

*Le magnétisme artificiel pour les gaz d'atomes froids*

# Mouvement d'une particule dans un champ magnétique uniforme : les niveaux de Landau

Jean Dalibard

Chaire *Atomes et rayonnement*

Année 2013-14



COLLÈGE  
DE FRANCE  
— 1530 —

# Le mouvement d'une particule dans un champ magnétique uniforme

## **Classiquement : problème simple, mais parfois non intuitif**

Mouvement cyclotron

Mouvement de dérive dans un champ électrique additionnel

## **Quantiquement : problème à la fois simple et très riche**

Spectre indépendant du choix de jauge, niveaux régulièrement espacés

Base d'états propres de l'hamiltonien qui dépend du choix de jauge

Dégénérescence « macroscopique » de chaque niveau d'énergie

Importance pratique des états de bords, signature d'une « topologie » non triviale

# Plan du cours

## 1. Le mouvement cyclotron classique

*mouvement circulaire uniforme, courant de Hall*

## 2. Le spectre d'énergie en physique quantique

*spectre de Landau, utilisation de la jauge symétrique*

## 3. Jauge de Landau et courant de probabilité

*originalité de la structure en niveaux de Landau*

## 4. Etats de bord et applications

*Dans tout ce cours, on se restreint à la dynamique dans le plan perpendiculaire au champ magnétique. La dynamique selon l'axe du champ est celle d'une particule libre.*

# Plan du cours

## 1. Le mouvement cyclotron classique

*mouvement circulaire uniforme, courant de Hall*

## 2. Le spectre d'énergie en physique quantique

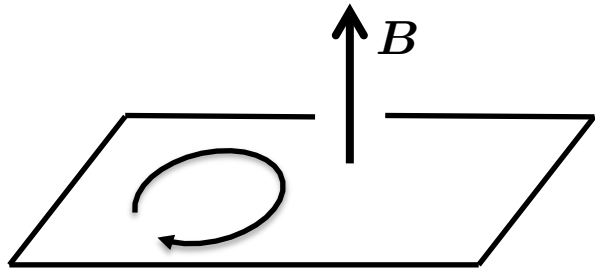
*spectre de Landau, utilisation de la jauge symétrique*

## 3. Jauge de Landau et courant de probabilité

*originalité de la structure en niveaux de Landau*

## 4. Etats de bord et application

# Le mouvement cyclotron classique



Particule de masse  $M$  et de charge  $q$  dans un champ magnétique uniforme  $\mathbf{B}$

$$\text{Force de Lorentz : } \mathbf{F}_L = q \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

$$\text{Equation du mouvement : } M \dot{\mathbf{v}} = q \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

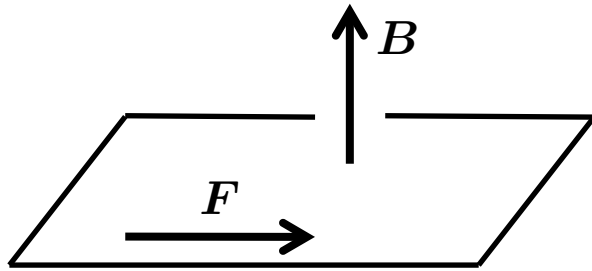
Mouvement circulaire uniforme de rayon  $r_0$  et de vitesse  $v_0$  à la pulsation  $\omega_c = \frac{qB}{M}$

$$r_0 = \frac{v_0}{\omega_c}$$

Le centre du cercle  $(X_0, Y_0)$  peut être placé n'importe où dans le plan : invariance par translation

$$x(t) = X_0 - \frac{v_0}{\omega_c} \cos(\omega_c t) \qquad y(t) = Y_0 + \frac{v_0}{\omega_c} \sin(\omega_c t)$$

# Courant de Hall



On ajoute une force  $F$  uniforme dans le plan  $xy$

$$M\dot{\mathbf{v}} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} + \mathbf{F}$$

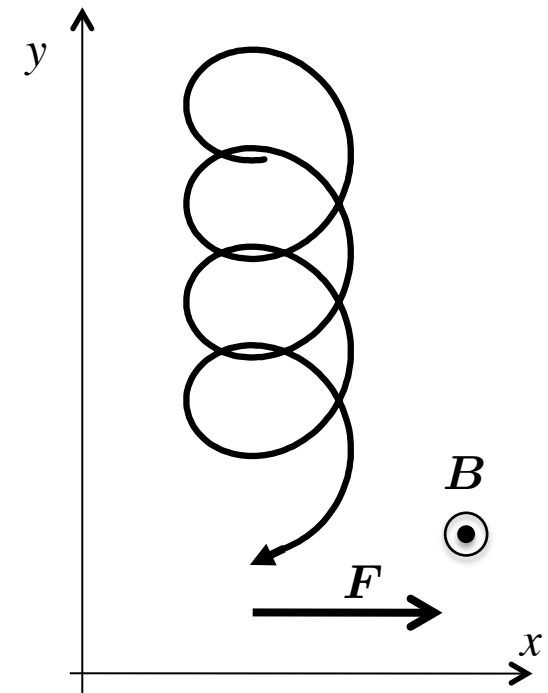
Force créée (par exemple) par un champ électrostatique

Prenons  $\mathbf{F} = F \mathbf{u}_x$

- En l'absence de champ magnétique, les particules sont accélérées dans la direction  $x$
- En présence de champ magnétique, les particules dérivent à vitesse uniforme  $-F/(qB)$  ... dans la direction  $y$

$$x(t) = X_0 - \frac{v_0}{\omega_c} \cos(\omega_c t)$$

$$y(t) = Y_0 + \frac{v_0}{\omega_c} \sin(\omega_c t) - \frac{F}{qB} t$$



# Plan du cours

## 1. Le mouvement cyclotron classique

*mouvement circulaire uniforme, courant de Hall*

## 2. Le spectre d'énergie en physique quantique

*spectre de Landau, utilisation de la jauge symétrique*

## 3. Jauge de Landau et courant de probabilité

*originalité de la structure en niveaux de Landau*

## 4. Etats de bord et applications

# Echelles quantiques de longueur et de vitesse

**Echelle « naturelle » de fréquence :**  $\omega_c = \frac{qB}{M}$

Echelle d'énergie :  $\hbar\omega_c$

Echelle de longueur :  $\ell = \sqrt{\frac{\hbar}{M\omega_c}} = \sqrt{\frac{\hbar}{qB}}$  *longueur magnétique*

Echelle de vitesse :  $\sqrt{\frac{\hbar\omega_c}{M}}$

électron,  $B = 1 \text{ T}$  :  $\omega_c/2\pi = 28 \text{ GHz}$      $\ell \approx 26 \text{ nm}$      $v_m \approx 4000 \text{ m/s}$

**Pourquoi ces échelles apparaissent naturellement :**

Classiquement :  $r_0 = \frac{v_0}{\omega_c}$     l'extension  $r_0$  diminue si la vitesse  $v_0$  diminue

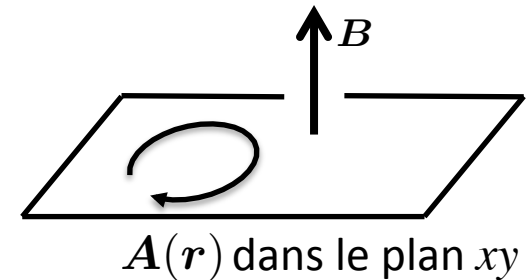
Quantiquement :  $\Delta r_i \Delta p_i \geq \hbar/2$

La longueur magnétique représente la taille minimale d'une orbite cyclotron compatible avec l'inégalité de Heisenberg



# Les opérateurs en jeu dans le formalisme quantique

- opérateur position  $\hat{\mathbf{r}}$
- opérateur impulsion  $\hat{\mathbf{p}}$
- opérateur quantité de mouvement  $\hat{\boldsymbol{\Pi}} = \hat{\mathbf{p}} - q\mathbf{A}(\hat{\mathbf{r}}) = M\hat{\mathbf{v}}$



On cherche le spectre de l'hamiltonien  $\hat{H} = \frac{(\hat{\mathbf{p}} - q\mathbf{A}(\hat{\mathbf{r}}))^2}{2M} = \frac{1}{2M} (\hat{\Pi}_x^2 + \hat{\Pi}_y^2)$

Commutateurs :  $[\hat{p}_x, \hat{p}_y] = 0$  mais  $[\hat{\Pi}_x, \hat{\Pi}_y] = i\hbar qB$

*On ne peut pas connaître parfaitement les deux composantes du vecteur vitesse*

La recherche du spectre de  $\hat{H}$  est identique au problème d'un oscillateur harmonique :

$$\hat{H}_{\text{osc}} = \frac{1}{2} (\hat{X}^2 + \hat{P}^2) \quad [\hat{X}, \hat{P}] = i$$

# Le spectre de Landau (méthode algébrique)

Directement inspiré de la méthode de Dirac pour traiter l'oscillateur harmonique

$$\hat{H} = \frac{1}{2M} \left( \hat{\Pi}_x^2 + \hat{\Pi}_y^2 \right) \quad [\hat{\Pi}_x, \hat{\Pi}_y] = i \hbar q B$$

On introduit les opérateurs création et annihilation

$$\begin{cases} \hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar q B}} \left( \hat{\Pi}_x - i\hat{\Pi}_y \right) \\ \hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar q B}} \left( \hat{\Pi}_x + i\hat{\Pi}_y \right) \end{cases}$$

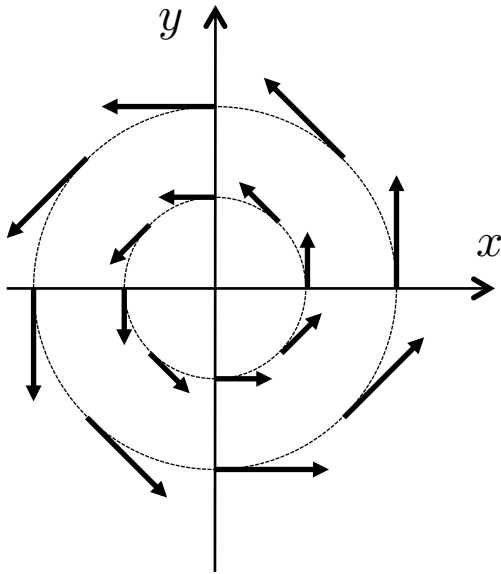
dont on déduit :  $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$        $\hat{H} = \hbar\omega_c \left( \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right)$

➡ **spectre formé de niveaux équidistants**       $E_n = \left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega_c, \quad n \in \mathbb{N}$

**Etats propres** : on ne peut rien dire pour l'instant, il faut choisir une jauge  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$

**Dégénérescence** : également inconnue à ce stade

# Un premier choix de jauge : la jauge symétrique



$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} -By/2 \\ Bx/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Brise l'invariance par translation en favorisant un point particulier

Préserve l'invariance par rotation autour de ce point

Pour ce choix de jauge, l'hamiltonien peut s'écrire :

$$\hat{H} = \frac{(\hat{\mathbf{p}} - q\mathbf{A}(\hat{\mathbf{r}}))^2}{2M} = \underbrace{\frac{\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2}{2M} + \frac{1}{8}M\omega_c^2(\hat{x}^2 + \hat{y}^2)}_{\hat{H}_0} - \underbrace{\frac{\omega_c}{2}(\hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x)}_{\frac{\omega_c}{2}\hat{L}_z}$$

$\hat{H}_0$  : Hamiltonien d'un oscillateur harmonique isotrope à deux dimensions

$\frac{\omega_c}{2}\hat{L}_z$  : composante selon  $z$  du moment cinétique canonique

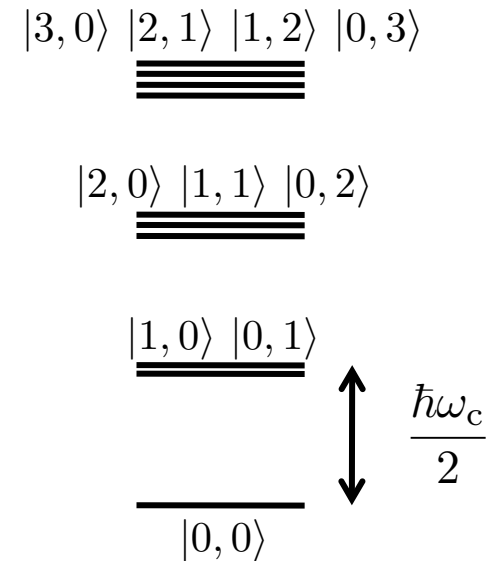
$[\hat{H}_0, \hat{L}_z] = 0$  : on peut chercher une base de vecteurs propres communs

# Les deux opérateurs en jeu, $\hat{H}_0$ et $\hat{L}_z$

**L'hamiltonien  $\hat{H}_0$**  : oscillateur isotrope à deux dimensions de pulsation  $\omega_c/2$

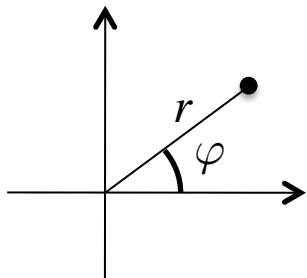
$$\left(n_x + \frac{1}{2}\right) \frac{\hbar\omega_c}{2} + \left(n_y + \frac{1}{2}\right) \frac{\hbar\omega_c}{2}$$

$$\longrightarrow (n_0 + 1) \frac{\hbar\omega_c}{2} \quad n_0 \in \mathbb{N}$$



Etats propres  $|n_x, n_y\rangle$  :  $P_{n_x}(x)e^{-x^2/4\ell^2} P_{n_y}(y)e^{-y^2/4\ell^2}$

**L'opérateur moment cinétique  $\hat{L}_z$**

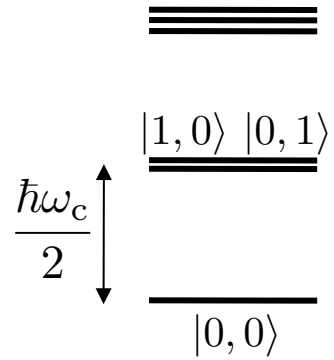


$$\hat{L}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

Fonctions propres :  $F(r) e^{im\varphi} \quad m \in \mathbb{Z}$

$|0,0\rangle$  est de cette forme:  $e^{-r^2/4\ell^2} \quad m = 0$

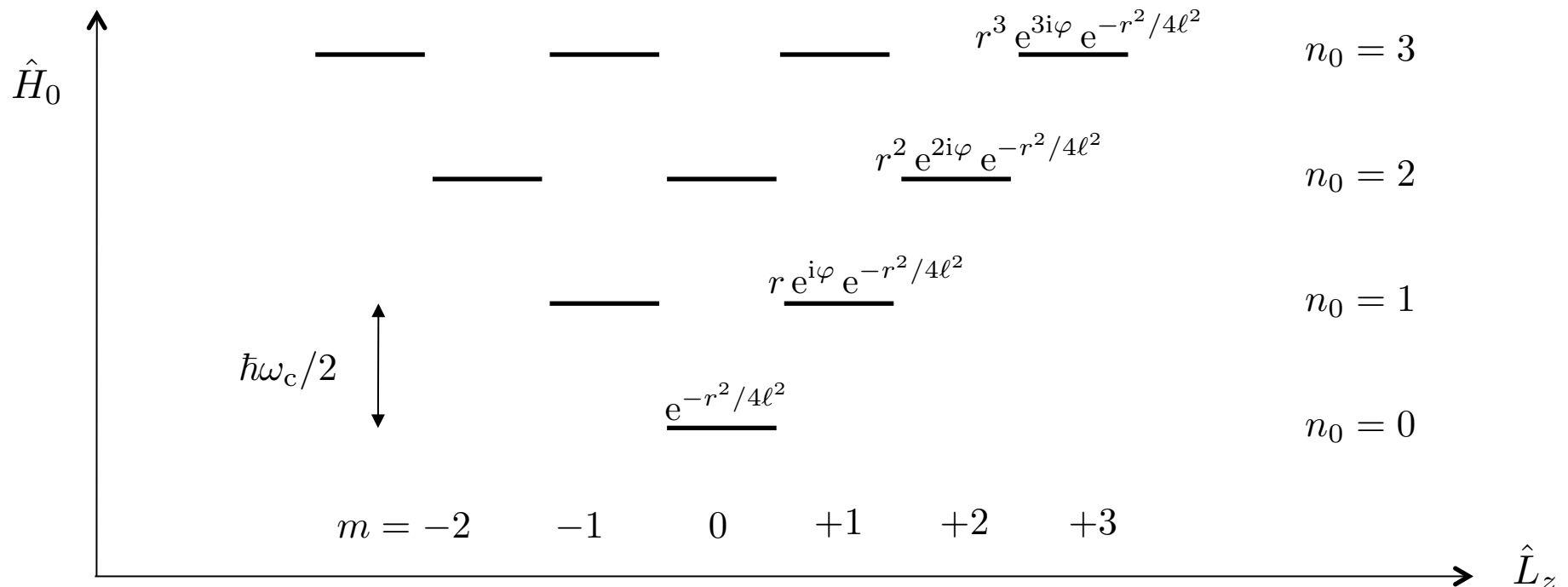
# Base propre commune à $\hat{H}_0$ et $\hat{L}_z$



Changement de base dans le premier sous-espace excité :

$$\begin{cases} x e^{-r^2/4\ell^2} \\ y e^{-r^2/4\ell^2} \end{cases} \quad \begin{cases} (x + iy) e^{-r^2/4\ell^2} = r e^{+i\varphi} e^{-r^2/4\ell^2} & m = +1 \\ (x - iy) e^{-r^2/4\ell^2} = r e^{-i\varphi} e^{-r^2/4\ell^2} & m = -1 \end{cases}$$

Représentation graphique de cette base commune :



# Retour au problème de la diagonalisation en jauge symétrique

On a mis l'hamiltonien sous la forme  $\hat{H} = \hat{H}_0 - \frac{\omega_c}{2} \hat{L}_z$  et on a trouvé une base de vecteurs propres communs à  $\hat{H}_0$  et  $\hat{L}_z$

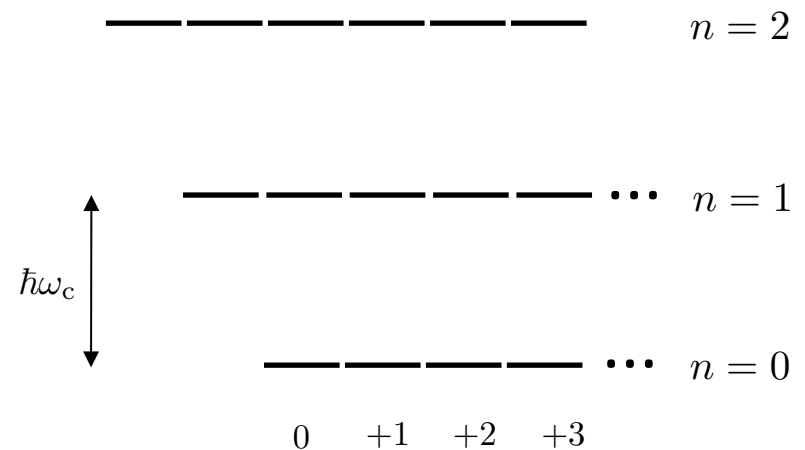
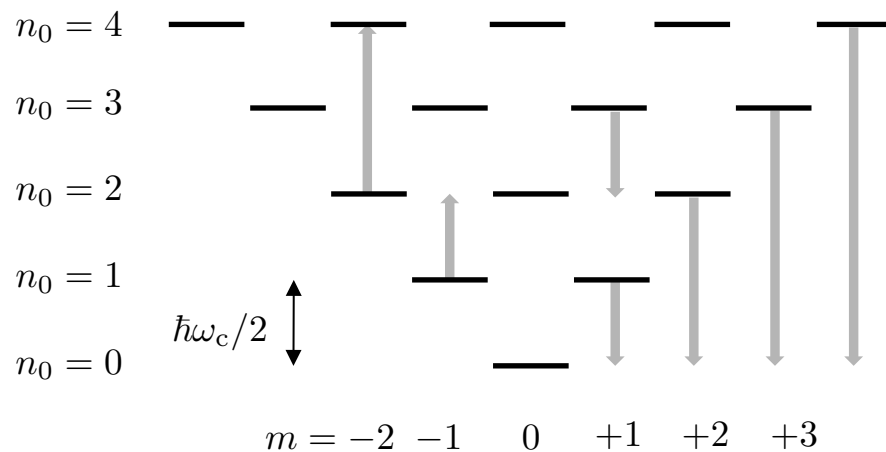
$$\hat{H}_0 \longleftrightarrow (n_0 + 1) \frac{\hbar\omega_c}{2}$$

$$n_0 \in \mathbb{N}$$

$$\frac{\omega_c}{2} \hat{L}_z \longleftrightarrow m \frac{\hbar\omega_c}{2}$$

$$m = -n_0, -n_0 + 2, \dots, n_0 - 2, n_0$$

Les énergies de  $\hat{H}$  sont donc  $E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega_c$   $n = \frac{n_0 - m}{2}$  entier positif ou nul.



On retrouve la structure en niveaux de Landau, chaque niveau étant infiniment dégénéré

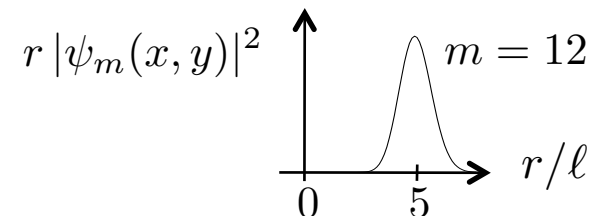
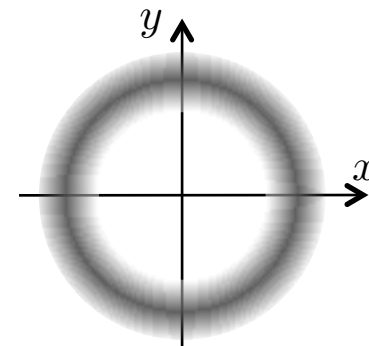
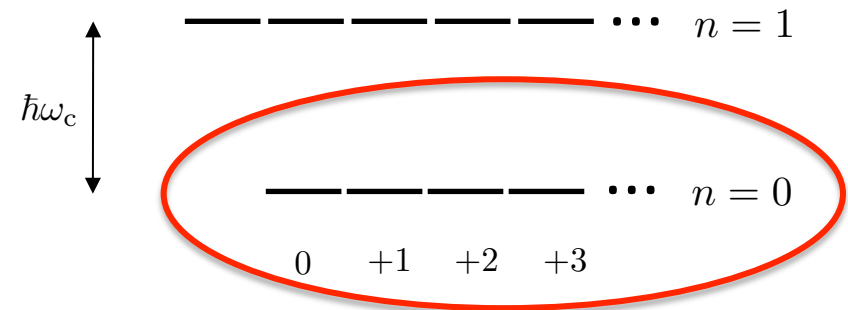
# Le niveau de Landau fondamental (Lowest Landau Level, LLL)

Le niveau fondamental contient toutes les combinaisons linéaires des fonctions

$$(x + iy)^m e^{-r^2/4\ell^2} = r^m e^{im\varphi} e^{-r^2/4\ell^2}$$

fonction piquée en  $r_m = \sqrt{2m + 1} \ell$

largeur  $\Delta r \sim \ell$



# Structure du LLL

Une fonction quelconque des variables  $x, y$  peut aussi s'écrire comme une fonction des variables  $u = x + iy$   $\bar{u} = x - iy$

$$\Psi(x, y) = \tilde{\Psi}(u, \bar{u})$$

Une fonction du LLL est une combinaison linéaire des  $(x + iy)^m e^{-r^2/4\ell^2}$

$$\begin{aligned}\Psi(x, y) &= \sum C_m (x + iy)^m e^{-r^2/4\ell^2} \\ &= \left( \sum_m C_m u^m \right) e^{-r^2/4\ell^2}\end{aligned}$$

$$\Psi(x, y) = F(u) e^{-r^2/4\ell^2} \quad F(u) = \sum_m C_m u^m$$

La restriction au LLL correspond à un passage effectif d'un espace à deux dimensions  $(u, \bar{u})$  à un espace à une dimension  $(u)$



# Plan du cours

## 1. Le mouvement cyclotron classique

*mouvement circulaire uniforme, courant de Hall*

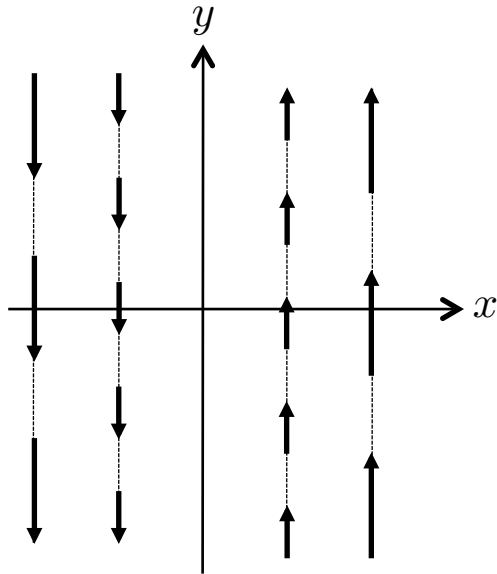
## 2. Le spectre d'énergie en physique quantique

*spectre de Landau, utilisation de la jauge symétrique*

## 3. Jauge de Landau et courant de probabilité

*originalité de la structure en niveaux de Landau*

## 4. Etats de bord et applications



La jauge de Landau  $\mathbf{A} = Bx \mathbf{u}_y$

Brise les invariances par rotation et par translation selon  $x$

Hamiltonien : 
$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_x^2}{2M} + \frac{(\hat{p}_y - qB\hat{x})^2}{2M}$$

Pas de terme en  $y$  dans l'hamiltonien, uniquement  $p_y$

On peut donc chercher les fonctions propres sous la forme

$$\hat{H}\Psi_k = E\Psi_k \quad \text{avec} \quad \Psi_k(\mathbf{r}) = \psi_k(x) e^{iky}$$

Prenons un échantillon de taille finie  $L_y$  selon  $y$ , avec des conditions aux limites périodiques

$$k = \frac{2\pi}{L_y} n_y, \quad \text{avec} \quad n_y \in \mathbb{Z}$$

Il reste alors à déterminer la fonction d'onde  $\psi_k(x)$

## Jauge de Landau (suite)

On injecte  $\Psi_k(\mathbf{r}) = \psi_k(x) e^{iky}$  dans l'équation aux valeurs propres pour

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_x^2}{2M} + \frac{(\hat{p}_y - qB\hat{x})^2}{2M}$$

ce qui donne

$$-\frac{\hbar^2}{2M} \psi_k''(x) + \underbrace{\frac{(\hbar k - qBx)^2}{2M}}_{\frac{1}{2}M\omega_c^2 (x - x_k)^2} \psi_k(x) = E \psi_k(x)$$

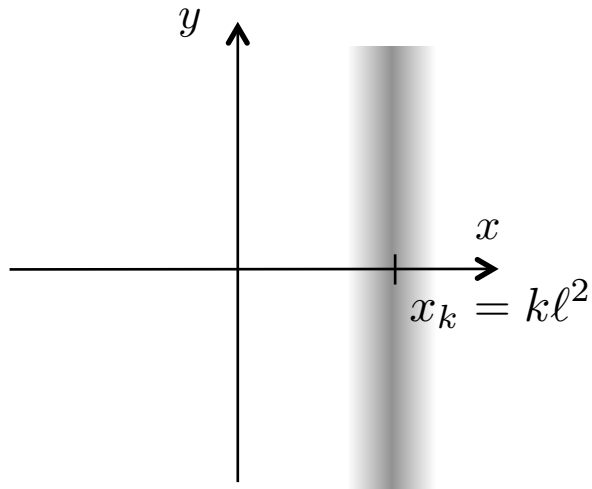
avec  $x_k = \frac{\hbar k}{qB} = k\ell^2$

Equation aux valeurs propres pour un oscillateur à une dimension, de pulsation  $\omega_c$  et centré en  $x_k$

**Le spectre de Landau retrouvé :**  $E_{k,n} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega_c$

Etat fondamental :  $n = 0$        $\psi_{k,n=0}(x) = e^{-(x-x_k)^2/2\ell^2}$

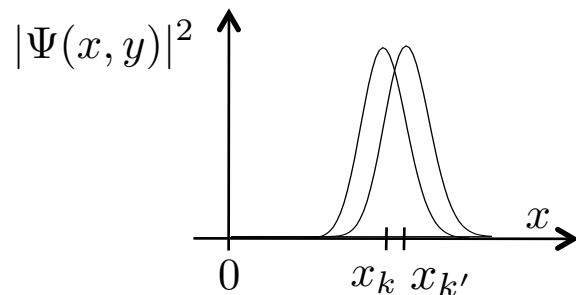
Le résultat  $E_{k,n} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega_c$



Pour tout nombre d'onde  $k$  selon  $y$ , on trouve un état d'énergie minimale

$$\Psi_k(\mathbf{r}) \propto e^{-(x-x_k)^2/2\ell^2} e^{iky} \quad E_{k,0} = \hbar\omega_c/2$$

Nouvelle base de fonctions du LLL quand on varie  $k$



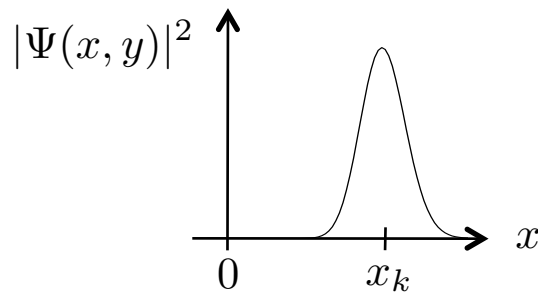
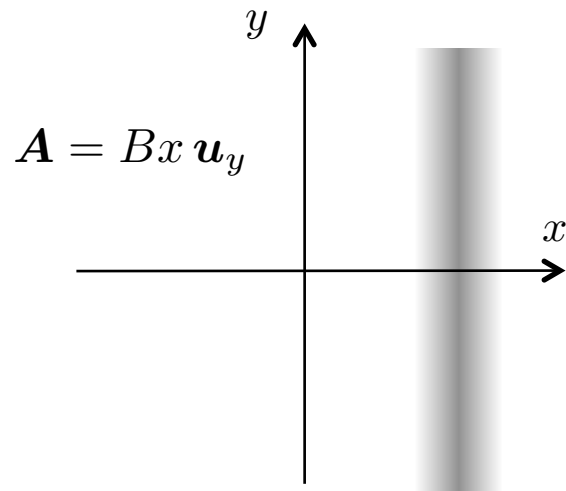
Pour un système de taille finie :  $k = (2\pi/L_y) n_y$

Pour deux valeurs consécutives  $k$  et  $k' = k + \frac{2\pi}{L_y}$ , le décentrage en  $x$  varie de :

$$x_{k'} - x_k = 2\pi \frac{\ell^2}{L_y} \ll \ell$$

Il n'y a pas d'énergie cinétique  $\hbar^2 k^2 / 2M$  associée à la phase  $e^{iky}$  de la fonction d'onde : deux valeurs différentes de  $k$  conduisent à la même énergie, mais à des centrages en  $x$  différents.

# Impulsion et quantité de mouvement



$$\Psi_k(\mathbf{r}) = \psi_k(x) e^{iky} \quad \left\{ \begin{array}{l} \psi_k(x) \propto e^{-(x-x_k)^2/2\ell^2} \\ x_k = k\ell^2 \end{array} \right.$$

- Impulsion selon  $y$  :  $\hat{p}_y = -i\hbar \frac{\partial}{\partial y} \longrightarrow p_y = \hbar k$

- Quantité de mouvement selon  $y$  :

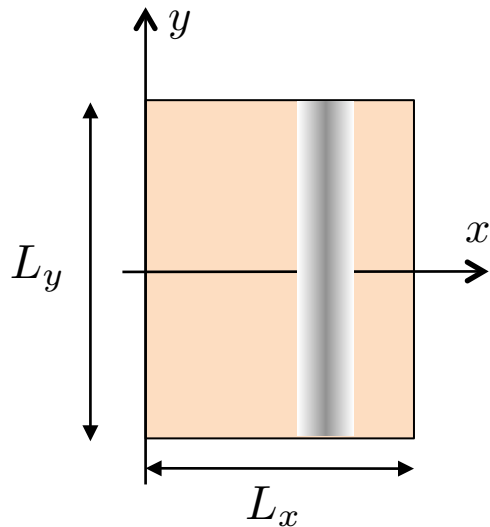
$$M\hat{v}_y = \hat{p}_y - qA_y = -i\hbar \frac{\partial}{\partial y} - qBx$$

$$\begin{aligned} \longrightarrow v_y(k) &= -\omega_c \int |\psi_k(x)|^2 (x - x_k) dx \\ &= 0 \end{aligned}$$

car l'oscillateur correspondant à  $\psi_k$  est centré en  $x_k$

Ceci explique pourquoi il n'y a pas d'énergie cinétique associée à  $e^{iky}$

# La dégénérescence $\mathcal{D}$ d'un niveau de Landau



Echantillon en forme de rectangle  $L_x \times L_y$

$$\Psi_k(\mathbf{r}) = \psi_k(x) e^{iky} \quad \begin{cases} \psi_k(x) \propto e^{-(x-x_k)^2/2\ell^2} \\ x_k = k\ell^2 \end{cases}$$

Pour que cet état soit significativement peuplé avec des paquets d'ondes réalistes, il faut que

$$0 \leq x_k \leq L_x \quad \Rightarrow \quad 0 \leq k \leq k_{\max} = \frac{L_x}{\ell^2}$$

Par ailleurs, les conditions aux limites périodiques selon  $y$  imposent  $k = \frac{2\pi}{L_y} n_y$

Nombre d'états pertinents :  $\mathcal{D} = \frac{L_y}{2\pi} k_{\max} = \frac{L_x L_y}{2\pi \ell^2}$

ou encore :  $\mathcal{D} = \frac{\Phi}{\Phi_0} \quad \begin{cases} \Phi = L_x L_y B & \text{flux du champ} \\ \Phi_0 = h/q & \text{quantum de flux} \end{cases}$

Echantillon de  $100 \mu\text{m}^2$ ,  $B = 1$  Tesla :  $\mathcal{D} = 24\,000$  ( $\ell = 26$  nm)

## La dégénérescence d'un niveau de Landau (suite)

$$\mathcal{D} = \frac{\Phi}{\Phi_0} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \Phi = \pi R^2 B & \text{flux du champ} \\ \Phi_0 = h/q & \text{quantum de flux} \end{array} \right.$$

Pour un échantillon de taille donnée, la dégénérescence d'un niveau de Landau (par exemple le LLL) augmente avec  $B$ .

Augmenter le champ magnétique revient donc à augmenter le nombre de niveaux à une particule accessibles dans une tranche d'énergie donnée

*A la base de la génération d'états fortement corrélés  
s'il y a des interactions répulsives entre particules*

D'où viennent ces niveaux qui apparaissent quand on augmente  $B$  ?

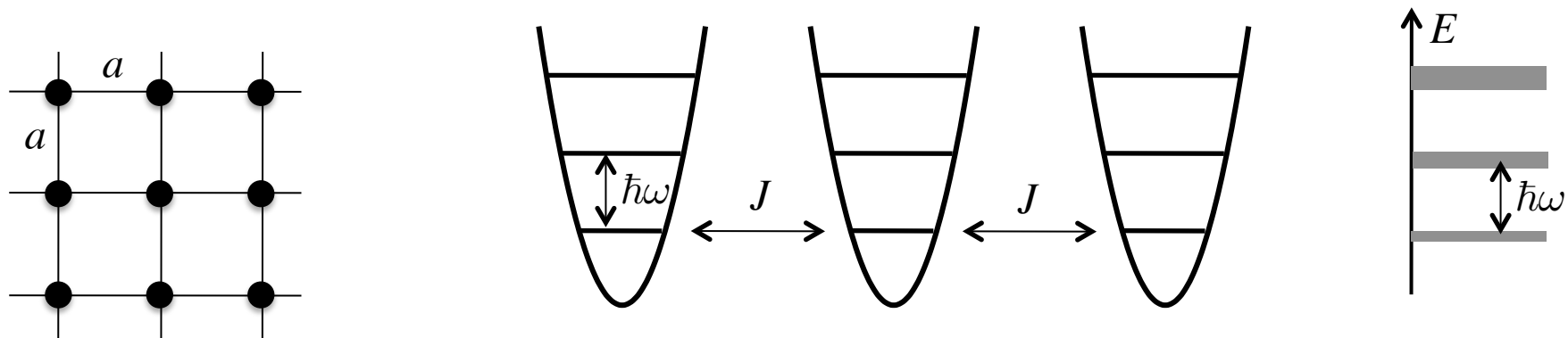
Ils viennent des bords de l'échantillon !

# L'originalité de la structure en niveaux de Landau

On trouve pour chaque niveau de Landau un spectre plat dont la dégénérescence est proportionnelle à la surface de l'échantillon :

$$\mathcal{D} = \frac{\text{aire}}{2\pi\ell^2}$$

Un autre exemple conduisant à un résultat en apparence identique est un réseau périodique carré dans la limite des liaisons fortes et d'un effet tunnel tendant vers 0



Bande fondamentale de largeur  $4J$

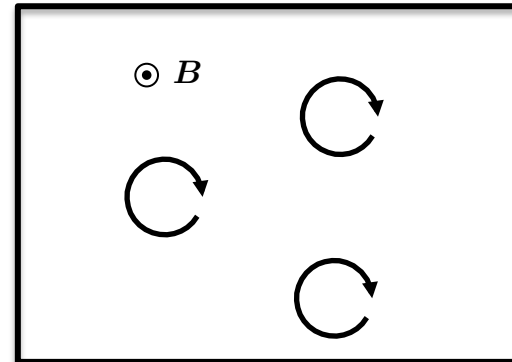
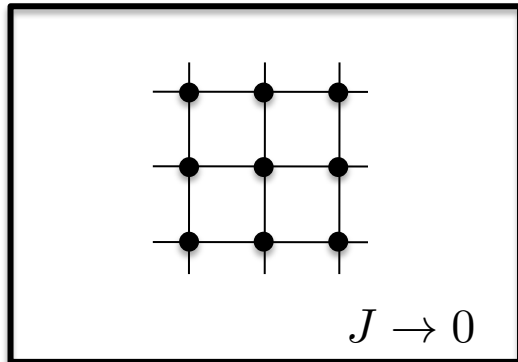
Dans la limite  $J \rightarrow 0$ , chaque bande devient infiniment étroite avec une dégénérescence

$$\mathcal{D} = \frac{\text{aire}}{a^2}$$

**Est-ce la même chose ???**



## L'originalité de la structure en niveaux de Landau (2)



Au niveau du cœur du matériau, il est difficile de distinguer simplement les deux configurations ; pas de dynamique dans les deux cas si on peuple une seule bande :

$$|\Psi(0)\rangle = \sum_m c_m |\psi_m\rangle \longrightarrow |\Psi(t)\rangle = e^{-iE_{\text{bande}}t/\hbar} \sum_m c_m |\psi_m\rangle$$

Au niveau des bords de l'échantillon, les deux situations sont très différentes

- Le réseau est « trivial »: rien ne se passe
- Le champ magnétique donne naissance à un courant de bord bien calibré, dont la valeur ne dépend pas de la taille ni de la forme de l'échantillon : propriété « topologique » robuste

Les propriétés d'un système quantique ne se résument pas à son spectre !

# Plan du cours

## 1. Le mouvement cyclotron classique

*mouvement circulaire uniforme, courant de Hall*

## 2. Le spectre d'énergie en physique quantique

*spectre de Landau, utilisation de la jauge symétrique*

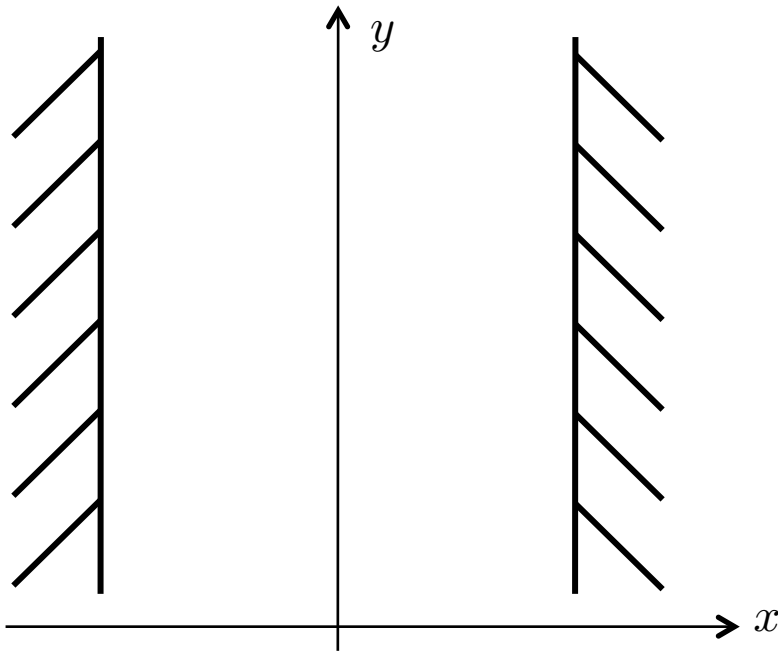
## 3. Jauge de Landau et courant de probabilité

*originalité de la structure en niveaux de Landau*

## 4. Etats de bord et applications

mouvement chiral sur les bords et quantification du courant correspondant

# Modélisation d'un échantillon de taille finie



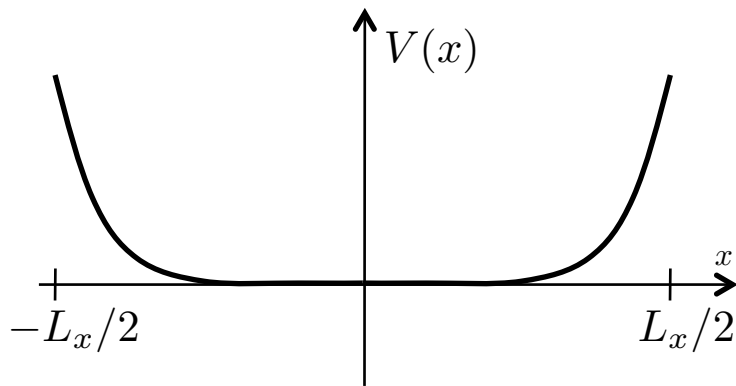
Jauge de Landau  $\mathbf{A} = Bx \mathbf{u}_y$

Conditions aux limites périodiques selon  $y$

$$\Psi_k(\mathbf{r}) = \psi_k(x) e^{iky}$$

Recherche de la fonction  $\psi_k(x)$  en présence du potentiel de bord  $V(x)$ :

$$-\frac{\hbar^2}{2M} \psi_k''(x) + \left[ \frac{1}{2} M \omega_c^2 (x - x_k)^2 + V(x) \right] \psi_k(x) = E \psi_k(x)$$



On va supposer que  $V(x)$  varie lentement à l'échelle de  $\ell$ , taille de l'état fondamental de l'oscillateur harmonique de pulsation  $\omega_c$

# Les états de bord

On procède à une résolution approchée de

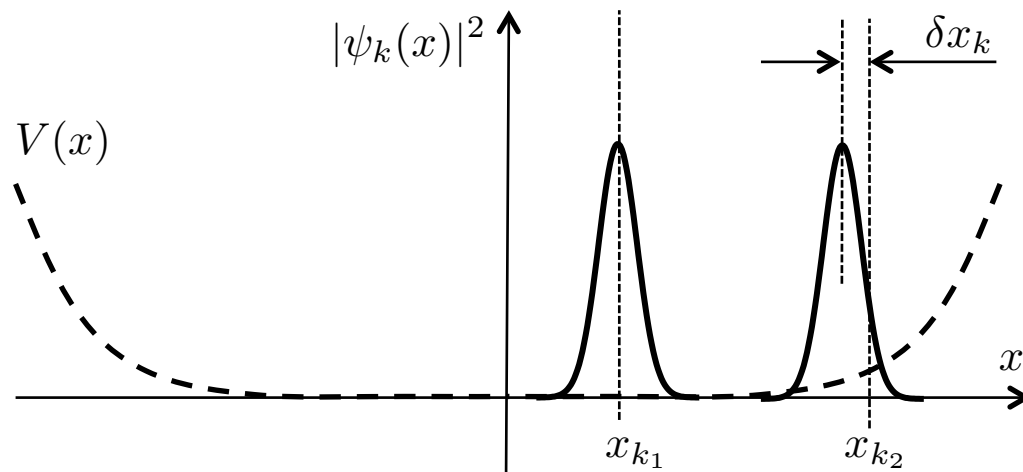
$$-\frac{\hbar^2}{2M}\psi_k''(x) + \left[ \frac{1}{2}M\omega_c^2 (x - x_k)^2 + V(x) \right] \psi_k(x) = E \psi_k(x)$$

en linéarisant le potentiel de bord  $V(x)$  :  $V(x) \approx V(x_k) + (x - x_k)V'(x_k)$

La présence du bord de l'échantillon vient décaler le centre de l'oscillateur associé à  $e^{iky}$

$$\frac{1}{2}M\omega_c^2 (x - x_k)^2 \longrightarrow \frac{1}{2}M\omega_c^2 (x - x_k - \delta x_k)^2 + V(x_k)$$

$$\delta x_k = -\frac{V'(x_k)}{M\omega_c^2}$$



Quelle vitesse  $v_y(k)$   
pour ces états décalés ?

# La vitesse d'un état de bord

L'analyse précédente de la vitesse moyenne associée à  $\Psi_k(\mathbf{r}) = \psi_k(x) e^{iky}$  reste valable

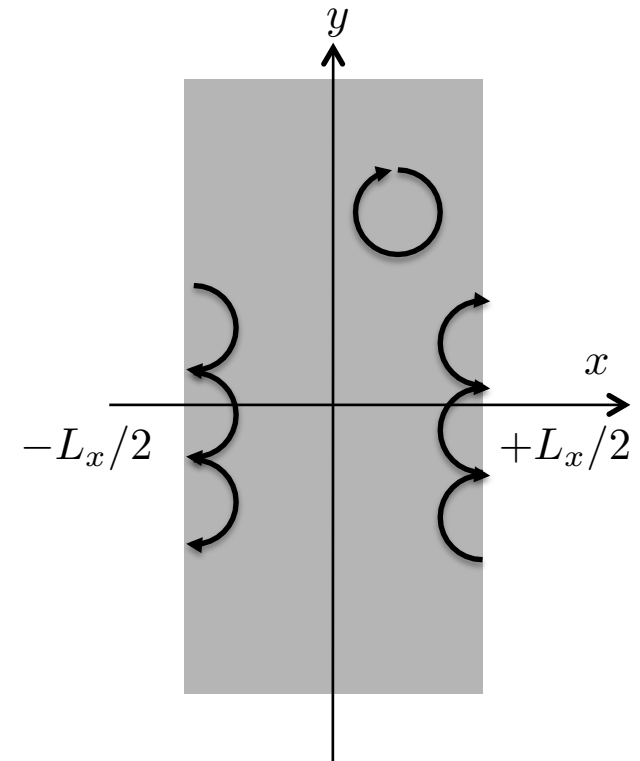
$$v_y(k) = -\omega_c \int |\psi_k(x)|^2 (x - x_k) dx \quad x_k = kl^2$$

$\nearrow qA$                        $\nwarrow \hat{p}$

A cause du bord, la densité de probabilité  $|\psi_k(x)|^2$  n'est plus centrée en  $x_k$

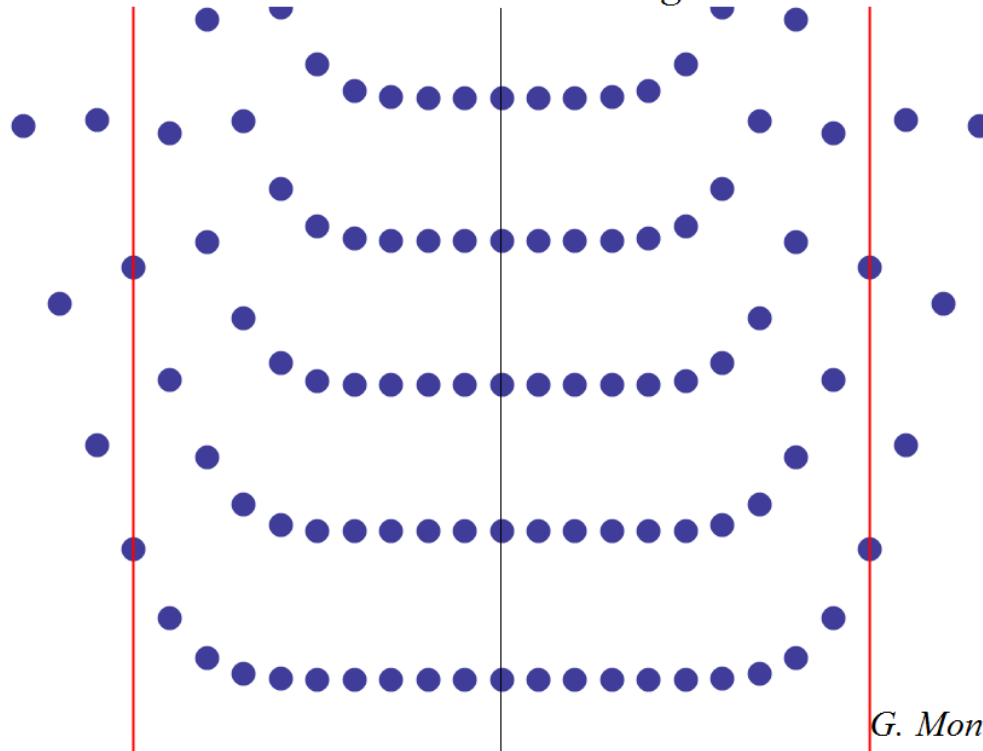
$$\delta x_k = -\frac{V'(x_k)}{M\omega_c^2} \longrightarrow v_y(k) = \frac{V'(x_k)}{M\omega_c} \neq 0$$

La force selon  $x$  donne naissance à une vitesse non nulle selon  $y$  : équivalent du courant de Hall.



# Etats de cœur et états de bord en fonction de $B$

*Bulk Landau levels and edge states*



Ecart en énergie entre  
deux niveaux de Landau  
consécutifs

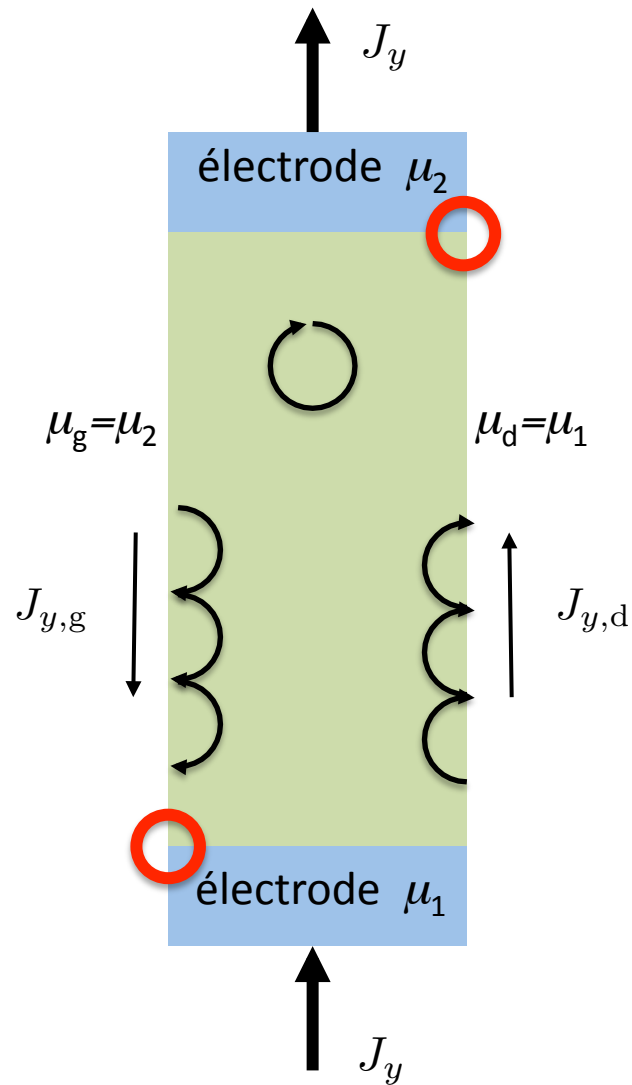
$$\hbar\omega_c \propto B$$

*G. Montambaux*

Ecart en position entre deux états  $\psi_k(x)$  :  $2\pi \frac{\ell^2}{L_y} \propto \frac{1}{B}$

**Merci à Gilles Montambaux !**

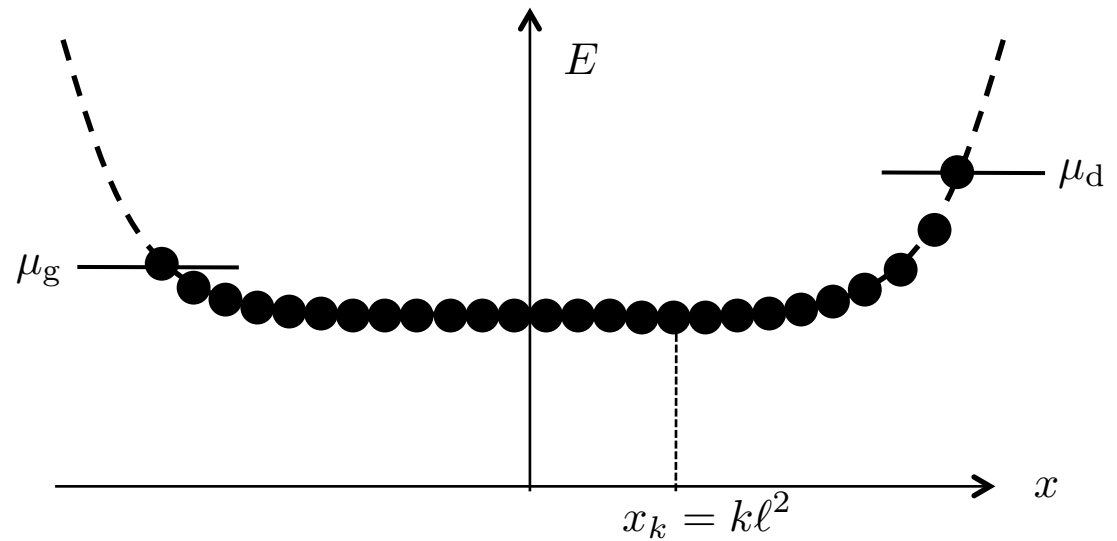
# Quel est le courant de particules associé à un état de bord ?



Electrodes idéales

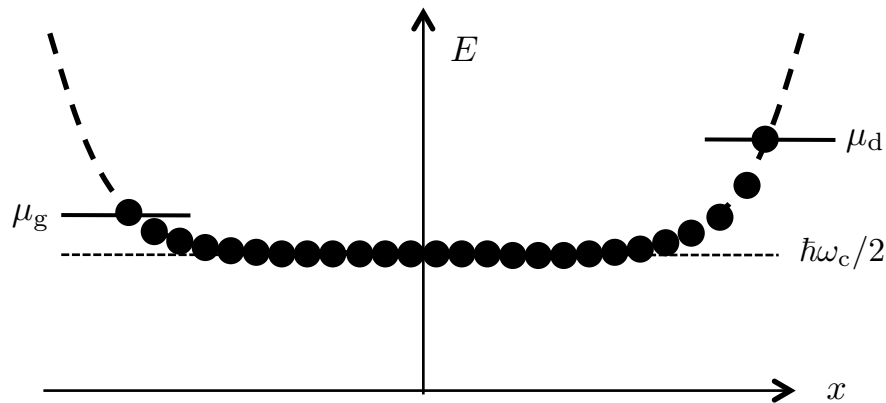
Gaz de Fermi sans interaction à température nulle

$$\hbar\omega_c/2 < \mu_{g,d} < 3\hbar\omega_c/2$$



$$J_{y,d} = \frac{1}{L_y} \sum_{k \text{ peuplés droite}} v_y(k) \quad \text{et idem à gauche}$$

# Courant dans l'échantillon



Courant sur un bord de l'échantillon:

$$J_{y,d} = \frac{1}{L_y} \sum_{\substack{k \text{ peuplés} \\ \text{droite}}} v_y(k) \quad v_y(k) = \frac{V'(x_k)}{M\omega_c}$$

En remplaçant la somme discrète par une intégrale :  $\sum V'(x_k) \rightarrow \int V'(x) dx = \int dV$

$$J_{y,g} = \frac{1}{h} (\mu_g - \hbar\omega_c/2) \quad J_{y,d} = \frac{1}{h} (\mu_d - \hbar\omega_c/2)$$

**Courant de particules total pour le LLL:**  $J_y = J_{y,d} - J_{y,g} = (\mu_d - \mu_g)/h$

- courant électrique :  $I_y = qJ_y$
- différence de potentiel entre bord droit et bord gauche :  $V_x = (\mu_d - \mu_g)/q$

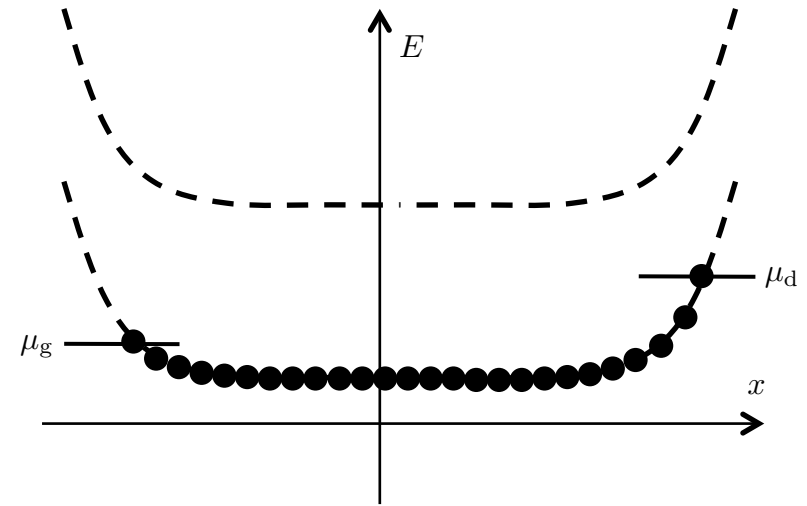
$$I_y = \sigma_{xy} V_x \quad \sigma_{xy} = q^2/h \quad R_H = h/q^2 \approx 25 \text{ k}\Omega$$

*Equivalent à un conducteur unidimensionnel monocanal (formule de Landauer-Buttiker)*



# Idéalisation de la situation réelle

Il faut que  $\mu_{g,d}$  soit loin de l'énergie des états de cœur pour que la diffusion d'un bord à l'autre de l'échantillon soit négligeable



Dans ce modèle, le facteur de remplissage (donc la valeur du champ magnétique) doit être contrôlé avec une extrêmement bonne précision pour garantir

$$\hbar\omega_c/2 < \mu_{g,d} < 3\hbar\omega_c/2$$

*Il y a « très peu » d'états de bord pour absorber les particules excédentaires*

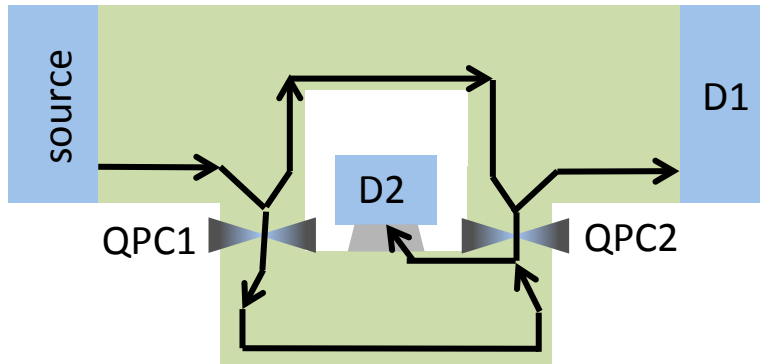
La présence de désordre dans le potentiel de cœur permet de produire une densité d'états localisés beaucoup plus importante que les états de bord dans le gap  $]\hbar\omega_c/2, 3\hbar\omega_c/2[$

- Ne détruit pas la relation  $I_y = (q^2/h)V_x$  tant que le désordre ne connecte pas les deux bords
- Elargit les plateaux de champ magnétique sur lesquelles cette relation est valable

# Un interféromètre de Mach-Zender pour électrons

Yang Ji *et al.*, Nature 2003

Deux contacts ponctuels quantiques (QPC) jouent le rôle de séparateurs de faisceaux



Une variation lente du champ magnétique fait défiler les franges d'interférence (points bleus)

$$B = 5.5 \text{ T}$$

$$\dot{B} = 0.12 \text{ mT/heure}$$

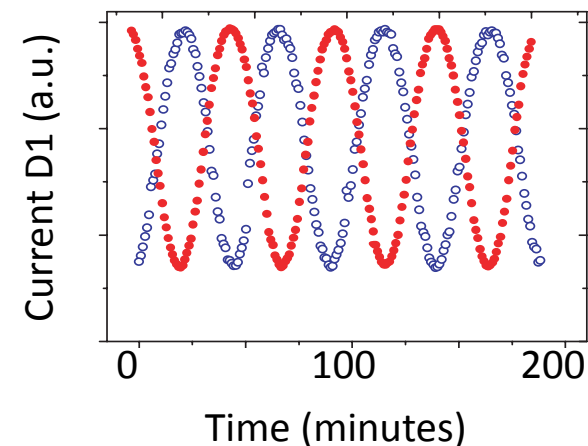
Différence de phase entre les deux chemins due à la phase de Aharonov-Bohm :

$$\delta\varphi = \frac{q\Phi}{\hbar} = 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}$$

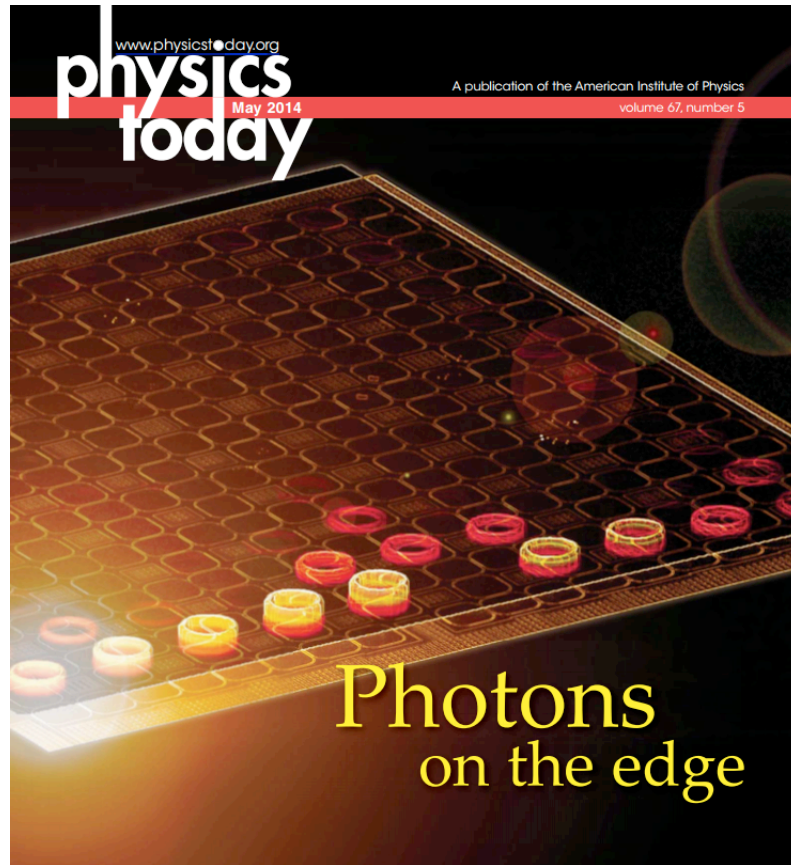
$\Phi$ : flux du champ

$\Phi_0$ : quantum de flux

$$\text{Ici : } \frac{\Phi}{\Phi_0} \approx 60\,000$$



# Etats de bord dans des guides d'ondes pour photons



also:  
Gravity, caught in the act ◀  
Matter-wave metrology ◀  
The promise of perovskite solar cells ◀

*cf.* article de M. Hafezi et J.M. Taylor,  
Physics Today, mai 2014

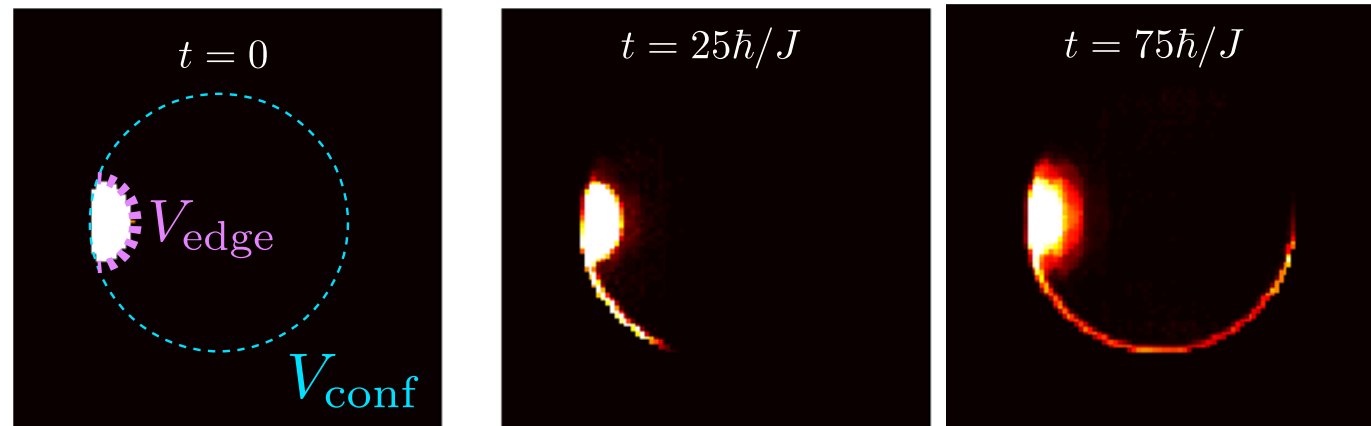
Une autre expérience avec des photons :  
M. Rechtsman, Nature 496, 196 (2013)

# Possibilités offertes par les atomes froids

Supposons réalisé un champ magnétique artificiel pour un gaz atomique 2D

On peut varier rapidement le potentiel de confinement et observer l'étalement du nuage d'atomes (ici, des fermions sans interaction)

Simulation par  
Goldman et al,  
PNAS 2013



Illustre deux aspects essentiels de la physique dans un niveau de Landau (ici le LLL)

- pas d'étalement des états de cœur : spectre plat
- mouvement chiral sur le bord : topologie non triviale