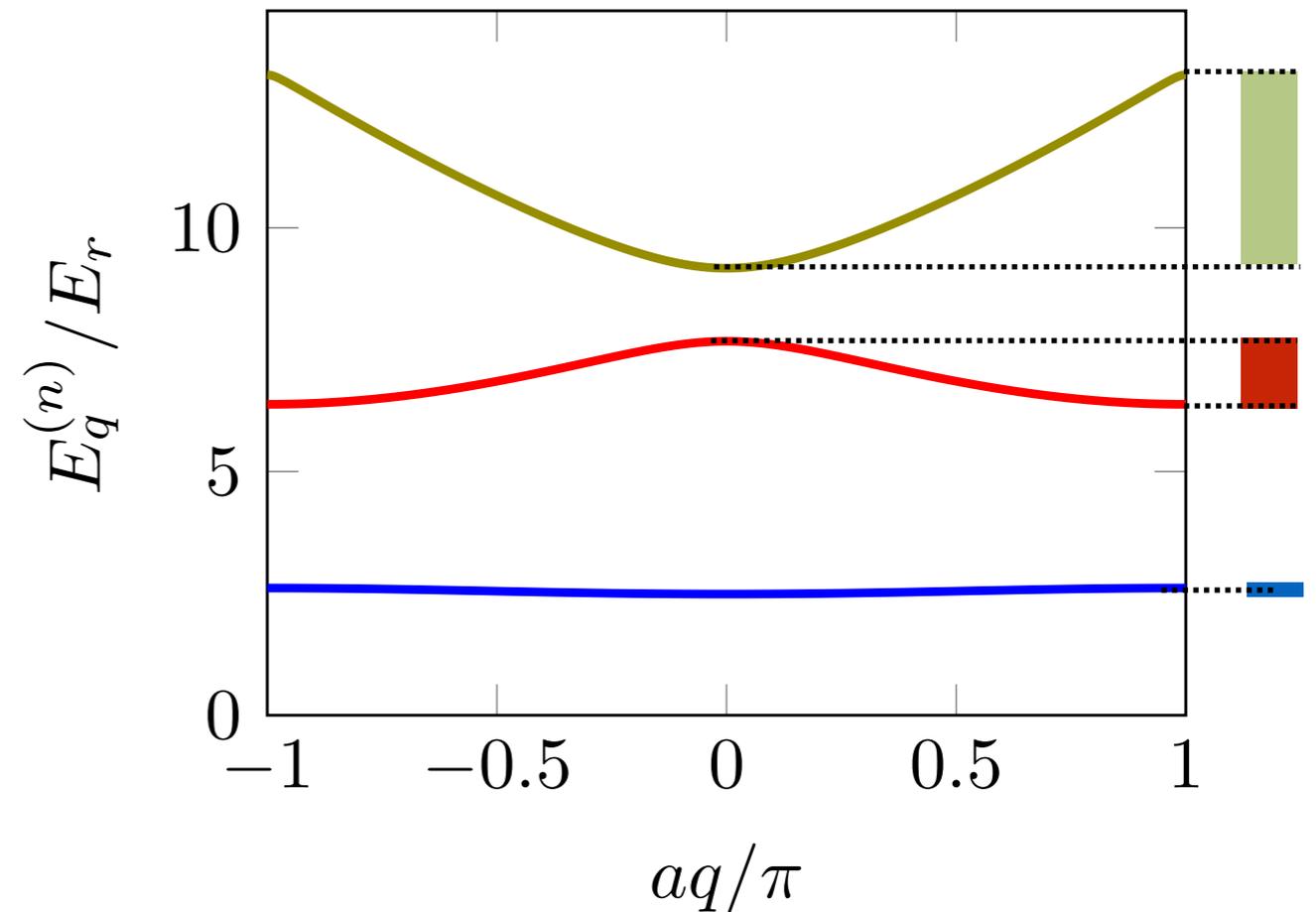
Bandes d'énergie

Exemple du potentiel créé par une onde stationnaire lumineuse sur des atomes

$$V(x) = V_0 \sin^2(\pi x/a)$$

Pour chaque valeur de q ,
on trouve un ensemble discret
d'énergies propres :

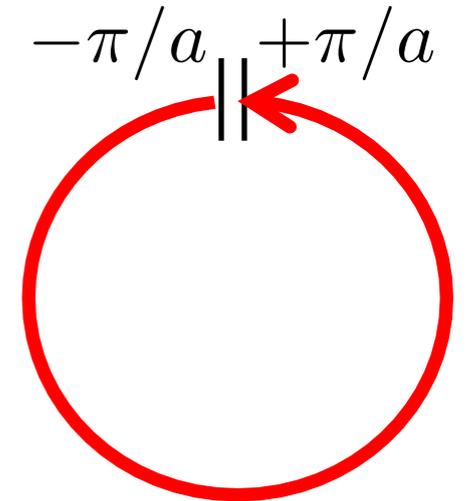
$$E_q^{(0)} \leq E_q^{(1)} \leq E_q^{(2)} \leq \dots$$



Quand on regroupe les énergies trouvées pour toutes les valeurs de q ,
on trouve des bandes d'énergie permises, séparées par des gaps interdits

La phase de Zak

Une première incursion dans le domaine de la topologie...



L'aller simple de $-\pi/a$ à $+\pi/a$ revient à effectuer une boucle fermée dans l'espace des paramètres.

Que devient la phase de Berry dans ce cas ? $\Phi_{\text{geom}} = \int_{-\pi/a}^{+\pi/a} i \langle u_q | \partial_q u_q \rangle dq$

« we have here, for the first time, the appearance of Berry's phase for a one-dimensional parameter space »

Zak, 1989

Nécessite que $|u_q\rangle$ ait une partie complexe non nulle

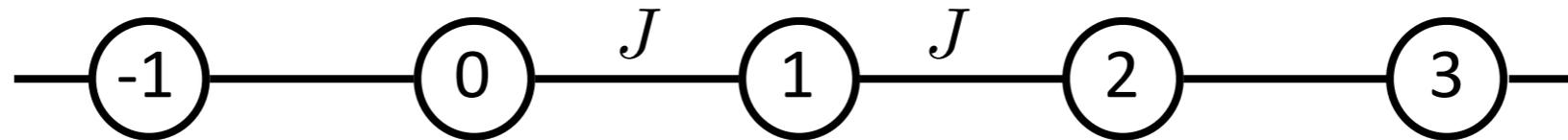
4.

Le modèle SSH

Su, Schrieffer & Heeger
Solitons in Polyacetylene
Phys. Rev. Lett. 42, 1698 (1979)

Le modèle de Hubbard

Le modèle le plus simple d'un cristal à 1D



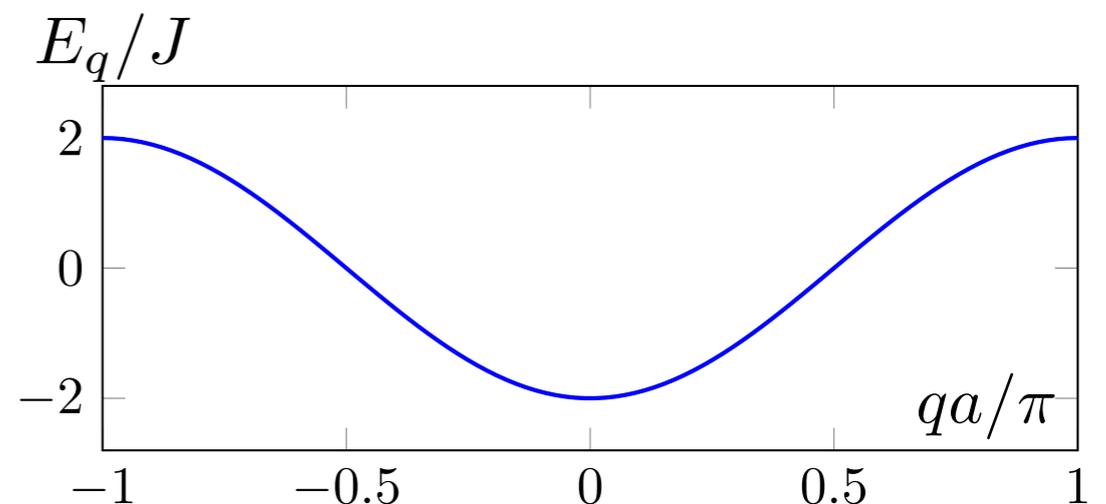
- Tous les sites sont équivalents (énergie nulle par convention)
- Uniquement des couplages entre proches voisins : $\hat{H} = -J \sum_j |j+1\rangle\langle j| + \text{h.c.}$

Application du théorème de Bloch : une seule fonction périodique $|u\rangle \propto \sum_j |j\rangle$

→ Fonction $|u\rangle$ réelle : phase de Zak nulle (pas de propriétés topologiques)

→
$$|\psi_q\rangle = \sum_j e^{ijqa} |j\rangle$$
$$E_q = -2J \cos(qa)$$

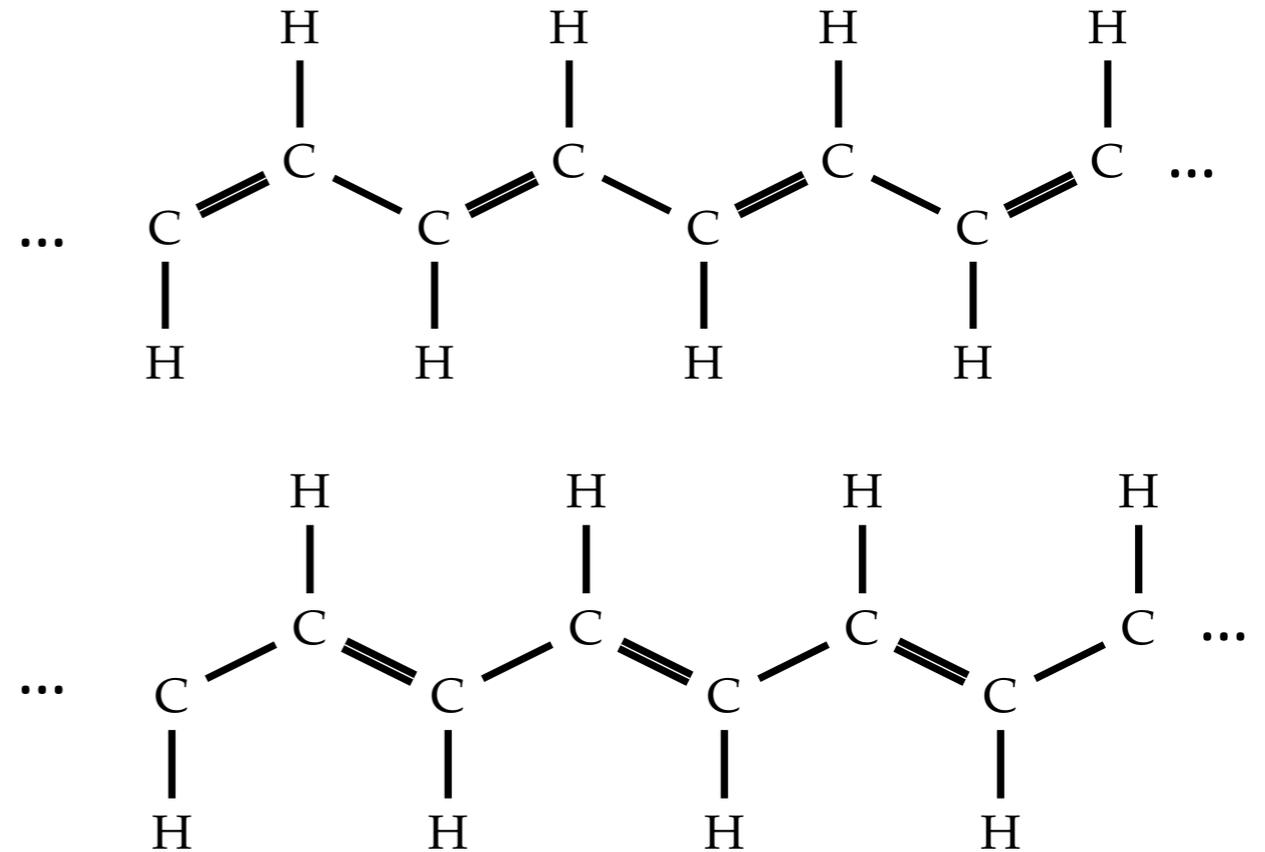
une seule bande d'énergie



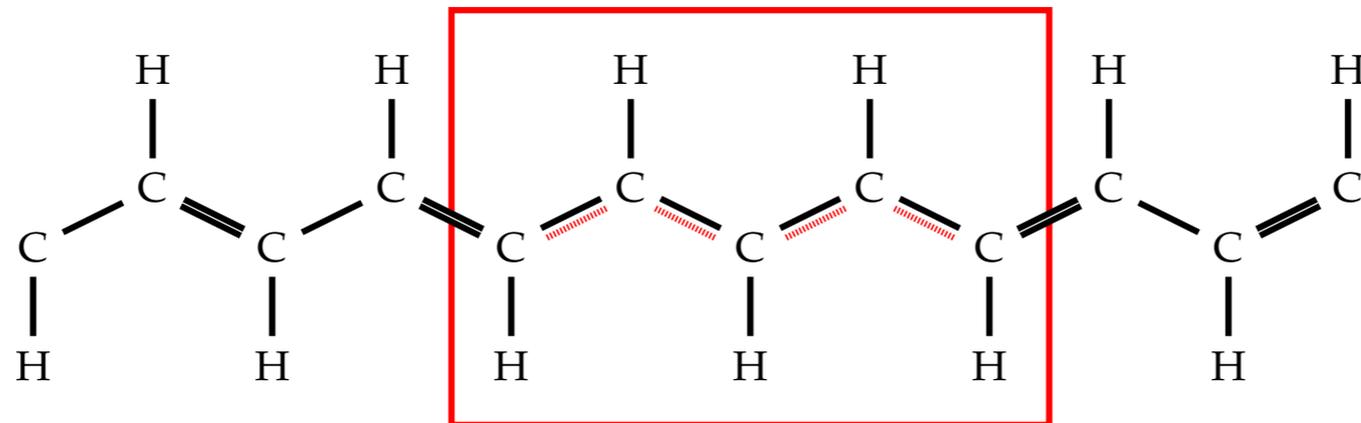
Le problème posé par SSH

Description d'ondes de densité
électroniques de nature « solitonique »
le long d'une chaîne de polymère

Forme dimérisée :

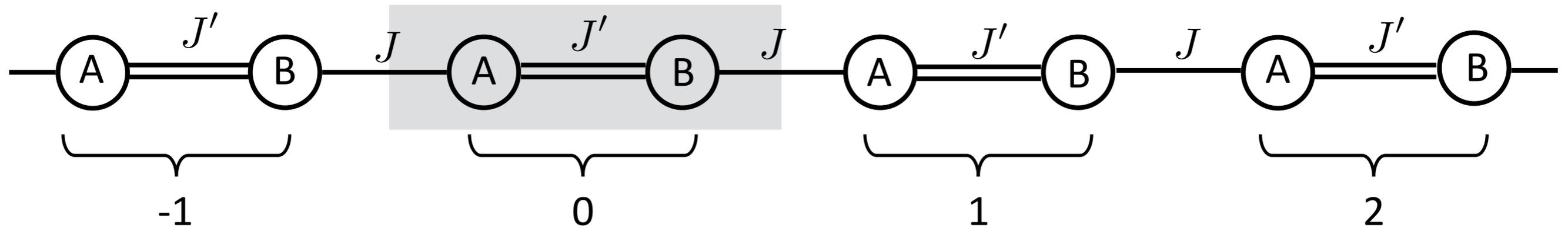


Que se passe-t-il à la jonction entre les deux dimérisations ?



Modélisation du problème SSH

Généralisation du problème de Hubbard avec deux valeurs possibles de « saut »



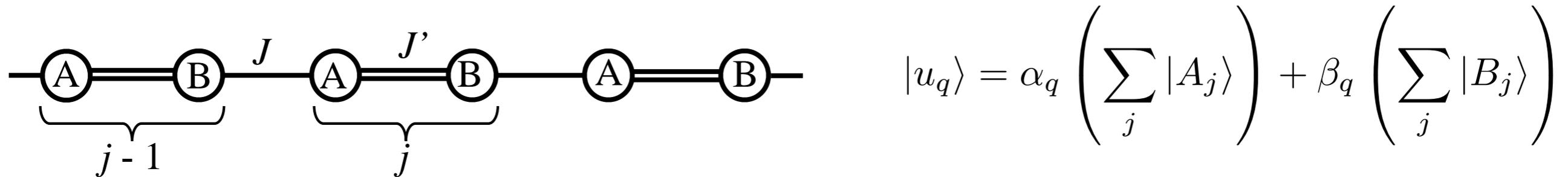
Cellule unité à deux sites A et B

Fonction périodique : $|u_q\rangle = \alpha_q \left(\sum_j |A_j\rangle \right) + \beta_q \left(\sum_j |B_j\rangle \right) = \begin{pmatrix} \alpha_q \\ \beta_q \end{pmatrix}$

Pseudo-spin 1/2 pour chaque valeur du moment q

$$\alpha_q, \beta_q \text{ complexes, } |\alpha_q|^2 + |\beta_q|^2 = 1$$

L'hamiltonien périodique



Fonction de Bloch correspondante : $|\psi_q\rangle = \sum_j e^{ijqa} (\alpha_q |A_j\rangle + \beta_q |B_j\rangle)$

Solution de $\hat{H}|\psi_q\rangle = E_q |\psi_q\rangle$ avec

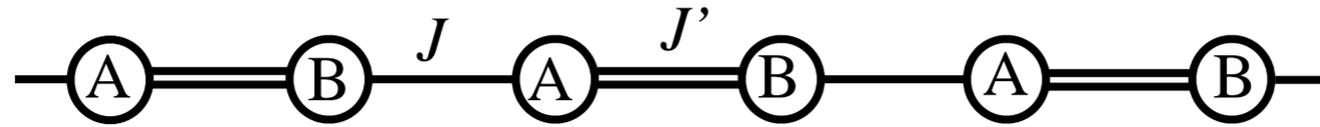
$$\hat{H} = -J' \sum_j |B_j\rangle \langle A_j| - J \sum_j |B_{j-1}\rangle \langle A_j| + \text{h.c.}$$

Pour chaque q , on obtient un système 2x2 pour les coefficients α_q, β_q :

$$\hat{H}_q \begin{pmatrix} \alpha_q \\ \beta_q \end{pmatrix} = E_q \begin{pmatrix} \alpha_q \\ \beta_q \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \hat{H}_q = - \begin{pmatrix} 0 & J' + J e^{-iqa} \\ J' + J e^{iqa} & 0 \end{pmatrix}$$

Hamiltonien périodique du type général vu pour un spin 1/2

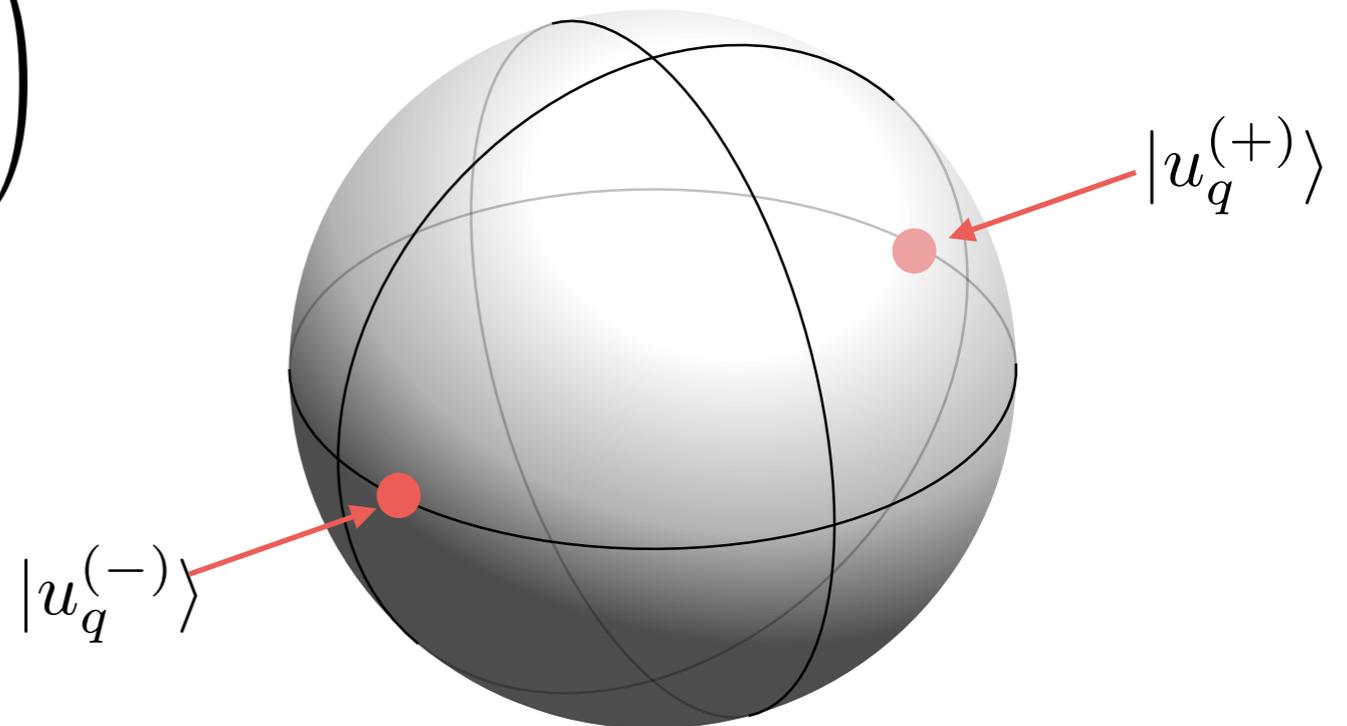
Structure de l'hamiltonien périodique



Hamiltonien périodique : $\hat{H}_q = - \begin{pmatrix} 0 & J' + J e^{-iqa} \\ J' + J e^{iqa} & 0 \end{pmatrix} = -\mathbf{h}(q) \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}$

avec le vecteur $\mathbf{h}(q) = \begin{pmatrix} J' + J \cos(qa) \\ J \sin(qa) \\ 0 \end{pmatrix}$

$h_z(q) = 0$: on reste sur l'équateur de la sphère de Bloch



Energies associées : $E_q^{(\pm)} = \pm |J' + J e^{iqa}|$

Deux bandes d'énergie disjointes, sauf si $J = J'$

Bandes d'énergie pour le modèle SSH

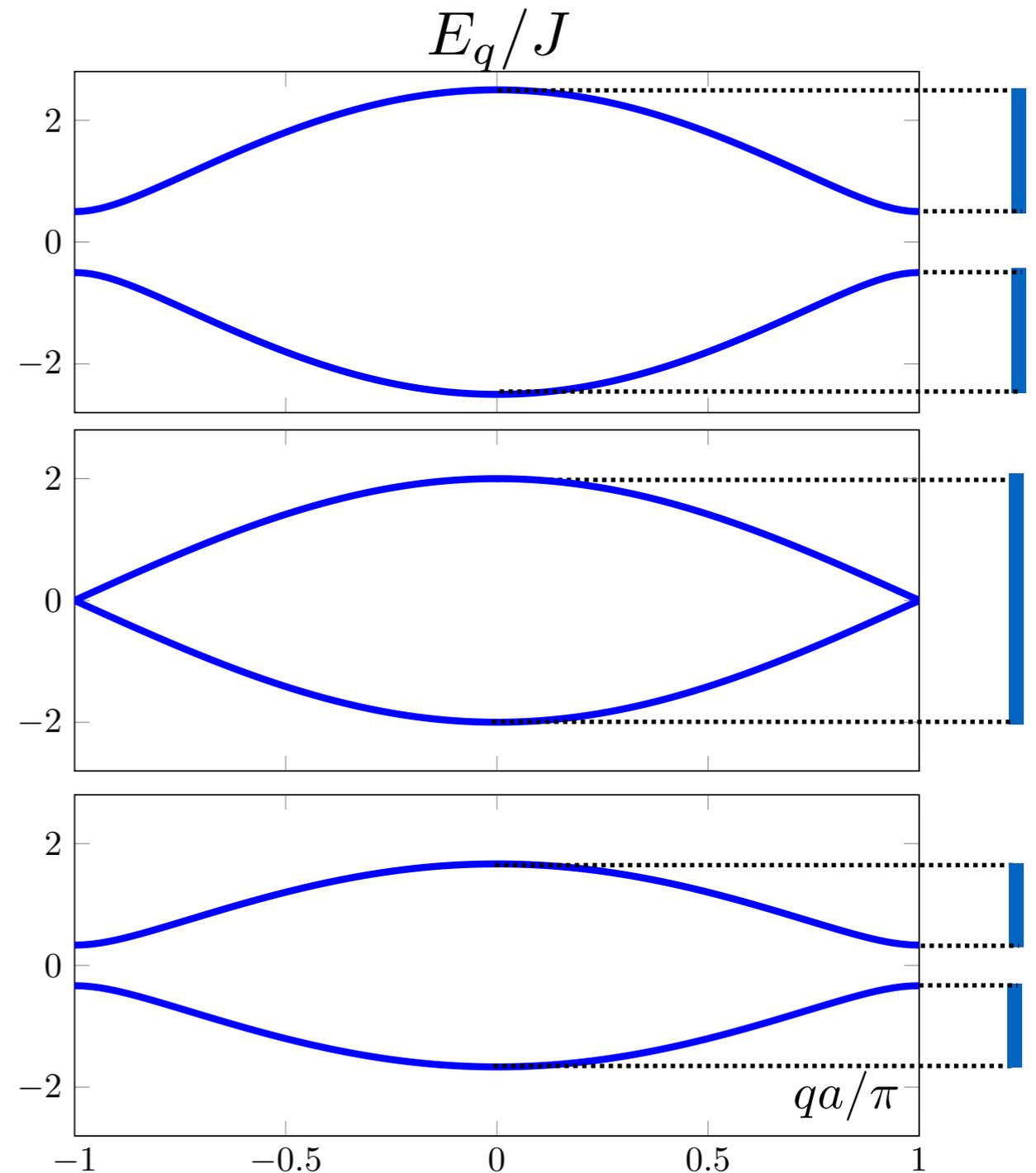


$$J' = \frac{3}{2}J$$

$$E_q^{(\pm)} = \pm |J' + J e^{iqa}|$$

$$J' = J$$

$$J' = \frac{2}{3}J$$

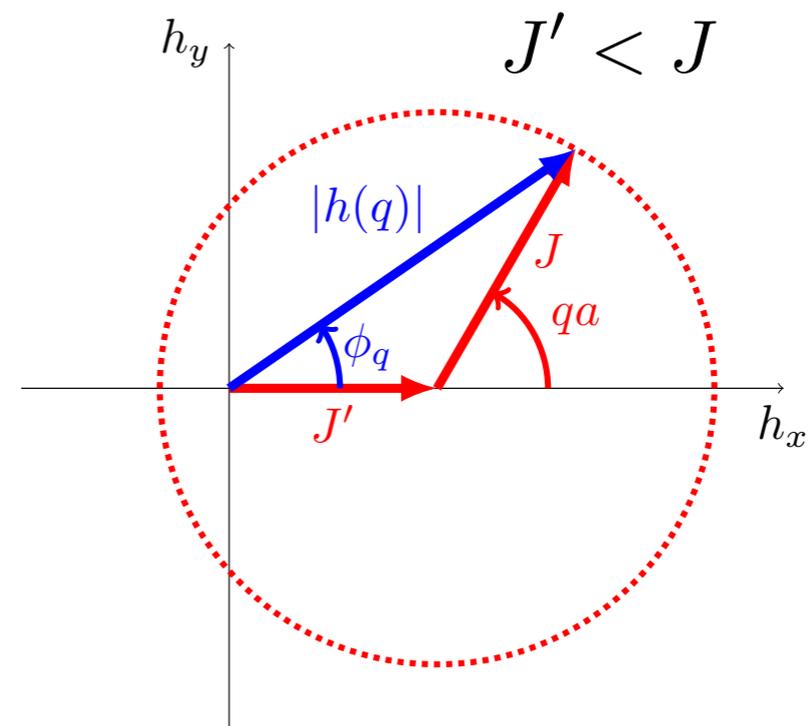
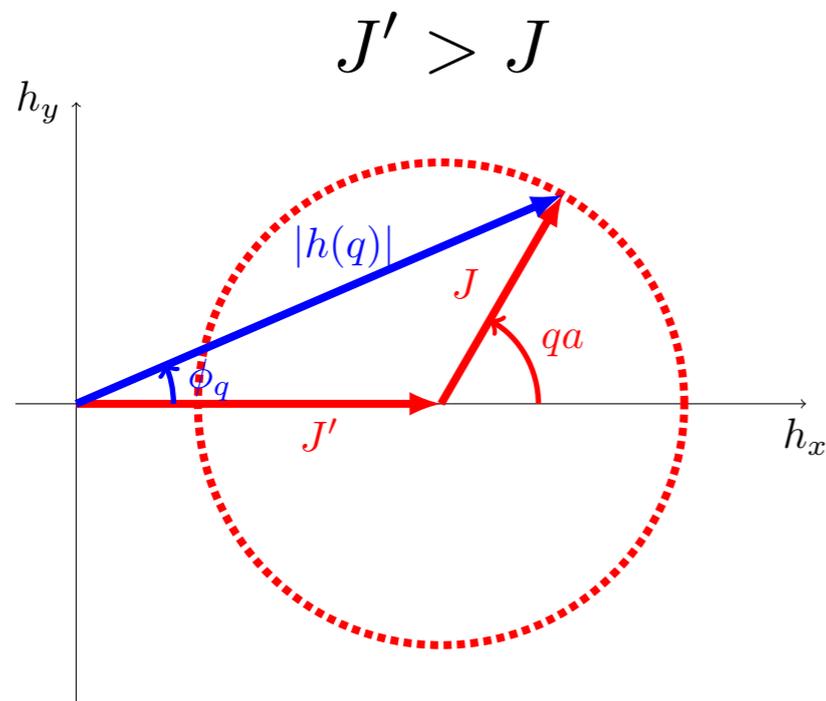


Etats propres et topologie pour le modèle SSH



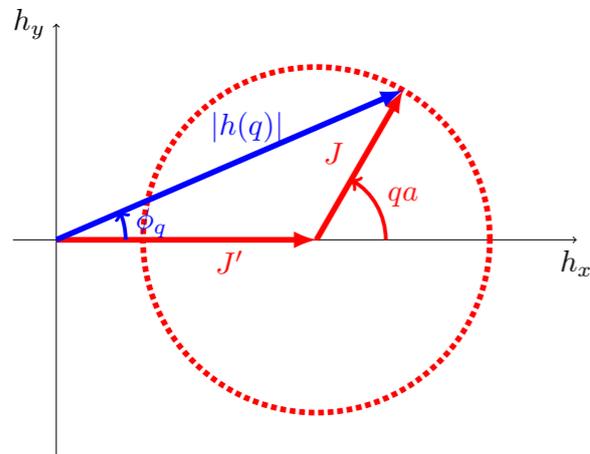
$$\hat{H}_q = - \begin{pmatrix} 0 & J' + J e^{-iqa} \\ J' + J e^{iqa} & 0 \end{pmatrix} \quad |u_q^{(\pm)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \mp e^{i\phi_q} \end{pmatrix}$$

où la phase ϕ_q est définie par $e^{i\phi_q} = \frac{J' + J e^{iqa}}{|J' + J e^{iqa}|}$

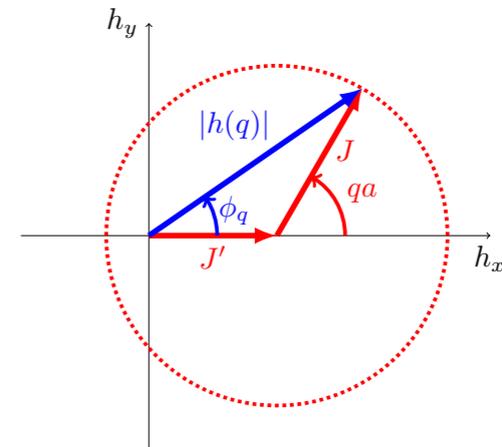


La phase géométrique de Berry - Zak

Trajectoire d'un des deux états propres, par exemple $|u_q^{(-)}\rangle$, sur la sphère de Bloch

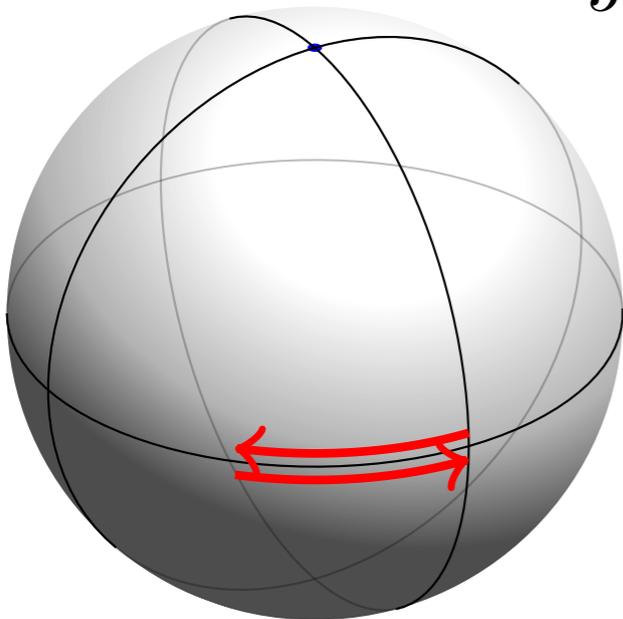


$$|u_q^{(-)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\phi_q} \end{pmatrix}$$

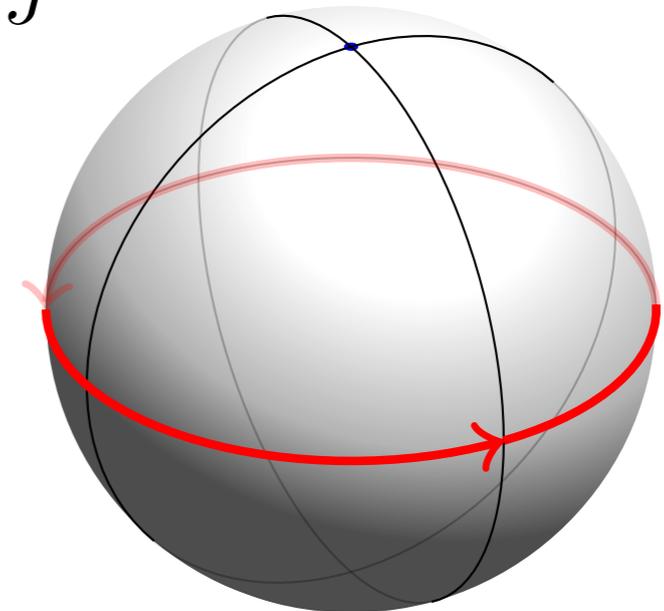


$$J' > J$$

$$J' < J$$



$$\Phi_{\text{Zak}} = 0$$

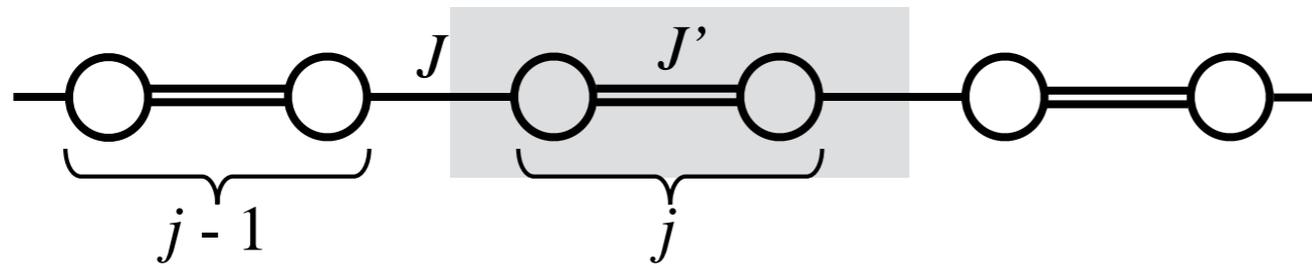


$$\Phi_{\text{Zak}} = \pi$$

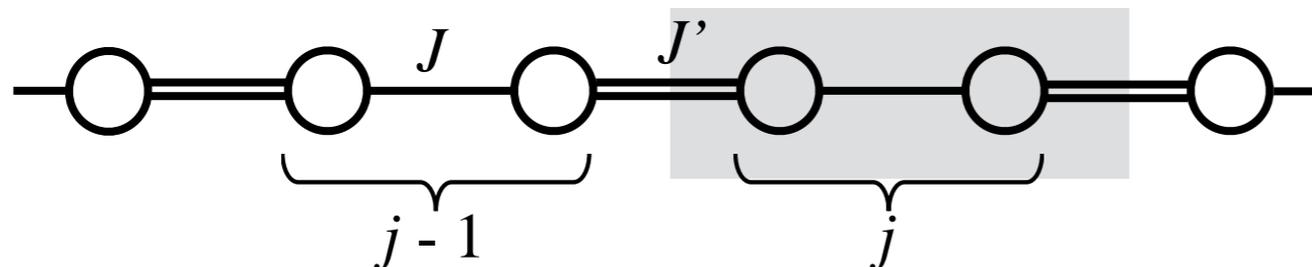
Le nombre d'enroulement $N = \Phi_{\text{Zak}}/\pi$ est un invariant topologique

Quelle réalité physique pour cette topologie ?

Dans ce qui précède, J' désigne le couplage à l'intérieur d'une cellule et J entre cellules



Pour une chaîne infinie, on peut changer l'indexation et échanger les rôles de J et J'



La distinction entre $[J' < J]$ et $[J' > J]$ n'est-elle qu'un artifice mathématique ?

Non ! Mais elle n'acquiert son sens physique que lorsqu'on considère la frontière entre deux zones de topologie différentes.

Rôle crucial des états de bord dans le lien « Physique & Topologie »