

# Atomes et lumière en équilibre thermique : de l'argument d'Einstein aux mélasses optiques

Jean Dalibard

Collège de France et Laboratoire Kastler Brossel,  
CNRS, ENS-PSL Research University, UPMC-Sorbonne Universités,  
11 Place Marcelin Berthelot, 75005 Paris, France

10 avril 2016

## Résumé

En 1916-17, Einstein étudie comment un rayonnement de type corps noir peut imposer sa température à une collection d'atomes. À partir des trois processus d'absorption, d'émission dirigée et d'émission spontanée, il montre que la lumière crée une force de friction sur un atome en mouvement. En utilisant ensuite des arguments empruntés à la théorie du mouvement brownien, il explique comment l'assemblée atomique atteint le même état d'équilibre thermique que le corps noir de départ. Près de soixante ans après le travail d'Einstein, les physiciens Hänsch et Schawlow d'une part, Wineland et Dehmelt d'autre part, ont proposé d'exploiter la lumière des lasers accordables pour créer de nouveaux équilibres thermodynamiques, avec un processus de refroidissement étonnement proche du mécanisme envisagé par Einstein. Cela a constitué le point de départ d'un nouveau domaine de la physique quantique, l'étude de gaz d'atomes refroidis à une température située dans le domaine du microkelvin.

Le point de départ de cet article sera le rayonnement du corps noir, c'est-à-dire le rayonnement électromagnétique émis par un corps matériel en équilibre thermodynamique avec son environnement. La distribution spectrale de ce rayonnement est une loi universelle qui ne dépend que de la température du corps. Elle est donnée par la loi de Planck (1900):

$$\rho(\omega, T) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1}, \quad (1)$$

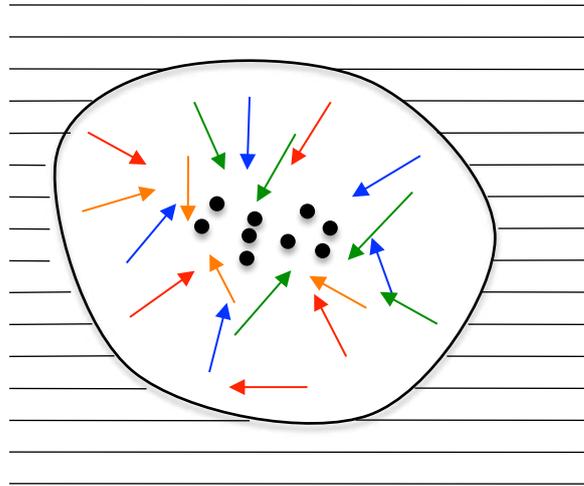
où  $\rho(\omega) d\omega$  représente l'énergie électromagnétique par unité de volume correspondant à un rayonnement de pulsation comprise entre  $\omega$  et  $\omega + d\omega$ .

Considérant la loi de Planck (1) acquise, Einstein (1917) étudie comment un rayonnement avec cette densité spectrale d'énergie va imposer sa température à une collection d'atomes. Pour cela, il introduit la notion de force de friction créée par la lumière sur un atome en mouvement, force de friction en tout point identique à celle proposée près de 60 ans plus tard par Hänsch & Schawlow (1975) et à l'œuvre dans les mélasse optiques utilisées dans les laboratoires d'aujourd'hui. De plus, le raisonnement d'Einstein pour étudier l'équilibre atteint par l'assemblée d'atomes est également identique à celui utilisé pour décrire le mouvement des atomes dans des faisceaux laser quasi-résonnants : il s'agit d'arguments fondés sur la notion de mouvement brownien, que nous allons également passer en revue dans cet article.

## 1 Einstein 1916 : absorption et émission

En 1916, alors qu'il vient de publier sa théorie de la Relativité Générale, Einstein revient vers l'étude des processus d'échanges d'énergie et d'impulsion entre atomes et rayonnement (Einstein 1916). Pour approfondir ce thème qu'il avait abordé dès 1905 dans son étude de l'effet photoélectrique, il va prendre comme fil directeur l'atteinte de l'équilibre thermodynamique.

Einstein considère une collection d'atomes éclairés par un rayonnement de type corps noir à température  $T$  (figure 1). Son but est de modéliser la manière selon laquelle les atomes et le rayonnement peuvent échanger de l'énergie. La seule contrainte qu'il s'impose est la cohérence de la physique statistique : il faut que la répartition des populations moyennes des différents niveaux d'énergie des atomes soit une distribution de Boltzmann avec la même température  $T$  que le rayonnement. Dans un modèle



**FIGURE 1.** Le problème considéré par Einstein : une assemblée d'atomes indépendants est éclairée par le rayonnement d'un corps noir à température  $T$ . Cette assemblée d'atomes va-t-elle se thermaliser avec le corps noir, aussi bien en ce qui concerne ses degrés de libertés internes qu'externes ?

d'atome à deux niveaux, avec un état fondamental  $g$  et un état excité  $e$  séparés une énergie  $\hbar\omega_A$  (figure 2, gauche), le rapport des populations  $P_{g,e}$  doit être tel que :

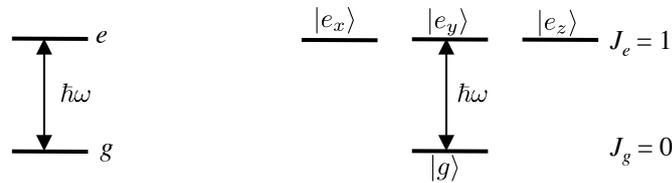
$$\frac{P_e}{P_g} = \exp\left(-\frac{\hbar\omega_A}{k_B T}\right). \quad (2)$$

## 1-1 Processus élémentaires et état d'équilibre

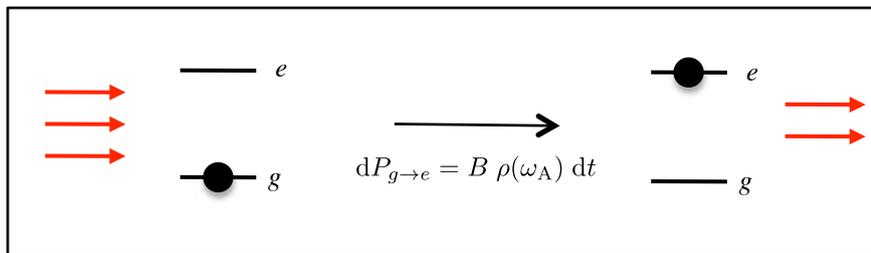
Pour expliquer comment un tel état d'équilibre peut être obtenu, Einstein étudie la compétition entre processus d'absorption de photons<sup>1</sup> et processus d'émission :

- Si l'atome est dans l'état fondamental, il peut absorber un photon et passer dans l'état excité (figure 3). Einstein postule que la probabilité pour que ce processus se produise pendant un intervalle de temps infinitésimal  $dt$  est proportionnelle à  $dt$  et à la densité d'énergie du

1. Einstein n'utilise pas le terme de photon, qui ne sera introduit que bien plus tard (1926) par Lewis.



**FIGURE 2.** Les deux modèles de transition atomique considérés dans cet article. À gauche, atome à deux niveaux ; à droite, transition  $J_g = 0 \leftrightarrow J_e = 1$  permettant de prendre correctement en compte les phénomènes liés à la polarisation de la lumière. On prendra comme base du niveau excité les états  $|e_j\rangle$  dont la projection du moment cinétique sur l'axe  $j$  est nulle ( $j = x, y, z$ ).



**FIGURE 3.** Processus d'absorption

rayonnement  $\rho$ , prise à la fréquence<sup>2</sup> de résonance atomique  $\omega_A$  :

$$dP_{g \rightarrow e} = B \rho(\omega_A) dt, \quad (3)$$

où  $B$  est un coefficient indéterminé à ce stade.

- Si l'atome est dans l'état excité, il peut tomber sur l'état fondamental en émettant un photon. La probabilité pour que cette émission se produise pendant  $dt$  est la somme de deux termes. D'une part, même si aucun photon n'est initialement présent, l'atome peut passer de  $e$  à  $g$  par émission spontanée (figure 4) avec la probabilité :

$$dP_{e \rightarrow g}|_{\text{spont.}} = A dt, \quad (4)$$

c'est-à-dire une loi qui, comme Einstein le remarque, est identique à celle de la décroissance radioactive. D'autre part, l'émission peut être

2. Nous utiliserons fréquemment la dénomination usuelle *fréquence* pour la quantité  $\omega$ , bien qu'il s'agisse en réalité d'une *pulsation*, la fréquence étant  $\omega/2\pi$ .

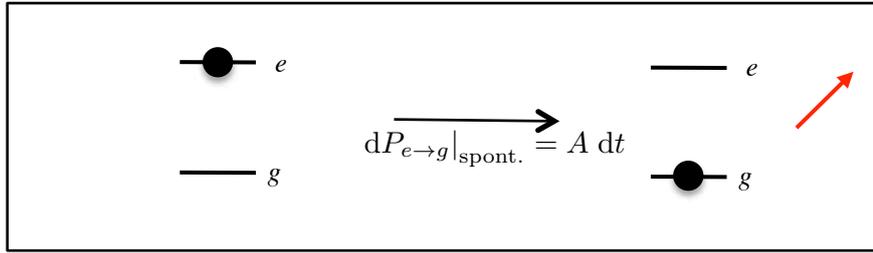


FIGURE 4. Processus d'émission spontanée : le photon est émis dans une direction aléatoire.

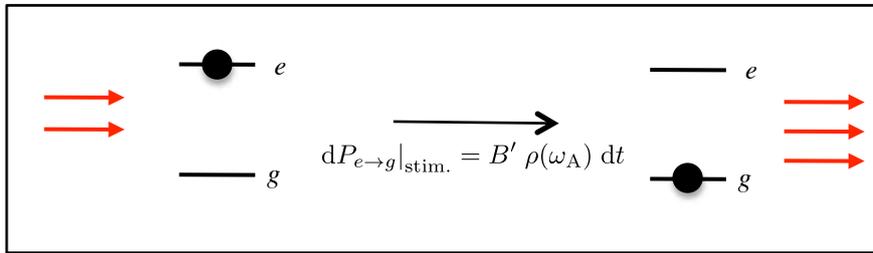


FIGURE 5. Processus d'émission stimulée.

stimulée par le rayonnement déjà présent à la fréquence atomique, avec une probabilité

$$dP_{e \to g}|_{\text{stim.}} = B' \rho(\omega_A) dt. \quad (5)$$

L'évolution des probabilités  $P_{g,e}$  est alors donnée par une équation de taux :

$$\frac{dP_g}{dt} = -B \rho(\omega_A) P_g + [A + B' \rho(\omega_A)] P_e, \quad P_g + P_e = 1, \quad (6)$$

qui entraîne que ces probabilités tendent vers l'état stationnaire

$$P_g = \frac{A + B' \rho(\omega_A)}{A + (B + B') \rho(\omega_A)}, \quad P_e = \frac{B \rho(\omega_A)}{A + (B + B') \rho(\omega_A)}, \quad (7)$$

avec le temps caractéristique

$$\tau_{\text{int.}} = [A + (B + B') \rho(\omega_A)]^{-1}. \quad (8)$$

L'indice "int." signifie qu'il s'agit ici du temps de mise à l'équilibre des variables internes, différent de celui que nous rencontrerons plus loin pour la mise à l'équilibre du centre de masse de l'atome.

## 1-2 Contraintes sur les coefficients d'Einstein

La comparaison de l'état stationnaire trouvé en (7) avec le résultat attendu pour l'équilibre thermodynamique (2) entraîne la contrainte suivante

$$\frac{B \rho(\omega_A)}{A + B' \rho(\omega_A)} = \exp(-\hbar\omega_A/k_B T), \quad (9)$$

qui doit être satisfaite à toute température  $T$ , les coefficients  $A, B, B'$  étant quant à eux indépendants de la température.

Prenons d'abord la limite haute température, pour laquelle  $\rho(\omega) \rightarrow +\infty$  : on en déduit immédiatement :

$$B' = B. \quad (10)$$

Les processus d'absorption et d'émission stimulée sont donc intimement liés.

Plus généralement, la contrainte (9) pourra être satisfaite si la densité d'énergie  $\rho(\omega_A)$  du rayonnement est égale à :

$$\rho(\omega_A) = \frac{A/B'}{\exp(\hbar\omega_A/k_B T) - 1}. \quad (11)$$

Cette relation est compatible avec la loi de Planck donnée en (1) pourvu que le rapport  $A/B'$  soit égal à

$$\frac{A}{B'} = \frac{\hbar\omega_A^3}{\pi^2 c^3}. \quad (12)$$

Avec les contraintes (10) et (12), les hypothèses d'Einstein concernant l'absorption et l'émission de lumière par l'atome conduisent donc bien à une mise en équilibre thermodynamique des populations des niveaux d'énergie atomiques avec le rayonnement du corps noir. Einstein conclut son article de 1916 en remarquant que, bien que la vérification de cette mise à l'équilibre ne constitue pas une preuve de validité rigoureuse des hypothèses (3-4-5), il y a une forte probabilité pour que ces processus soient effectivement à la base d'une future construction théorique. Par ailleurs, il note que les coefficients  $A, B$  et  $B'$  pourraient être calculables *ab initio*, et donc les relations (10,12) testées, si l'on disposait « d'une version modifiée de l'électrodynamique et de la mécanique compatible avec l'hypothèse quantique ». C'est précisément ce que nous allons faire au paragraphe suivant.

**Remarque : le cas de niveaux dégénérés.** Dans son étude, Einstein considère également le cas où les niveaux d'énergie sont dégénérés. En notant  $d_e$  et  $d_g$  ces dégénérescences, un raisonnement similaire au précédent conduit à

$$d_g B = d_e B', \quad \frac{A}{B'} = \frac{\hbar \omega_A^3}{\pi^2 c^3}. \quad (13)$$

Nous rencontrons plus loin le cas d'une transition  $J_g = 0 \leftrightarrow J_e = 1$ , pour laquelle  $d_g = 1$  et  $d_e = 3$ . L'équation d'évolution de la population  $P_g$  du niveau  $g$ , donnée en (6) pour un système à deux niveaux, devient alors en utilisant  $B = 3B'$  :

$$\frac{dP_g}{dt} = A \left\{ -3 \frac{B'}{A} \rho(\omega_A) P_g + \sum_j \left[ 1 + \frac{B'}{A} \rho(\omega_A) \right] P_{e,j} \right\}, \quad (14)$$

où l'indice  $j$  repère les trois sous-niveaux composant le niveau excité  $e$ . Nous verrons un peu plus loin [eq. (33)] une écriture plus compacte de cette relation en terme de nombre de photons par mode.

## 2 L'approche quantique

Dans ce paragraphe, nous allons reformuler le traitement d'Einstein pour l'absorption et l'émission de lumière par un atome dans un champ lumineux isotrope et incohérent, en nous appuyant sur le formalisme quantique « moderne ». Nous allons utiliser la notion de nombre moyen  $\bar{n}$  de photons par mode, légèrement plus facile à manipuler que la densité d'énergie  $\rho$ , et considérer une transition atomique réaliste pour laquelle nous pourrions traiter l'interaction atome-champ à partir de la règle d'or de Fermi.

### 2-1 Densité d'énergie et nombre de photons par mode

Pour retrouver en langage quantique « moderne » les coefficients  $A$  et  $B$  introduits par Einstein, commençons par relier la densité d'énergie  $\rho(\omega)$  au nombre moyen de photons par mode  $\bar{n}$  pour un champ électromagnétique confiné dans une boîte de volume  $L^3$ . On considère des conditions aux limites périodiques dans cette boîte, de sorte que les modes du champ sont repérés par leur vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  et leur polarisation  $\epsilon$ , avec

$$k_j = \frac{2\pi}{L} n_j, \quad n_j \in \mathbb{Z}, \quad j = x, y, z \quad (15)$$

et  $\epsilon \perp \mathbf{k}$ . L'énergie totale du champ s'écrit en fonction de  $\rho(\omega)$  sous la forme

$$E = L^3 \int_0^{+\infty} \rho(\omega) d\omega \quad (16)$$

et s'exprime d'autre part en terme de l'occupation des modes

$$E = \sum_{\mathbf{k}, \epsilon} \hbar\omega \bar{n}_{\mathbf{k}, \epsilon}, \quad \omega = ck. \quad (17)$$

Remplaçons la somme discrète par une intégrale dans cette dernière expression, et supposons que la population  $\bar{n}_{\mathbf{k}, \epsilon}$  d'un mode ne dépend que de la fréquence  $\omega$  de ce mode, et est indépendante de la polarisation. On a alors

$$E = 2 \times \frac{L^3}{8\pi^3} \int_0^{+\infty} \hbar\omega \bar{n}(\omega) 4\pi k^2 dk, \quad (18)$$

où le facteur 2 correspond à la somme sur les deux polarisations indépendantes associées à un vecteur  $\mathbf{k}$  donné. La comparaison de (16) et (18) donne :

$$\rho(\omega) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \bar{n}(\omega), \quad (19)$$

soit pour la loi de Planck :

$$\bar{n}(\omega, T) = \frac{1}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1}. \quad (20)$$

Si l'on reprend le raisonnement d'Einstein en terme du nombre de photons par mode  $\bar{n}$  plutôt que de la densité d'énergie  $\rho$ , on est alors conduit à remplacer le coefficient  $B$  par le coefficient  $\tilde{B}$  tel que

$$B \rho(\omega_A) = \tilde{B} \bar{n}(\omega_A), \quad \text{c'est-à-dire} \quad \tilde{B} = B \frac{\hbar\omega_A^3}{\pi^2 c^3} \quad (21)$$

et idem pour  $B'$ . Les contraintes (13) pour atteindre l'équilibre thermodynamique se résument alors à :

$$d_g \tilde{B} = d_e \tilde{B}' \quad \text{et} \quad A = \tilde{B}'. \quad (22)$$

## 2-2 Transition atomique modèle

Pour pouvoir prendre en compte de manière satisfaisante la nature vectorielle du champ électromagnétique, il est préférable de considérer une

structure de niveau légèrement plus compliquée que l'atome à deux niveaux de la section précédente. Nous allons nous intéresser ici à une transition entre un niveau fondamental de moment cinétique nul, donc non dégénéré, et un niveau excité de moment cinétique unité, donc dégénéré trois fois (figure 2, droite). Une base possible de ce niveau excité est obtenue en choisissant un trièdre de référence  $\mathbf{u}_j, j = x, y, z$ , et en considérant les trois états Zeeman orthogonaux  $|e_j\rangle$  ayant chacun une projection de moment cinétique nulle le long de l'axe  $j$  :  $(\hat{\mathbf{J}} \cdot \mathbf{u}_j) |e_j\rangle = 0$ .

Le couplage atome-rayonnement s'écrit à l'approximation dipolaire électrique et à l'approximation du champ tournant

$$\hat{V} = d \left( \sum_j \mathbf{u}_j |g\rangle \langle e_j| \right) \cdot \hat{\mathbf{E}}^{(-)} + \text{H.c.} \quad (23)$$

où  $d$  est le dipole atomique réduit caractérisant la transition atomique. L'opérateur champ électrique s'écrit en terme des opérateurs de création ( $a_{\mathbf{k},\epsilon}^\dagger$ ) et de destruction ( $a_{\mathbf{k},\epsilon}$ ) d'un photon dans un mode donné :

$$\hat{\mathbf{E}}^{(-)} = \sum_{\mathbf{k},\epsilon} \mathcal{E}_k a_{\mathbf{k},\epsilon}^\dagger \boldsymbol{\epsilon}, \quad \hat{\mathbf{E}}^{(+)} = \left( \hat{\mathbf{E}}^{(-)} \right)^\dagger, \quad \mathcal{E}_k = i \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 L^3}}. \quad (24)$$

## 2-3 Utilisation de la règle d'or de Fermi

Nous allons maintenant déterminer complètement les coefficients d'Einstein en utilisant l'électrodynamique quantique. Nous allons utiliser la règle d'or de Fermi (Cohen-Tannoudji, Diu, et al. 1973) qui donne, à l'ordre le plus bas non nul, la probabilité par unité de temps pour passer d'un état initial donné vers un continuum d'états.

Décrivons par exemple un processus d'émission, spontanée ou stimulée. L'état initial correspond à l'atome placé dans un de ses états excités  $|e_j\rangle$  en présence d'un état donné du champ électromagnétique. Cet état est caractérisé par l'ensemble des nombres d'occupation  $\{n_{\mathbf{k},\epsilon}\}$  des modes du rayonnement :

$$|\Psi_{\text{ini}}\rangle = |e_j, \{n_{\mathbf{k},\epsilon}\}\rangle. \quad (25)$$

L'état final correspond à l'atome dans son état fondamental, en présence d'un état du champ  $\{n'_{\mathbf{k},\epsilon}\}$  :

$$|\Psi_{\text{fin}}\rangle = |g, \{n'_{\mathbf{k},\epsilon}\}\rangle, \quad (26)$$

où tous les  $n'_{\mathbf{k},\epsilon}$  sont égaux aux  $n_{\mathbf{k},\epsilon}$ , sauf un qui est augmenté d'une unité, correspondant à l'émission d'un photon dans ce mode particulier<sup>3</sup> :

$$n'_{\mathbf{k}_0,\epsilon_0} = n_{\mathbf{k}_0,\epsilon_0} + 1, \quad n'_{\mathbf{k},\epsilon} = n_{\mathbf{k},\epsilon} \quad \text{si } (\mathbf{k}, \epsilon) \neq (\mathbf{k}_0, \epsilon_0). \quad (27)$$

La probabilité de transition par unité de temps depuis l'état  $\Psi_{\text{ini}}$  vers le continuum d'états  $\Psi_{\text{fin}}$  est donnée par la règle d'or de Fermi :

$$\mathcal{P}_{\text{émission}} = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_f \left| \langle \Psi_{\text{fin}} | \hat{V} | \Psi_{\text{ini}} \rangle \right|^2 \delta(E_{\text{fin}} - E_{\text{ini}}), \quad (28)$$

ce qui se calcule de manière explicite en terme d'une somme sur le mode  $\mathbf{k}_0, \epsilon_0$  dont la population a été augmentée d'une unité :

$$\mathcal{P}_{\text{émission}} = \frac{2\pi}{\hbar^2} \sum_{\mathbf{k}_0,\epsilon_0} d^2\mathcal{E}_{\mathbf{k}_0}^2 (\boldsymbol{\epsilon}_0 \cdot \mathbf{u}_j)^2 (n_{\mathbf{k}_0,\epsilon_0} + 1) \delta(\omega_0 - \omega_A), \quad (29)$$

où nous avons utilisé

$$\langle \{n'_{\mathbf{k},\epsilon}\} | a_{\mathbf{k}_0,\epsilon_0}^\dagger | \{n_{\mathbf{k},\epsilon}\} \rangle = \sqrt{n_{\mathbf{k}_0,\epsilon_0} + 1}. \quad (30)$$

Le calcul de la somme (29), que l'on remplace par une intégrale comme en (18), est un « classique » des cours d'optique quantique. Nous supposons comme précédemment que la population moyenne d'un mode  $(\mathbf{k}, \epsilon)$  ne dépend que de la fréquence de ce mode : c'est l'hypothèse d'un état isotrope pour le champ. Donnons simplement le résultat, une fois la moyenne prise sur l'état initial  $\Psi_{\text{ini}}$  :

$$\mathcal{P}_{\text{émission}} = [\bar{n}(\omega_A) + 1] \Gamma, \quad \Gamma = \frac{d^2\omega_A^3}{3\pi\epsilon_0\hbar c^3}, \quad (31)$$

où la quantité  $\Gamma$  est la largeur naturelle de l'état excité, c'est-à-dire la probabilité par unité de temps pour que l'atome se désexcite si le rayonnement est vide de photons.

Un calcul en tout point similaire donne la probabilité par unité de temps pour qu'un atome initialement dans l'état fondamental absorbe un photon et passe dans un des trois états excités :

$$\mathcal{P}_{\text{absorption}} = 3 \bar{n}(\omega_A) \Gamma. \quad (32)$$

3. On ne s'intéresse ici qu'à l'ordre le plus bas, donné par la règle d'or de Fermi. Des processus d'ordre supérieur correspondraient à une diffusion multiple de photons par l'atome, avec plusieurs  $n'_{\mathbf{k},\epsilon}$  différents des  $n_{\mathbf{k},\epsilon}$ .

L'équation d'évolution d'une des populations,  $P_g$  par exemple, est alors donnée par l'équation

$$\dot{P}_g = -3\bar{n}\Gamma P_g + \sum_j (\bar{n} + 1)\Gamma P_{e_j}, \quad (33)$$

où l'on a posé pour simplifier  $\bar{n} \equiv \bar{n}(\omega_A)$ . Cette équation est formellement identique à celle que nous avons écrite en (14) à partir du raisonnement d'Einstein, mais son écriture est nettement plus compacte grâce à l'utilisation de la variable  $\bar{n}$  au lieu de la densité d'énergie  $\rho$ . L'état stationnaire

$$P_g = \frac{\bar{n} + 1}{4\bar{n} + 1}, \quad P_{e_j} = \frac{\bar{n}}{4\bar{n} + 1}, \quad (34)$$

est atteint en un temps de l'ordre de

$$\tau_{\text{int}} = \frac{\Gamma^{-1}}{4\bar{n} + 1}. \quad (35)$$

La structure du résultat, avec les termes d'absorption, d'émission stimulée et d'émission spontanée, correspond bien au résultat pressenti par Einstein avec

$$A = \Gamma. \quad (36)$$

En particulier, à l'équilibre, le rapport entre la population d'un état excité et celle de l'état fondamental :

$$\frac{P_{e_j}}{P_g} = \frac{\bar{n}}{\bar{n} + 1} \quad (37)$$

est égale au résultat attendu

$$\frac{P_{e_j}}{P_g} = \exp\left(-\frac{\hbar\omega_A}{k_B T}\right) \quad (38)$$

si on injecte la loi du corps noir donnée en (20).

Le traitement que nous venons de faire répond donc au souhait d'Einstein quand il écrivait la phrase déjà citée : les coefficients  $A$  et  $B$  peuvent effectivement être calculés *ab initio*, et donc la relation (12) testée, car on dispose « d'une version modifiée de l'électrodynamique et de la mécanique, compatible avec l'hypothèse quantique ». En d'autres termes, nous avons vérifié la relation de proportionnalité entre  $A$  et  $B$ , ainsi que la relation  $B = 3B'$  à partir des premiers principes de l'électrodynamique quantique. La cohérence de l'interaction matière-rayonnement et de la thermodynamique est donc bien assurée, au moins en ce qui concerne la dynamique atomique interne.

### 3 Le mouvement brownien

Dans le paragraphe précédent, nous nous sommes intéressés à la manière selon laquelle les variables atomiques internes, c'est-à-dire les populations des états  $g$  et  $e$ , atteignaient l'équilibre thermique compatible avec la température imposée par le rayonnement du corps noir. Dans la suite de cet article, nous allons considérer le mouvement du centre de masse de l'atome et vérifier que l'état stationnaire de ce mouvement est également compatible avec l'équilibre thermique à température  $T$ . Plus précisément, nous voulons vérifier que la distribution de probabilité stationnaire pour l'impulsion de l'atome est la gaussienne

$$\mathcal{P}_{\text{stat.}}(\mathbf{p}) \propto e^{-p^2/2p_0^2} \quad (39)$$

avec

$$\frac{p_0^2}{2M} = \frac{1}{2}k_B T. \quad (40)$$

La thermalisation de l'atome dans le rayonnement résulte de la succession des processus d'absorption et d'émission de photons par l'atome. Comme chaque processus s'accompagne d'un changement de l'impulsion du centre de masse atomique, la situation est voisine de celle du mouvement brownien : l'atome joue le rôle de la particule brownienne et les photons du rayonnement du corps noir jouent le rôle des molécules du fluide. Les outils développés pour l'étude du mouvement brownien sont donc tout à fait adaptés pour étudier le problème qui nous intéresse ici et nous allons les résumer brièvement dans les paragraphes qui suivent [pour en savoir plus, on pourra consulter par exemple l'ouvrage de Van Kampen (1992)]. Nous reviendrons ensuite au problème de la thermalisation de l'atome dans le rayonnement thermique.

#### 3-1 L'approche « équation de Langevin »

On suppose dans le cadre de cette approche que l'équation du mouvement de la particule brownienne comporte deux forces :

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\alpha\mathbf{p} + \mathbf{F}(t). \quad (41)$$

La première force, déterministe, correspond à un frottement fluide qui amortit l'impulsion en une durée caractéristique  $\alpha^{-1}$ . La seconde force

$\mathbf{F}(t)$ , appelée *force de Langevin*, est aléatoire et caractérisée par ses propriétés statistiques. L'équation (41) est donc une équation différentielle stochastique.

En pratique, on impose les deux premiers moments de la force aléatoire  $\mathbf{F}(t)$  :

$$\langle \mathbf{F}(t) \rangle = 0, \quad \langle F_i(t)F_j(t') \rangle = 2D_p \delta_{i,j} \delta(t - t'), \quad i, j = x, y, z, \quad (42)$$

où les moyennes sont prises sur différentes réalisations du désordre associé aux positions et vitesses des molécules du fluide. Le coefficient  $D_p$  est appelé *coefficient de diffusion en impulsion*, pour une raison qui va apparaître un peu plus loin.

Nous allons maintenant montrer que les deux coefficients  $\alpha$  et  $D_p$  intervenant dans (41-42) sont reliés si l'on impose que l'état stationnaire de la distribution en impulsion de la particule corresponde à l'équilibre thermique, c'est-à-dire :

$$\left\langle \frac{p_i^2}{2M} \right\rangle = \frac{1}{2} k_B T, \quad i = x, y, z. \quad (43)$$

Pour trouver cette relation, intégrons l'équation du mouvement (41) entre l'instant initial  $t = 0$  et un instant  $t$  quelconque :

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}(0) e^{-\alpha t} + \int_0^t e^{-\alpha(t-t')} \mathbf{F}(t') dt'. \quad (44)$$

En moyennant cette équation sur différentes réalisations du désordre, on trouve :

$$\langle \mathbf{p}(t) \rangle = \langle \mathbf{p}(0) \rangle e^{-\alpha t}. \quad (45)$$

L'impulsion moyenne de la particule tend donc vers 0 avec le temps caractéristique  $\alpha^{-1}$ . Considérons maintenant l'évolution du carré d'une composante de l'impulsion et prenons à nouveau la moyenne sur le désordre :

$$\begin{aligned} \frac{d\langle p_j^2(t) \rangle}{dt} &= 2\langle p_j(t) \frac{dp_j}{dt} \rangle \\ &= -2\alpha \langle p_j^2(t) \rangle + 2\langle p_j(t) F_j(t) \rangle. \end{aligned} \quad (46)$$

Le deuxième terme se calcule<sup>4</sup> en injectant le résultat (44) :

$$\begin{aligned}\langle p_j(t)F_j(t) \rangle &= \langle p_j(0)F_j(t) \rangle e^{-\alpha t} + \int_0^t e^{-\alpha(t-t')} \langle F_j(t')F_j(t) \rangle dt' \\ &= 0 + 2D_p \int_0^t e^{-\alpha\tau} \delta(\tau) d\tau \\ &= D_p \quad (\text{pour } t > 0).\end{aligned}\tag{47}$$

L'impulsion quadratique moyenne évolue donc sous l'effet de deux termes :

$$\frac{d\langle p_j^2(t) \rangle}{dt} = -2\alpha \langle p_j^2(t) \rangle + 2D_p.\tag{48}$$

Le premier terme correspond à une décroissance exponentielle due à la dissipation, et le second correspond à une croissance linéaire en temps due aux fluctuations de la force de Langevin. La pente de cette croissance est  $2D_p$ , d'où l'appellation *coefficient de diffusion en impulsion* pour  $D_p$ . L'équilibre entre dissipation et fluctuations est atteint en un temps caractéristique  $(2\alpha)^{-1}$  et correspond à

$$\langle p_j^2 \rangle_{\text{stat.}} = \frac{D_p}{\alpha}.\tag{49}$$

Si le bain de molécules dans lequel la particule brownienne est plongée est à la température  $T$ , l'équilibre thermodynamique (43) sera atteint si

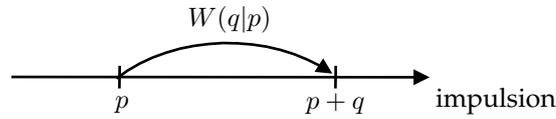
$$\frac{\langle p_j^2 \rangle}{2M} = \frac{1}{2}k_B T \quad \Rightarrow \quad \frac{D_p}{M\alpha} = k_B T.\tag{50}$$

Deux situations sont alors possibles :

- Dans une modélisation phénoménologique du mouvement brownien, on peut estimer le coefficient de friction  $\alpha$  à partir de la loi de Stokes, et on impose la valeur du coefficient de diffusion en impulsion pour que (50) soit satisfaite.
- Si on dispose d'un modèle microscopique de l'interaction entre particule brownienne et molécules du fluide, on peut calculer séparément  $\alpha$  et  $D_p$  : la vérification de la relation (50) est alors un test de la cohérence du modèle.

C'est cette deuxième éventualité que nous allons rencontrer dans ce qui suit. Nous serons donc en mesure de faire ce « test de cohérence » pour la thermalisation du mouvement atomique dans le rayonnement du corps noir.

4. On utilise la relation  $\int_0^\infty f(x) \delta(x) dx = \frac{1}{2}f(0)$ .



**FIGURE 6.** Marche aléatoire dans l'espace des impulsions (modèle unidimensionnel) ; la quantité  $W(q|p)$  représente la probabilité de transition par unité de temps pour un saut d'amplitude  $q$  partant de l'impulsion  $p$ .

### 3-2 L'approche « équation de Fokker–Planck »

L'approche en terme d'équation de Langevin nous a permis de déterminer les deux premiers moments de la distribution en impulsion. On pourrait itérer cette démarche pour obtenir tous les moments, caractériser ainsi l'état stationnaire et vérifier qu'il s'agit bien d'une gaussienne. Toutefois, il est plus rapide d'utiliser pour cela une autre approche, consistant à établir l'équation d'évolution de la distribution en impulsion  $\mathcal{P}(p, t)$ .

Pour simplifier l'écriture, considérons un problème à une dimension de sorte que l'impulsion  $p$  est maintenant un scalaire. Nous nous intéressons à une classe de problèmes pour lesquels l'évolution de  $\mathcal{P}(p, t)$  est décrite par une équation pilote du type

$$\frac{\partial \mathcal{P}(p, t)}{\partial t} = - \left( \int W(q|p) dq \right) \mathcal{P}(p, t) + \int W(q|p - q) \mathcal{P}(p - q, t) dq. \quad (51)$$

La signification de cette équation est la suivante. La particule brownienne étant initialement dans l'état  $p$ , elle a la probabilité  $W(q|p) dt$  de gagner l'impulsion  $q$  pendant l'intervalle de temps  $dt$ . La quantité  $W(q|p)$  est donc la probabilité de transition par unité de temps pour un saut d'amplitude  $q$  partant de  $p$  (figure 6). Le premier terme de (51) correspond au départ total depuis la classe d'impulsion  $p$  par des gains d'impulsion  $q$ . Le deuxième terme correspond à l'alimentation de la classe d'impulsion  $p$  par des sauts d'amplitude  $q$  partant de l'impulsion  $p - q$ . On vérifiera que la normalisation de  $\mathcal{P}(p, t)$ , c'est-à-dire  $\int \mathcal{P}(p, t) dp = 1$ , est bien préservée par cette évolution.

Toute la physique du problème est contenue dans le choix de la fonction  $W(q|p)$ . Par exemple, pour un problème présentant de la friction fluide, cette fonction devra être telle que, pour  $p > 0$ , les sauts avec  $q < 0$  seront favorisés par rapport aux sauts avec  $q > 0$  (et inversement pour une impulsion  $p < 0$ ), pour que l'impulsion de la particule soit en moyenne ramenée vers 0.

Faisons maintenant l'hypothèse de sauts d'amplitude faible : nous supposons plus précisément que  $W(q|p)$  est piquée autour de la valeur  $q = 0$  avec une largeur caractéristique  $q_c$ , tout en variant doucement avec l'impulsion de départ  $p$ . Supposons par ailleurs que la distribution en impulsion  $\mathcal{P}$  est une fonction lentement variable de  $p$  à l'échelle de  $q_c$ . En particulier  $q_c$  doit être petit devant la largeur  $\sqrt{Mk_B T}$  attendue pour  $\mathcal{P}(p)$  à l'équilibre thermodynamique. Nous allons donc faire un développement du terme intervenant dans le deuxième membre de (51) :

$$\begin{aligned} W(q|p - q) \mathcal{P}(p - q, t) &= W(q|p) \mathcal{P}(p, t) - q \frac{\partial}{\partial p} [W(q|p) \mathcal{P}(p, t)] \\ &+ \frac{q^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial p^2} [W(q|p) \mathcal{P}(p, t)] + \dots \end{aligned} \quad (52)$$

On peut bien sûr pousser ce développement à un ordre arbitrairement élevé (développement de Kramers–Moyal), mais l'ordre deux sera suffisant pour ce qui suit. Injectons ce développement dans l'équation pilote (51). On obtient alors pour  $\mathcal{P}(p, t)$  l'équation aux dérivées partielles (équation de Fokker–Planck) :

$$\frac{\partial \mathcal{P}(p, t)}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial p} [\mathcal{F}(p) \mathcal{P}(p, t)] + \frac{\partial^2}{\partial p^2} [\mathcal{D}(p) \mathcal{P}(p, t)], \quad (53)$$

avec

$$\mathcal{F}(p) = \int q W(q|p) dq, \quad \mathcal{D}(p) = \frac{1}{2} \int q^2 W(q|p) dq. \quad (54)$$

Le premier terme de (53) correspond à l'évolution de la densité de probabilité  $\mathcal{P}(p, t)$  sous l'effet de la force  $\mathcal{F}(p)$ . Pour s'en convaincre, on peut évaluer l'évolution de l'impulsion moyenne  $\langle p(t) \rangle = \int p \mathcal{P}(p, t) dp$  pour une distribution de probabilité relativement piquée autour de  $p_0$ . On trouve après une intégration par parties :

$$\frac{d\langle p \rangle}{dt} = \int \mathcal{F}(p) \mathcal{P}(p, t) dp \approx \mathcal{F}(p_0). \quad (55)$$

Le second terme de (53) correspond à une diffusion dans l'espace des impulsions. Pour le montrer, considérons à nouveau une distribution piquée autour de  $p_0$  et étudions l'évolution de l'impulsion quadratique moyenne :

$$\begin{aligned} \frac{d\langle p^2 \rangle}{dt} &= 2 \int p \mathcal{F}(p) \mathcal{P}(p, t) dp + 2 \int \mathcal{D}(p) \mathcal{P}(p, t) dp, \\ &\approx 2p_0 \mathcal{F}(p_0) + 2\mathcal{D}(p_0). \end{aligned} \quad (56)$$

On retrouve effectivement une structure similaire à celle obtenue en (48) par l'approche équation de Langevin, avec les deux contributions de la force moyenne et de la diffusion en impulsion.

À ce stade, la classe de problèmes décrits par l'équation de Fokker-Planck est plus générale que celle décrite par l'équation de Langevin (41), puisque la force déterministe  $\mathcal{F}$  n'est pas nécessairement linéaire en impulsion et le coefficient de diffusion  $\mathcal{D}$  n'est pas nécessairement constant. Nous verrons dans la suite de ce cours que cette généralisation peut être très utile quand il s'agit de modéliser certains types de refroidissement lumineux. Pour l'instant, nous pouvons nous restreindre au cas simple

$$\mathcal{F}(p) = -\alpha p, \quad \mathcal{D}(p) = D_p, \quad (57)$$

et modéliser le mouvement brownien par l'équation de Fokker-Planck linéaire :

$$\frac{\partial \mathcal{P}(p, t)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial (p \mathcal{P}(p, t))}{\partial p} + D_p \frac{\partial^2 \mathcal{P}(p, t)}{\partial p^2}. \quad (58)$$

Une solution stationnaire de cette équation est la gaussienne

$$\mathcal{P}_{\text{stat.}}(p) = \frac{1}{p_0 \sqrt{2\pi}} e^{-p^2/2p_0^2}, \quad \text{avec } p_0^2 = \frac{D_p}{\alpha}, \quad (59)$$

ce qui correspond bien à la distribution de Maxwell-Boltzmann attendue pour une particule en contact avec un réservoir à température  $T$ , pourvu que  $k_B T = D_p / (M\alpha)$  [cf. (50)].

## 4 Einstein 1917 : thermalisation du gaz

Dans son article de 1917, Einstein reprend les arguments développés en 1916 pour dégager les trois processus élémentaires de l'interaction atome-rayonnement : absorption, émission stimulée, émission spontanée. Il développe un raisonnement qui va venir conforter ses conclusions de 1916 : si l'on admet que ces trois processus sont présents, alors non seulement les variables atomiques internes (populations  $P_{g,e}$ ) atteignent l'état d'équilibre thermique attendu, mais également la distribution en impulsion  $\mathcal{P}(p)$  du centre de masse de l'atome. Pour établir ce résultat, Einstein développe un formalisme qui est le parent direct du refroidissement Doppler tel qu'on le met en œuvre dans les expériences modernes. Le but de ce paragraphe est

de présenter l'argument d'Einstein, avec des outils qui sont directement transposables à l'étude du refroidissement d'atomes par laser.

Nous allons utiliser ici une approche inspirée du mouvement brownien, en décomposant l'action mécanique du rayonnement sur l'atome en deux parties, d'une part une force de friction  $-\alpha\mathbf{p}$ , d'autre part une diffusion en impulsion caractérisée par le coefficient  $D_p$ . Nous allons calculer séparément les deux coefficients  $\alpha$  et  $D_p$ , puis vérifier que l'équilibre atteint correspond bien à ce qui est attendu, c'est-à-dire que  $D_p/\alpha = Mk_{\text{B}}T$ , où  $T$  est la température du corps noir. En pratique, le calcul du coefficient de diffusion est plus simple que celui du coefficient de friction et nous allons donc commencer par lui.

## 4-1 Diffusion en impulsion de l'atome

Considérons un atome initialement au repos ( $\mathbf{p} = 0$ ). Si l'image du mouvement brownien est correcte, l'évolution de son impulsion quadratique moyenne sous l'effet des chocs aléatoires constitués par les processus élémentaires d'absorption et d'émission est donnée par

$$\frac{d\langle p_j^2(t) \rangle}{dt} = -2\alpha\langle p_j^2(t) \rangle + 2D_p. \quad (60)$$

L'impulsion quadratique moyenne commence donc par croître linéairement avec une pente  $D_p$  pour saturer aux temps longs à la valeur  $D_p/\alpha$ .

Considérons un temps  $\Delta t$  suffisamment court pour la contribution de la friction  $-2\alpha\langle p_j^2(t) \rangle$  soit négligeable devant la diffusion, mais suffisamment long pour que plusieurs processus élémentaires puissent avoir lieu (nous vérifierons *a posteriori* qu'un tel intervalle de temps existe). Le taux  $R$  avec lequel ces processus se produisent vaut :

$$R = 3\bar{n}\Gamma P_g + \sum_j (\bar{n} + 1)\Gamma P_{e_j}. \quad (61)$$

En utilisant les valeurs stationnaires des populations données en (34), nous obtenons

$$R = 6\Gamma \frac{\bar{n}(\bar{n} + 1)}{4\bar{n} + 1}. \quad (62)$$

Pendant l'intervalle de temps  $\Delta t$ ,  $\Delta N = R \Delta t$  processus élémentaires vont se produire, chacun correspondant à un choc transférant à l'atome une impulsion de module  $\hbar k$  dans une direction aléatoire. L'impulsion de l'atome

effectue donc une marche aléatoire de pas  $\hbar k$  et de taux  $R$ . Au bout du temps  $\Delta t$ , l'impulsion moyenne de l'atome reste nulle, mais l'impulsion quadratique moyenne selon une des trois directions de l'espace a augmenté de

$$\langle p_j^2(\Delta t) \rangle = \frac{1}{3} \hbar^2 k^2 \Delta N, \quad (63)$$

On en déduit le coefficient de diffusion en impulsion

$$D_p = \frac{1}{2} \frac{\langle p_j^2(\Delta t) \rangle}{\Delta t}, \quad \text{ou encore} \quad D_p = \hbar^2 k^2 \Gamma \frac{\bar{n}(\bar{n} + 1)}{4\bar{n} + 1}. \quad (64)$$

## 4-2 Force de friction agissant sur l'atome

Considérons maintenant un atome en mouvement à la vitesse  $v = p/M$ . Nous supposons  $v \ll c$  de sorte que la particule est non relativiste. L'origine de la force de friction est l'effet Doppler : dans le référentiel  $\mathcal{R}$  en mouvement avec l'atome, le rayonnement du corps noir n'est pas isotrope, contrairement à ce que l'on trouve dans le référentiel du laboratoire. Or l'atome « sonde » le rayonnement dans  $\mathcal{R}$  à sa fréquence de résonance  $\omega_A$  ; il va donc interagir avec des modes du champ qui ne sont pas tous peuplés de manière égale.

Considérons par exemple deux modes de directions opposées, l'un allant dans le même sens que l'atome, l'autre dans le sens opposé, susceptibles d'interagir avec l'atome. Le mode allant dans le même sens que l'atome a pour fréquence  $\omega_A$  dans le référentiel atomique, donc  $\omega_A(1 + v/c)$  dans le référentiel du laboratoire. Le mode allant dans le sens opposé à l'atome a lui aussi pour fréquence  $\omega_A$  dans le référentiel atomique, donc  $\omega_A(1 - v/c)$  dans le référentiel du laboratoire. Or, le nombre de photons par mode  $\bar{n}(\omega)$  est une fonction décroissante de  $\omega$  pour le rayonnement du corps noir. Par conséquent

$$\bar{n}[\omega_A(1 - v/c)] > \bar{n}[\omega_A(1 + v/c)]. \quad (65)$$

L'atome en mouvement « voit » plus de photons résonnants venir à sa rencontre que de photons allant dans le même sens que lui : il y aura donc plus de chocs diminuant la vitesse atomique que de chocs qui l'augmentent : c'est l'origine de la force de friction.

Pour une évaluation quantitative du coefficient de friction  $\alpha$ , prenons un atome bougeant selon une direction de l'espace,  $z$  par exemple. Notons

$v_z$  sa vitesse et supposons cet atome dans l'état fondamental  $g$ . Le changement moyen d'impulsion pendant un intervalle de temps infinitésimal  $\Delta t$  se calcule en utilisant un formalisme très similaire à celui qui nous a permis d'évaluer les probabilités d'absorption et d'émission à partir de la règle d'or de Fermi. Il s'obtient en considérant tous les gains d'impulsion  $\hbar\mathbf{k}$  résultant de l'absorption d'un photon dans un mode donné du champ  $\mathbf{k}_0, \epsilon_0$ , accompagnée du passage de l'atome dans l'état  $e_j, j = x, y, z$  :

$$\Delta p_z = \Delta t \frac{2\pi}{\hbar^2} \sum_j \sum_{\mathbf{k}_0, \epsilon_0} \hbar k_z \left| \langle e_j, \{n'_{\mathbf{k}, \epsilon}\} | \hat{V} | g, \{n_{\mathbf{k}, \epsilon}\} \rangle \right|^2 \delta(\omega_0 - \omega_{\text{at}}). \quad (66)$$

La distribution de Dirac  $\delta(\omega_0 - \omega_{\text{at}})$  vient sélectionner les modes de fréquence  $\omega_{\text{A}}$  dans le référentiel atomique<sup>5</sup>, donc de fréquence  $\omega_{\text{A}} + k_z v_z$  dans le référentiel du laboratoire. La population d'un mode correspondant à cette résonance vaut

$$\bar{n}(\omega_{\text{A}} + k_z v_z) \approx \bar{n}(\omega_{\text{A}}) + k_z v_z \left. \frac{\partial \bar{n}}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_{\text{A}}}. \quad (67)$$

Le calcul de la somme sur les modes se fait alors d'une manière similaire à celui des taux d'absorption et d'émission. Après une algèbre quelque peu fastidieuse, on trouve pour les processus d'absorption :

$$\frac{\Delta p_z}{\Delta t} = \hbar k^2 \Gamma \frac{\partial \bar{n}}{\partial \omega} v_z \quad (68)$$

et un résultat identique, mais de signe opposé, pour les processus d'émission après moyenne sur les trois états  $e_j$ . Au final, en pondérant les changements d'impulsion entre absorption et émission par les populations stationnaires (34), on arrive à la force de friction :

$$F_z = -\alpha p_z \quad \text{avec} \quad \alpha = -\frac{\hbar k^2}{M} \frac{\Gamma}{4\bar{n} + 1} \frac{\partial \bar{n}}{\partial \omega}. \quad (69)$$

Le coefficient de friction est donc directement proportionnel à la dérivée de la population des modes par rapport à la fréquence, autour de la fréquence de résonance atomique. Ce résultat confirme l'intuition basée sur l'effet Doppler discutée plus haut [cf. (65)] : c'est le différentiel entre la population des modes allant dans le même sens que l'atome et ceux s'opposant à son mouvement qui crée la force de friction.

5. On peut également faire le raisonnement directement dans le référentiel du laboratoire. La distribution de Dirac exprimant la conservation de l'énergie sélectionne alors des modes de pulsation  $\omega$  tel que  $E_i - E_f = [\mathbf{p}^2/2M + \hbar\omega] - [(\mathbf{p} + \hbar\mathbf{k})^2/2M + \hbar\omega_{\text{A}}] = 0$ , ce qui revient à prendre  $\omega = \omega_{\text{A}} + k_z v_z$ , à l'énergie de recul  $\hbar^2 k^2/2M$  près, qui joue ici un rôle négligeable.

### 4-3 Equilibre thermique ?

Nous sommes maintenant en mesure d'appliquer les résultats généraux de la théorie du mouvement brownien : le mouvement de l'atome est caractérisé par un coefficient de friction  $\alpha$  et un coefficient de diffusion en impulsion  $D_p$ , de sorte que la distribution d'impulsion à l'équilibre est une gaussienne à laquelle on peut associer une température effective

$$k_B T_{\text{eff}} = \frac{D_p}{M\alpha} = \hbar \frac{\bar{n}(\bar{n} + 1)}{\left| \frac{\partial \bar{n}}{\partial \omega} \right|}. \quad (70)$$

Si l'on injecte dans cette relation l'occupation des modes pour le rayonnement du corps noir :

$$\bar{n} = \frac{1}{\exp(\hbar\omega/k_B T) - 1}, \quad (71)$$

on vérifie que le modèle est bien cohérent sur le plan thermodynamique, c'est-à-dire que la température effective associée à la distribution en impulsion de l'atome coïncide avec la température du corps noir :

$$T_{\text{eff}} = T. \quad (72)$$

Pour Einstein, ce résultat constituait la confirmation des hypothèses faites sur la nature des échanges entre atomes et rayonnement. L'argument de 1916, qui portait sur les populations des états internes de l'atome, ne concernait que l'énergie. Au contraire, pour ce problème de la thermalisation, il est essentiel de poser que l'impulsion de l'atome augmente ou diminue de  $\hbar k$  quand l'atome absorbe ou émet un photon. Einstein concluait son article sur deux remarques prémonitoires. D'une part, tout en reconnaissant les « faiblesses » de son modèle dans lequel « les instants et les directions des processus élémentaires y sont livrés au hasard », il indiquait « j'ai pleinement confiance dans la sûreté de la démarche ici suivie ». Par ailleurs, il remarquait que presque toutes les théories du rayonnement thermique ne prenaient en compte que les échanges d'énergie entre lumière et matière, mais pas les échanges d'impulsion : « On s'y croit volontiers autorisé par le fait que les impulsions que transfère le rayonnement sont petites, et donc en réalité presque toujours négligeables devant les autres causes du mouvement ». Il continuait ensuite sur l'importance de prendre ces échanges d'impulsion en compte sur le plan théorique pour une théorie justifiée. Le refroidissement d'atomes par la lumière montre qu'il est également essentiel de prendre ces échanges en compte sur le plan pratique !

## 4-4 Ordres de grandeur et critère de validité

Nous avons obtenu dans ce qui précède la valeur du coefficient de friction pour le mouvement d'un atome dans le rayonnement d'un corps noir [eq. (69)]. Considérons un atome de sodium et modélisons cet atome par sa raie de résonance à  $\lambda = 589$  nm. La température nécessaire pour atteindre  $k_B T = \hbar\omega$  est considérable, de l'ordre de 25 000 Kelvins. Même s'il s'agit d'une situation peu réaliste (y compris en ce qui concerne notre modélisation sous forme d'atome à deux niveaux), on peut calculer le coefficient de friction correspondant et on trouve un temps  $\alpha^{-1}$  de l'ordre de 10 minutes. Pour un corps noir de température plus raisonnable,  $k_B T \ll \hbar\omega$ , le temps de thermalisation diverge exponentiellement :

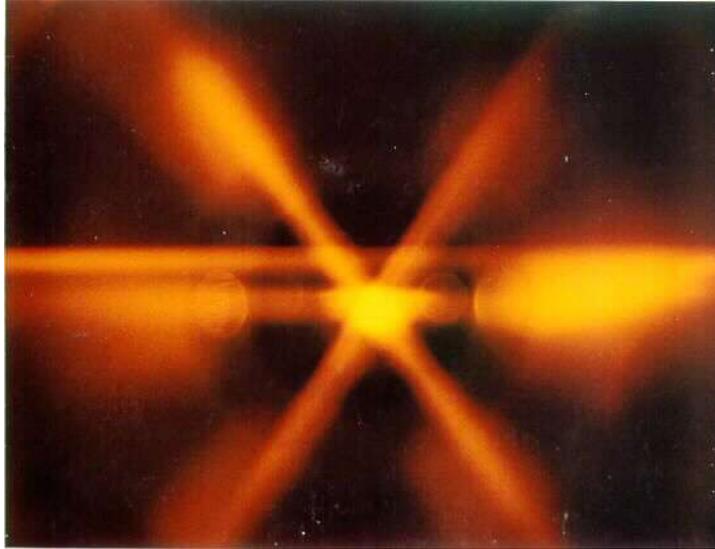
$$\alpha^{-1} \approx \frac{M}{\hbar k^2} \frac{k_B T}{\hbar \Gamma} e^{\hbar\omega/k_B T}. \quad (73)$$

Un corps noir de 6000 Kelvins (un atome proche de la surface de soleil) conduit ainsi à  $\bar{n}(\omega_A) = 0.017$  et à un temps de thermalisation de 40 minutes. La vitesse thermique  $v_0 = \sqrt{k_B T/M}$  correspond dans ce cas à 1500 m/s, et la distance moyenne parcourue pendant un temps de thermalisation vaut 3600 km. Même dans un milieu astrophysique, il est probable que d'autres processus de thermalisation, comme les collisions avec d'autres atomes ou molécules, vont limiter le libre parcours moyen de notre atome de sodium à des valeurs bien inférieures. Tout l'intérêt de l'utilisation de sources laser quasi-résonnantes dans les laboratoires d'atomes froids sera de produire des valeurs de  $|\frac{\partial \bar{n}}{\partial \omega}|$  beaucoup plus grandes, le temps de thermalisation étant alors simplement le premier terme de (73), à savoir  $M/\hbar k^2$ .

Remarquons pour terminer que notre hypothèse de sauts d'amplitude faible, indispensable pour l'approche en terme de mouvement brownien, est bien vérifiée dans cet exemple. La vitesse de recul de l'atome de sodium quand il absorbe ou émet un photon vaut  $v_r = \hbar k/M = 3$  cm/s, ce qui est effectivement très faible devant la largeur caractéristique de la distribution en vitesse thermique à 6000 K, de l'ordre de 1500 m/s.

## 5 Pour conclure : les mélasses optiques modernes

Soixante ans après l'étude d'Einstein que nous avons décrite, deux articles par Hänsch & Schawlow (1975) d'une part et Wineland & Dehmelt



**FIGURE 7.** *Mélasse d'atomes de sodium réalisée dans le groupe de W.D. Phillips (NBS-NIST).*

(1975) d'autre part, sont venus simultanément proposer d'exploiter la lumière des lasers accordables (une nouveauté en 1975 !) pour créer de nouveaux équilibres thermodynamiques. Dans le cadre de l'approche développée ici, le point-clé est qu'un laser monochromatique permet de réaliser une distribution spectrale de lumière avec un  $\frac{\partial \bar{n}}{\partial \omega}$  arbitrairement grand : c'est alors la largeur naturelle  $\Gamma$  du niveau excité de l'atome qui vient remplacer la largeur de la distribution du corps noir, c'est-à-dire

$$\frac{\partial \bar{n}}{\partial \omega} \longrightarrow \frac{\bar{n}}{\Gamma}. \quad (74)$$

En d'autres termes, il n'y a plus de température imposée « de l'extérieur » par la lumière incidente et ce sont les paramètres de la transition atomique utilisée qui déterminent la température d'équilibre.

Comme dans l'article d'Einstein, l'effet Doppler est à la base du refroidissement proposé par Hänsch & Schawlow (1975) et Wineland & Dehmelt (1975). L'approche à suivre pour traiter le problème est donc très similaire à ce que nous avons vu pour le rayonnement du corps noir. On utilise la théorie du mouvement brownien pour déterminer à la fois le coefficient de friction et le coefficient de diffusion. Nous ne détaillerons pas cette approche ici, et nous renvoyons le lecteur intéressé par exemple vers l'article de Gordon & Ashkin (1980). Indiquons simplement les principaux

résultats, en nous limitant à une excitation laser de faible intensité ( $\bar{n} \ll 1$ ). L'expression du coefficient de friction (69) devient en utilisant (74)

$$\alpha \sim \frac{\hbar k^2}{M} \bar{n}. \quad (75)$$

Le coefficient de diffusion est quant à lui inchangé par rapport à (64), soit pour  $\bar{n} \ll 1$  :

$$D_p \sim \hbar^2 k^2 \Gamma \bar{n} \quad (76)$$

Le rapport de ces deux coefficients permet d'arriver immédiatement à la célèbre « limite Doppler » :

$$k_B T \sim \hbar \Gamma, \quad (77)$$

qui correspond pour des atomes alcalins à un domaine de température de l'ordre de la centaine de microkelvins.

Les premières mélasses optiques ont été réalisées par Chu, Hollberg, et al. (1985) peu de temps après qu'on a réussi à arrêter des atomes par pression de radiation (Ertmer, Blatt, et al. 1985; Prodan, Migdall, et al. 1985). La figure 7 montre une image d'une mélasse optique obtenue en 1987 dans le groupe de Bill Phillips avec des atomes de sodium (Lett, Watts, et al. 1988a). Le volume central, de l'ordre du centimètre cube, contient  $10^8$  atomes.

Les premières mesures de température ont semblé confirmer la théorie du refroidissement Doppler (Chu, Hollberg, et al. 1985). Toutefois, on a réalisé assez vite que la situation était en fait plus complexe (et plus riche !). Les mesures précises de Lett, Watts, et al. (1988b) et Lett, Phillips, et al. (1989) ont conduit à des résultats encore plus froids que la prédiction (77) : le refroidissement Doppler ne pouvait à lui seul expliquer le refroidissement observé.

Plusieurs modèles de refroidissement ont alors été développés, notamment le refroidissement Sisyphe (Ungar, Weiss, et al. 1989; Dalibard & Cohen-Tannoudji 1989). Leur point commun est une prise en compte plus fidèle de la structure de la transition atomique, allant au delà du modèle à deux niveaux. Ce fut le point de départ du refroidissement des atomes autour, voire en dessous, de la limite du recul d'un seul photon  $k_B T \sim \hbar^2 k^2 / 2M$  (Chu 1998; Cohen-Tannoudji 1998; Phillips 1998), ce qui a ensuite ouvert la voie à la réalisation de gaz quantiques dégénérés, aussi bien bosoniques que fermioniques (Ketterle 2002; Cornell & Wieman 2002). Une nouvelle étape dans l'histoire déjà très riche de la physique atomique s'ouvrirait alors...

## Références

- Chu, S. (1998), « Nobel Lecture : The manipulation of neutral particles », in *Rev. Mod. Phys.* 70, p. 685.
- Chu, S., L. Hollberg, J. E. Bjorkholm, A. Cable & A. Ashkin (1985), « Three-Dimensional Viscous Confinement and Cooling of Atoms by Resonance Radiation Pressure », in *Phys. Rev. Lett.* 55, p. 48.
- Cohen-Tannoudji, C., B. Diu & F. Laloë (1973), *Mécanique Quantique*, Hermann.
- Cohen-Tannoudji, Claude N. (1998), « Nobel Lecture : Manipulating atoms with photons », in *Rev. Mod. Phys.* 70 (3), pp. 707–719.
- Cornell, E. A. & C. E. Wieman (2002), « Nobel Lecture : Bose–Einstein condensation in a dilute gas, the first 70 years and some recent experiments », in *Rev. Mod. Phys.* 74.3, pp. 875–893.
- Dalibard, J. & C. Cohen-Tannoudji (1989), « Laser cooling below the Doppler limit by polarization gradients : simple theoretical models », in *J. Opt. Soc. Am. B* 6, p. 2023.
- Einstein, Albert (1916), « Strahlungs-emission und absorption nach der quantentheorie », in *Deutsche Physikalische Gesellschaft* 18, pp. 318–323.
- Einstein, Albert (1917), « Zur Quantentheorie der Strahlung [traduction française par F. Balibar, B. Jech et O. Darrigol] », in *Physikalische Zeitschrift* 18, p. 121.
- Ertmer, W., R. Blatt, J. L. Hall & M. Zhu (1985), « Laser Manipulation of Atomic Beam Velocities : Demonstration of Stopped Atoms and Velocity Reversal », in *Phys. Rev. Lett.* 54, p. 996.
- Gordon, J. P. & A. Ashkin (1980), « Motion of atoms in a radiation trap », in *Phys. Rev. A* 21.5, pp. 1606–1617.
- Hänsch, T. W. & A. L. Schawlow (1975), « Cooling of gases by laser radiation », in *Optics Comm.* 13, p. 68.
- Ketterle, W. (2002), « Nobel lecture : When atoms behave as waves : Bose–Einstein condensation and the atom laser », in *Rev. Mod. Phys.* 74.4, pp. 1131–1151.
- Lett, P. D., W. D. Phillips, S. L. Rolston, C. E. Tanner, R. N. Watts & C. I. Westbrook (1989), « Optical Molasses », in *J. Opt. Soc. Am. B* 6, p. 2084.
- Lett, P. D., R. N. Watts, C. I. Westbrook, W. D. Phillips, P. L. Gould & H. J. Metcalf (1988a), « Observation of Atoms Laser Cooled below the Doppler Limit », in *Phys. Rev. Lett.* 61, p. 169.
- (1988b), « Observation of Atoms Laser Cooled below the Doppler Limit », in *Phys. Rev. Lett.* 61, p. 169.

## §5. Pour conclure : les mélasses optiques modernes

---

- Phillips, W. D. (1998), « Nobel Lecture : Laser cooling and trapping of neutral atoms », in *Rev. Mod. Phys.* 70, p. 721.
- Planck, Max Karl Ernst Ludwig (1900), « Über eine Verbesserung der Wienschen Spectralgleichung », in *Verhandl. Dtsc. Phys. Ges.* 2, p. 202.
- Prodan, John, Alan Migdall, William D. Phillips, Ivan So, Harold Metcalf & Jean Dalibard (1985), « Stopping Atoms with Laser Light », in *Phys. Rev. Lett.* 54 (10), pp. 992–995.
- Ungar, P. J., D. S. Weiss, E. Riis & S. Chu (1989), « Optical molasses and multilevel atoms : Theory », in *J. Opt. Soc. Am. B* 6, p. 2058.
- Van Kampen, Nicolaas Godfried (1992), *Stochastic processes in physics and chemistry*, vol. 1, Elsevier.
- Wineland, D. J. & H. Dehmelt (1975), « Proposed  $10^{14} \Delta\nu < \nu$  laser fluorescence spectroscopy on  $\text{Ti}^+$  mono-ion oscillator III », in *Bulletin of the American Physical Society* 20, p. 637.