

# Chapitre 5

## Cohérence et modes collectifs dans un réseau

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Caractérisation expérimentale de la cohérence . . . . .</b>	<b>2</b>
1-1	Protocole expérimental . . . . .	2
1-2	Les pics de Bragg . . . . .	3
1-3	Visibilité des pics de Bragg . . . . .	4
1-4	Effets de température finie . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Incompressibilité et gaz piégé . . . . .</b>	<b>6</b>
2-1	Approche de Gutzwiller et incompressibilité . . .	7
2-2	Au delà de Gutzwiller : calculs numériques . . .	9
2-3	Comment décrire un gaz piégé . . . . .	10
2-4	La structure en « pièce montée » ( <i>wedding cake</i> ) . .	11
<b>3</b>	<b>Le mode de Higgs . . . . .</b>	<b>13</b>
3-1	Paramètre d'ordre et fonctionnelle d'énergie . . .	13
3-2	Dynamique dans le modèle de Landau–Ginzburg	15
3-3	Mode de Goldstone, mode de Higgs . . . . .	16
<b>4</b>	<b>Le mode de Higgs dans un réseau optique . . . . .</b>	<b>17</b>
4-1	Le cas d'un mode uniforme . . . . .	17
4-2	Le lagrangien « relativiste » . . . . .	18
4-3	Observation du mode de Higgs . . . . .	20
<b>5</b>	<b>Appendice : identification des modes . . . . .</b>	<b>20</b>

---

Nous avons décrit au chapitre précédent le principe de la transition de phase quantique superfluide-isolant de Mott dans un réseau optique uniforme, rempli par des atomes bosoniques. Nous allons maintenant passer à l'étude expérimentale de ce phénomène, en commençant par les expériences « historiques » de Greiner, Mandel, et al. (2002). La cohérence associée à l'état superfluide est sondée dans une expérience de temps de vol, et elle se manifeste par des *pics de Bragg* correspondant à une accumulation d'atomes autour de classes d'impulsions bien précises.

Comme la plupart de ces expériences sont menées avec un piège harmonique superposé au réseau optique, ceci nous amènera à affiner notre description théorique. Après avoir introduit la notion d'incompressibilité de l'état isolant, nous adopterons la variable associée au point de vue grand-canonique, à savoir le potentiel chimique, et nous introduirons l'approximation de densité locale pour décrire la transition. Nous verrons que la transition vers l'état isolant se manifeste alors par des plateaux de densité constante, qui ont effectivement été observés dans les expériences récentes de « microscope atomique ».

Dans la dernière partie, nous reviendrons sur la nature de la transition de phase superfluide-isolant, en partant du modèle bien connu de Landau–Ginsburg pour les transitions du deuxième ordre. Nous aborderons une spécificité de cette transition liée au rôle symétrique qu'y jouent les particules et les trous. Nous expliquerons pourquoi cela permet d'y observer un mode collectif pour lequel l'amplitude du paramètre d'ordre oscille. Ce mode est formellement très proche du mode de Higgs de la physique des

particules, et était absent de la dynamique fondée sur l'équation de Gross-Pitaevskii que nous avons étudiée auparavant pour un gaz uniforme.

## 1 Caractérisation expérimentale de la cohérence

### 1-1 Protocole expérimental

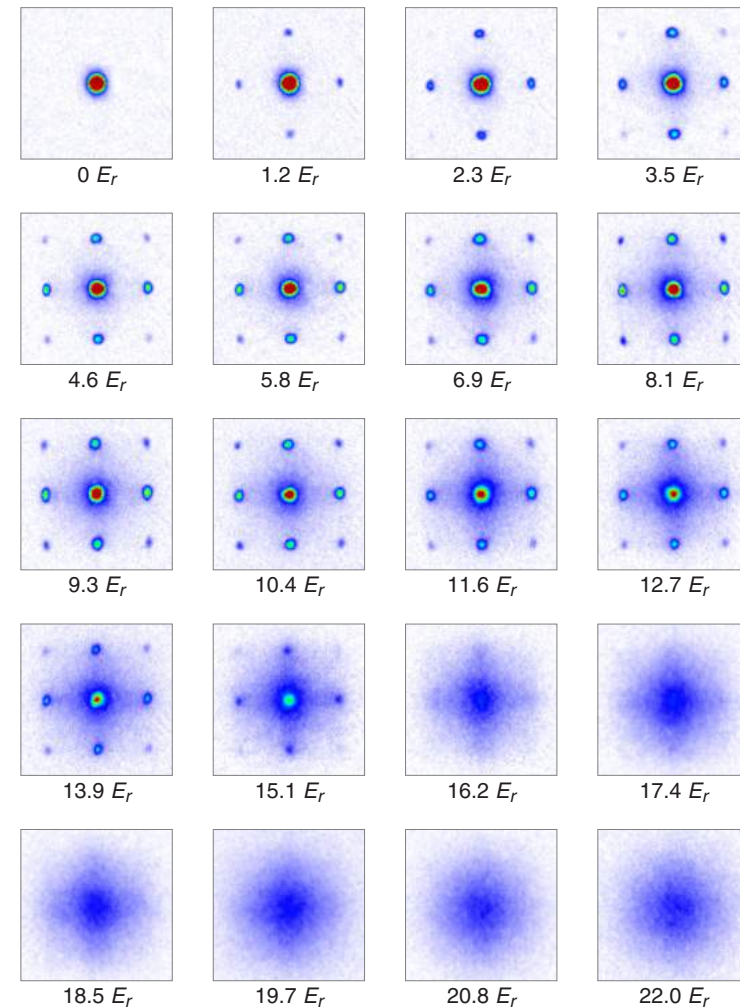
La première expérience (Greiner, Mandel, et al. 2002) qui a exploré avec des atomes froids la transition entre état superfluide et état isolant de Mott a consisté à préparer un condensat pratiquement pur de  $2 \times 10^5$  atomes de rubidium dans un piège harmonique quasi-isotrope de fréquence  $\sim 24$  Hz. Le condensat a un rayon de  $26 \mu\text{m}$  et un réseau optique 3D cubique, créant le potentiel

$$V(\mathbf{r}) = V_0 [\sin^2(kx) + \sin^2(ky) + \sin^2(kz)], \quad (1)$$

est branché pour atteindre une profondeur de réseau  $V_0$  donnée, mesurée en unité d'énergie de recul  $E_r = \hbar^2 k^2 / 2m$ . Le branchement s'effectue relativement lentement (plusieurs dizaines de millisecondes) pour éviter de porter le nuage dans des modes excités<sup>1</sup>. À la fin du branchement, environ  $1.5 \times 10^5$  sites du réseau sont occupés.

La cohérence du gaz dans le réseau est testée par une technique de temps de vol. On coupe brusquement le potentiel de confinement et le réseau optique, on laisse le nuage s'étaler de manière ballistique pendant une durée de 15 ms et on mesure finalement la densité spatiale. Cette durée d'expansion est suffisamment longue pour que la taille finale du nuage soit beaucoup plus grande que la taille initiale. Si on néglige les interactions entre atomes pendant le temps de vol, on sait que la distribution spatiale mesurée est proportionnelle à la distribution en impulsion du nuage avant temps de vol.

Une série de résultats de mesure de densité après temps de vol est montrée sur la figure 1 pour des valeurs croissantes de  $V_0/E_r$ . Pour les valeurs les plus basses de  $V_0$ , typiquement jusqu'à  $12 E_r$ , on observe des pics de



**FIGURE 1.** Observation de la transition superfluide - isolant de Mott dans un réseau cubique. On mesure la distribution en impulsion des atomes dans un réseau optique de profondeur  $V_0$  (mesurée en unité d'énergie de recul  $E_r$ ) grâce à une technique de temps de vol. Les pics étroits (pics de Bragg), bien visibles pour  $V_0 < 13 E_r$ , sont caractéristiques de l'ordre à longue portée de l'état superfluide. Figure extraite de la thèse de M. Greiner, LMU, 2003.

<sup>1</sup>. Cette notion de branchement adiabatique est discutée en détail dans Trotzky, Pollet, et al. 2010 et refs. in.

diffraction marqués, qui sont caractéristiques d'une cohérence étendue sur le réseau et donc d'un état superfluide, comme nous allons le retrouver au paragraphe suivant. Pour de plus grandes valeurs de  $V_0$ , un fond diffus apparaît et l'amplitude des pics étroits décroît, puis s'annule pour  $V_0 > 17 E_r$ .

Avant de relier de manière quantitative la visibilité des pics de diffraction à la cohérence à longue portée dans le réseau, indiquons le domaine de paramètres concernés par la transition visible sur la figure 1. Nous pouvons convertir l'intervalle  $12$  à  $17 E_r$  en un intervalle pour le paramètre pertinent dans le modèle de Bose–Hubbard,  $U/J$ , c'est-à-dire le rapport entre énergie d'interaction sur site et amplitude tunnel. Le coefficient  $U$  varie relativement lentement avec  $V_0$ , cette variation étant due au fait que les fonctions de Wannier sont de plus en plus compactes quand  $V_0$  augmente (figure 2a). En revanche, l'amplitude tunnel  $J$  varie très vite avec  $V_0$ , puisque c'est une fonction exponentiellement décroissante de  $(V_0/E_r)^{1/2}$  (figure 2b). Le domaine de transition correspondant à  $12 E_r < V_0 < 17 E_r$  est donc large, typiquement  $25 J < U < 100 J$  (figure 2c).

## 1-2 Les pics de Bragg

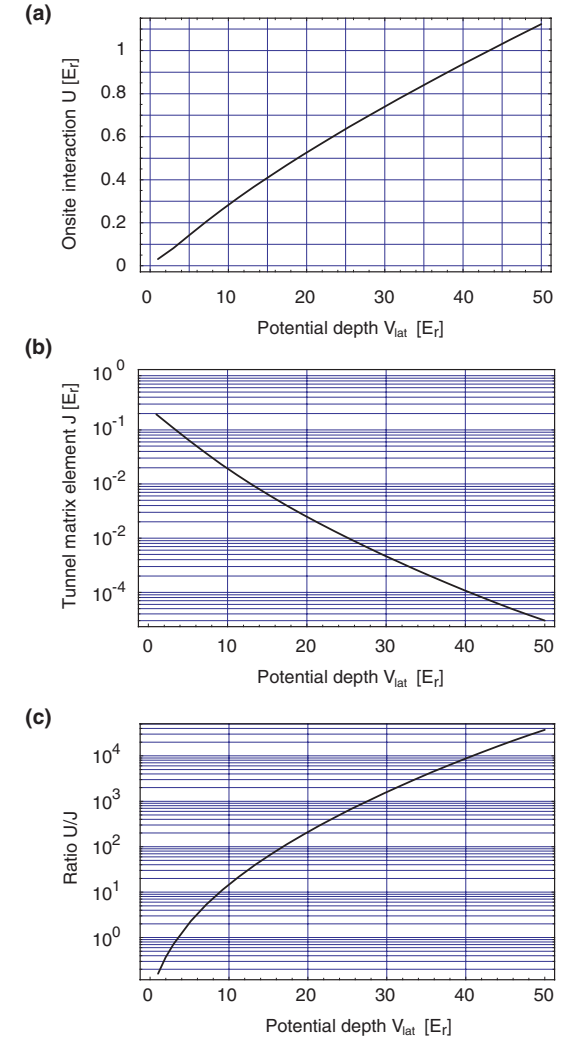
Comme nous l'avons écrit plus haut, l'expérience conduisant aux résultats de la figure 1 peut être interprétée comme une mesure de la distribution en impulsion initiale, pourvu que l'on puisse négliger à la fois les effets de taille initiale et le rôle des interactions durant le temps de vol<sup>2</sup>. Pour simplifier notre analyse, nous nous placerons ici dans le cadre de cette approximation.

Nous utiliserons ici le formalisme de la seconde quantification, bien adapté à ce problème à  $N$  corps. La distribution en vecteur d'onde  $\mathbf{k} = \mathbf{p}/\hbar$  est donnée par

$$\mathcal{N}(\mathbf{k}) = \langle \hat{\Phi}^\dagger(\mathbf{k}) \hat{\Phi}(\mathbf{k}) \rangle, \quad (2)$$

où la moyenne est prise sur l'état du système avant temps de vol et où  $\hat{\Phi}(\mathbf{k})$  est l'opérateur champ en point de vue vecteur d'onde, c'est-à-dire la transformée de Fourier de l'opérateur champ en point de vue position  $\hat{\Psi}(\mathbf{r})$ .

2. Une analyse détaillée de ces hypothèses a été menée par Gerbier, Trotzky, et al. (2008).



**FIGURE 2.** Variation de l'énergie sur site  $U$ , du coefficient tunnel  $J$  et du rapport  $U/J$  en fonction de la profondeur du réseau cubique  $V_0/E_r$ . Figure extraite de la thèse de M. Greiner, LMU, 2003.

Pour le problème du réseau optique traité en formalisme de Bose-Hubbard, on a

$$\hat{\Psi}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{j}} w_{\mathbf{j}}(\mathbf{r}) \hat{b}_{\mathbf{j}} \quad \text{avec } \mathbf{j} = (j_x, j_y, j_z) \in \mathbb{Z}^3, \quad (3)$$

soit, en utilisant le fait que les différentes fonctions de Wannier se déduisent les unes des autres par translation  $w_{\mathbf{j}}(\mathbf{r}) = w_0(\mathbf{r} - \mathbf{j}a)$  :

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}(\mathbf{k}) &= \int e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \left( \sum_{\mathbf{j}} w_{\mathbf{j}}(\mathbf{r}) \hat{b}_{\mathbf{j}} \right) d^3r \\ &= \tilde{w}_0(\mathbf{k}) \sum_{\mathbf{j}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{j}a} \hat{b}_{\mathbf{j}} \end{aligned} \quad (4)$$

où l'on a introduit la transformée de Fourier  $\tilde{w}_0(\mathbf{k})$  de la fonction de Wannier  $w_0(\mathbf{r})$ .

Reportons cette expression de l'opérateur champ dans la définition de la distribution en impulsion (2) :

$$\mathcal{N}(\mathbf{k}) = |\tilde{w}_0(\mathbf{k})|^2 \sum_{\mathbf{j}, \mathbf{j}'} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{j}-\mathbf{j}')a} \langle \hat{b}_{\mathbf{j}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{j}'} \rangle. \quad (5)$$

On trouve donc bien que la distribution après temps de vol nous renseigne sur la cohérence de phase entre les différents sites du réseau, caractérisée par la fonction de corrélation à un corps  $\langle \hat{b}_{\mathbf{j}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{j}'} \rangle$ .

Plaçons-nous dans l'hypothèse d'un gaz remplissant le réseau de manière homogène, même si ce n'était pas la situation de l'expérience initiale de Greiner, Mandel, et al. (2002) et discutons les deux cas d'une phase superfluide et d'une phase isolante :

— Pour une phase superfluide, on attend un ordre à longue portée, c'est-à-dire

$$\text{Phase superfluide : } \langle \hat{b}_{\mathbf{j}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{j}'} \rangle \sim b_0^2 \neq 0 \quad \text{pour } |\mathbf{j} - \mathbf{j}'| \gg 1. \quad (6)$$

Ceci conduit à une addition cohérente de la contribution des  $N_s^2$  couples  $(\mathbf{j}, \mathbf{j}')$  à la somme (5) ( $N_s$  représente le nombre de sites du réseau), pourvu que le vecteur  $\mathbf{k}$  pointe dans des directions bien précises de l'espace telles que  $k_i a$  soit un multiple de  $2\pi$  ( $i = x, y, z$ ). Cette

interférence constructive dans des directions privilégiées de l'espace est l'analogie de la diffraction de Bragg des rayons X ou des électrons par un cristal, d'où le nom de *pic de Bragg*. La largeur angulaire des pics de Bragg peut être arbitrairement petite, limitée seulement par la taille de l'échantillon ou la résolution expérimentale.

— Pour une phase isolante, on s'attend à ce que la fonction de corrélation  $\langle \hat{b}_{\mathbf{j}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{j}'} \rangle$  décroisse exponentiellement vite avec la distance  $|\mathbf{j} - \mathbf{j}'|a$  sur une échelle de longueur  $\ell$  fonction de  $U/J$  :

$$\text{Phase isolante : } \langle \hat{b}_{\mathbf{j}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{j}'} \rangle \sim b_0^2 e^{-|\mathbf{j}-\mathbf{j}'|a/\ell}. \quad (7)$$

L'interférence constructive est donc fortement réduite, et cela d'autant plus que  $\ell$  est faible. Les pics ont une largeur angulaire non nulle, proportionnelle à  $1/\ell$ . Quand  $\ell$  devient tellement petite qu'elle est comparable au pas  $a$  du réseau, toute interférence constructive dans les pics de Bragg disparaît, et on atteint le cas limite capturé par l'*ansatz* de Gutzwiller :

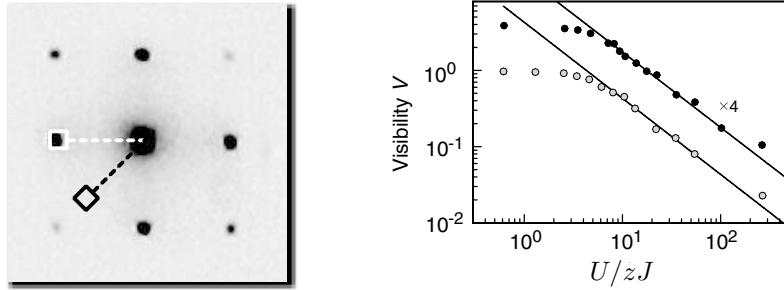
$$\text{Phase isolante selon l'ansatz de Gutzwiller : } \langle \hat{b}_{\mathbf{j}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{j}'} \rangle = 0 \text{ si } \mathbf{j} \neq \mathbf{j}'. \quad (8)$$

### 1-3 Visibilité des pics de Bragg

Pour évaluer la visibilité de ces pics, qui donne une estimation de la portée de la cohérence de phase dans le réseau [cf. eq. (5)], Gerbier, Widera, et al. (2005b) ont développé une méthode résumée sur la figure 3 [voir aussi Gerbier, Widera, et al. (2005a)]. Ils ont mesuré le signal  $\mathcal{N}(\mathbf{k})$  sur un pic de Bragg, au point  $\mathbf{k}_1$  tel que  $k_{1,x} = k$ ,  $k_{1,y} = 0$  ainsi qu'au point  $\mathbf{k}_2$  situé sur la diagonale à la même distance du centre que  $\mathbf{k}_1$  :  $k_{2,x} = k_{2,y} = k/\sqrt{2}$ . Ils ont ensuite défini la visibilité

$$\mathcal{V} = \frac{\mathcal{N}(\mathbf{k}_1) - \mathcal{N}(\mathbf{k}_2)}{\mathcal{N}(\mathbf{k}_1) + \mathcal{N}(\mathbf{k}_2)}. \quad (9)$$

L'intérêt de cette définition est d'annuler (ou presque) la contribution de la fonction de Wannier, qui est quasi-isotrope, au signal pour ne garder que le terme d'interférence. Le résultat de cette analyse est également montré sur la figure 3. On voit que la visibilité est une fonction continue du rapport  $U/J$ . Elle ne s'annule pas au point de transition, contrairement à ce



**FIGURE 3.** (a) La mesure de la visibilité des pics de Bragg se fait en comparant le signal de temps de vol pour deux impulsions de même module,  $\mathbf{k}_1$  (carré blanc) et  $\mathbf{k}_2$  (carré noir) [cf. eq. (9)]. (b) Mesure de la visibilité en fonction du rapport  $U/zJ$ , où  $z = 6$  est le nombre de proches voisins d'un site donné. Les deux jeux de données correspondent à des nombres d'atomes différents :  $N = 5.9 \times 10^5$  (cercles noirs) et  $3.6 \times 10^5$  (cercles gris). Pour ce cas 3D, la position de la transition à  $\bar{n} = 1$  calculée grâce à une méthode Monte Carlo quantique est  $(U/zJ)_c = 4.9$  (Capogrosso-Sansone, Prokof'ev, et al. 2007). Figures extraites de Gerbier, Widera, et al. (2005b).

que pourrait suggérer l'ansatz de Gutzwiller (Zwenger 2003; Sengupta & Dupuis 2005), mais elle décroît comme  $(U/J)^{-1}$  dans la limite des réseaux profonds.

Cette loi d'échelle se comprend simplement grâce à la théorie des perturbations, en traitant  $J/U$  comme un petit paramètre pour l'hamiltonien de Bose-Hubbard (Gerbier, Widera, et al. 2005b)

$$\hat{H} = -J \sum_{\langle ij \rangle} \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_j + \frac{U}{2} \sum_j \hat{n}_j (\hat{n}_j - 1). \quad (10)$$

Nous nous plaçons ici à une dimension pour simplifier les notations et nous prenons un remplissage unité pour les sites. Quand le paramètre  $J/U$  est nul, l'état fondamental du système est l'isolant de Mott « parfait » :

$$|\Psi_{\text{isol.}}\rangle = |\dots 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots\rangle. \quad (11)$$

Pour  $J/U$  petit mais non nul, l'état perturbé s'écrit au premier ordre :

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &= |\Psi_{\text{isol.}}\rangle + \frac{J}{U} \sum_j \left( \hat{b}_{j+1}^\dagger \hat{b}_j + \hat{b}_{j-1}^\dagger \hat{b}_j \right) |\Psi_{\text{isol.}}\rangle \\ &= |\dots 1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots\rangle \\ &+ \sqrt{2} \frac{J}{U} (|\dots 1, 1, 2, 0, 1, 1, \dots\rangle + |\dots 1, 1, 0, 2, 1, 1, \dots\rangle + \dots) \end{aligned} \quad (12)$$

puisque tous les états excités considérés ont la même énergie  $U$  au dessus du fondamental. L'interprétation physique de ces états excités est simple : ils correspondent à un défaut localisé de l'isolant de Mott avec un trou sur un site, avec son site voisin, à gauche ou à droite, doublement occupé.

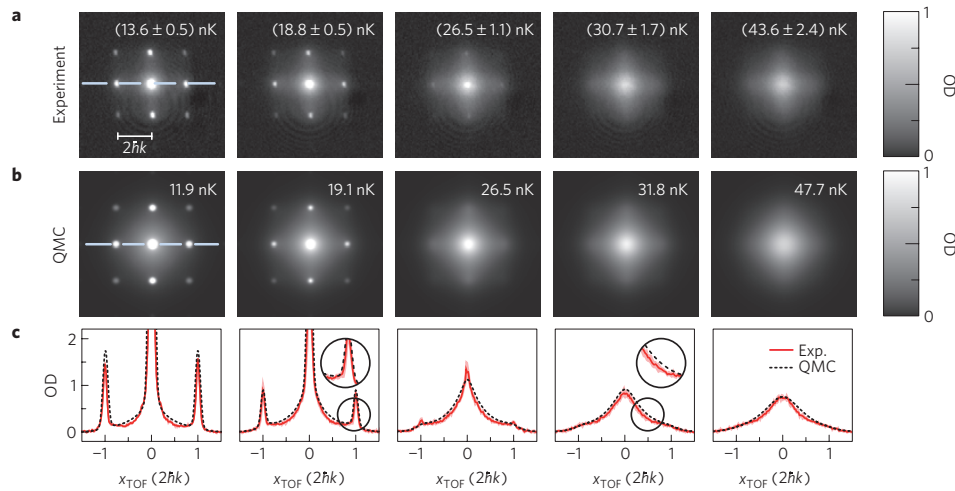
Sur cet état perturbé, on voit que des corrélations entre proches voisins apparaissent :

$$\langle \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_{j+1} \rangle \approx 4 \frac{J}{U}. \quad (13)$$

Une fois injecté dans l'expression (5) pour la distribution en impulsion, ce résultat permet de rendre compte de la loi d'échelle observée en figure 3.

#### 1-4 Effets de température finie

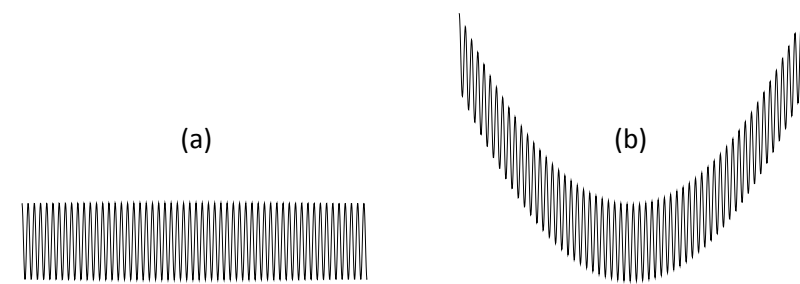
Jusqu'ici, nous avons supposé que le système, qu'il se trouve dans la phase de Mott ou dans la phase superfluide, était à température nulle. Un autre facteur à prendre en compte pour expliquer de manière quantitative la visibilité des pics de Bragg est la température finie de l'échantillon. Nous ne rentrerons pas dans les détails de ces effets thermiques, souvent subtils [voir par exemple Gerbier (2007)]. Mentionnons simplement l'étude très détaillée décrite par Trotzky, Pollet, et al. (2010), qui compare des données expérimentales et des simulations Monte Carlo quantiques pour des nombres de particules comparables (jusqu'à  $3 \times 10^5$ ). L'accord théorie-expérience est remarquable et la simulation permet d'assigner une température aux échantillons préparés dans le réseau (figure 4). Grâce à cette comparaison, on peut vérifier que le branchement du réseau se fait bien adiabatiquement, sans ajout d'entropie. Cette étape de vérification est indispensable si l'on souhaite utiliser ce système d'atomes froids sur réseau comme un simulateur de la physique du modèle de Hubbard.



**FIGURE 4.** Distributions en impulsion mesurées (ligne du haut) et calculées (ligne du bas) pour des atomes dans un réseau optique, pour différentes températures (ici dans le régime superfluide). Les températures indiquées pour les données expérimentales sont obtenues en supposant un suivi adiabatique lors du chargement du réseau. Les températures indiquées pour les données théoriques ont été ajustées de manière à optimiser l'accord avec l'expérience. Figure extraite de Trotzky, Pollet, et al. (2010).

**Autres études.** Avant de passer aux méthodes d'investigation résolues spatialement, signalons que plusieurs autres techniques ont été développées pour étudier le nuage atomique dans sa globalité, c'est-à-dire le système non homogène obtenu dans la superposition réseau + potentiel confinant (magnétique ou lumineux).

- La première consiste à faire une étude spectroscopique des excitations du gaz, par exemple en modulant temporellement la puissance du réseau. La nature continue ou discrète du spectre permet d'identifier les phases superfluides et isolantes. (Stöferle, Moritz, et al. 2004; Köhl, Moritz, et al. 2005; Haller, Hart, et al. 2010).
- Une méthode consistant à faire une étude du bruit des images obtenues après temps de vol permet de révéler l'ordre spatial dans la phase



**FIGURE 5.** (a) Potentiel périodique étudié au chapitre 4. (b) Potentiel périodique superposé à un potentiel de confinement harmonique.

isolante. Cette technique est directement inspirée de l'effet Hanbury-Brown et Twiss (Altman, Demler, et al. 2004; Fölling, Gerbier, et al. 2005; Spielman, Phillips, et al. 2007; Guarrera, Fabbri, et al. 2008).

- L'étude du transport et du temps de mise à l'équilibre spatial d'un nuage d'atomes permet également d'explorer la transition superfluide-isolant [cf. chapitre précédent avec notamment les articles de Mun, Medley, et al. (2007) et Hung, Zhang, et al. (2010)].

Signalons enfin que ces études expérimentales ont pour certaines été menées en dimension réduite : 1D pour Stöferle, Moritz, et al. (2004) and Haller, Hart, et al. (2010) et 2D pour Spielman, Phillips, et al. (2007), Spielman, Phillips, et al. (2008), and Jiménez-García, Compton, et al. (2010), avec dans les deux cas une valeur du point critique  $U/J$  en bon accord avec les prédictions théoriques [voir par exemple Wessel, Alet, et al. (2004)].

## 2 Incompressibilité et gaz piégé

Jusqu'ici, aussi bien notre description théorique que l'interprétation des résultats expérimentaux ont été faites dans l'hypothèse d'un gaz remplissant le réseau de manière homogène. Or, la présence du piège harmonique servant à confiner les atomes sur une échelle de longueur grande devant le pas du réseau change de manière significative la nature du problème (fi-



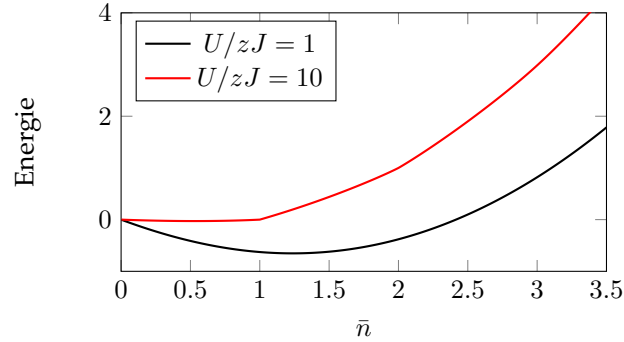


FIGURE 6. Variation de l'énergie par site en fonction du nombre moyen d'atomes par site  $\bar{n}$ , pour différentes valeurs de  $zJ/U$ .

gure 5). Le gaz n'a pas une densité constante sur toute l'étendue du réseau, de sorte que différentes phases, superfluides et isolantes peuvent être simultanément présentes dans le piège, dans des régions différentes de l'espace.

La notion-clé pour aborder ce problème du gaz piégé est l'*incompressibilité* de l'état isolant, c'est-à-dire le fait que la densité ne change pas si on modifie légèrement le potentiel chimique du fluide. Pour dégager cette notion, nous allons d'abord revenir au cas du gaz homogène et à l'*ansatz* de Gutzwiller développée au chapitre précédent. Nous allons voir que les phases isolantes sont caractérisées par une discontinuité du potentiel chimique, signalant l'incompressibilité du système. Cette incompressibilité subsiste au delà de l'approximation de Gutzwiller et constitue la véritable « signature » de la transition superfluide-isolant de Mott.

### 2-1 Approche de Gutzwiller et incompressibilité

Au chapitre précédent, nous avons présenté l'*ansatz* de Gutzwiller qui consiste à poser que l'état du gaz est un état factorisé par rapport aux différents sites du réseau, cet état étant le même en chaque site :

$$|\Psi_G\rangle = |\text{site 1} : \Psi\rangle \otimes |\text{site 2} : \Psi\rangle \otimes \dots \otimes |\text{site } N_s : \Psi\rangle. \quad (14)$$

L'état  $|\Psi\rangle$  sur un site donné se décompose sur la base de Fock, c'est-à-dire les états à nombre donné de particules :

$$|\Psi\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} c(n)|n\rangle \quad \sum_n |c(n)|^2 = 1. \quad (15)$$

Les coefficients  $\{c(n)\}$  sont déterminés de manière à minimiser l'énergie totale pour un taux de remplissage  $\bar{n}$  fixé :

$$\bar{n} = \frac{N_{\text{atomes}}}{N_{\text{sites}}} = \sum_n n |c(n)|^2. \quad (16)$$

Au chapitre précédent, nous nous sommes intéressés essentiellement à la variation de la dispersion  $\Delta n$  avec les deux paramètres du problème,  $U/J$  et  $\bar{n}$ . Nous avons notamment montré que  $\Delta n$  s'annule pour des remplissages  $\bar{n}$  entiers, pourvu que  $U/J$  soit assez grand. Ce sont ces phases à  $\Delta n = 0$  que nous avons identifiées comme isolantes.

Nous allons maintenant nous intéresser à la variation de l'énergie par site en fonction des deux paramètres  $U/J$  et  $\bar{n}$ . Nous avons tracé cette variation sur la figure 6. Pour les faibles  $\bar{n}$  ( $\bar{n} \ll 1$ ), on constate que l'énergie est négative et varie comme

$$E(\bar{n}) = -zJ\bar{n}, \quad (17)$$

ce qui revient à mettre tous les atomes dans l'état fondamental à une particule, de quasi-moment  $\mathbf{q} = 0$  et d'énergie  $-zJ$ . Quand  $\bar{n}$  augmente, les interactions deviennent significatives et l'énergie devient positive. L'approche la plus naïve conduit à une variation quadratique du type

$$\epsilon \approx -zJ\bar{n} + \frac{U}{2}\bar{n}(\bar{n} - 1), \quad (18)$$

ce qui correspond *grosso modo* à la variation observée. Mais les détails de cette variation sont importants, en particulier au voisinage des points de remplissage entier pour lesquels nous avons vu qu'il y avait une perte complète de superfluidité.

Plus précisément, quand on prend  $U$  assez grand pour passer le seuil de la transition de Mott pour  $\bar{n} = 1$ , l'énergie en ce point est nulle : il n'y a ni

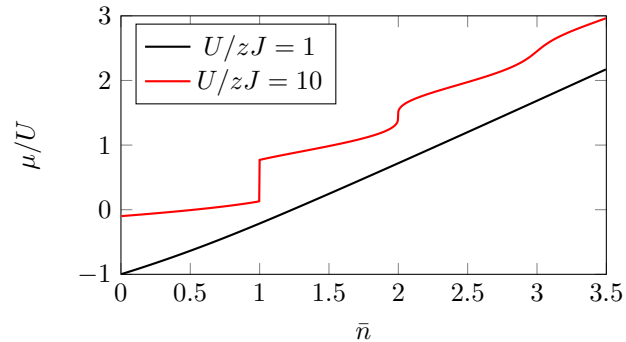


FIGURE 7. Potentiel chimique obtenu à partir de  $\mu = \frac{d\epsilon}{d\bar{n}}$ .

abaissement d'énergie dû à l'effet tunnel, ni élévation due aux interactions puisqu'il n'y a jamais deux atomes sur le même site.

Dans la limite  $U/(zJ) \gg 1$ , la variation avec  $\bar{n}$  de l'énergie par site  $\epsilon$  prend une allure de ligne brisée, dont l'enveloppe est proche de la prédiction naïve  $\epsilon \sim \frac{U}{2}\bar{n}(\bar{n} - 1)$  :

- tant que  $\bar{n} < 1$ , on met moins d'un atome par site et il n'y a pas de coût à ajouter une particule supplémentaire ;
- pour  $1 < \bar{n} < 2$ , chaque site est occupé une fois et toute nouvelle particule coûte l'énergie  $U$  ;
- pour  $n < \bar{n} < n + 1$  avec  $n$  entier, certains sites sont occupés par  $n$  particules et d'autres par  $n + 1$  particules. L'ajout d'une nouvelle particule se fait préférentiellement sur un site occupé par  $n$  particules et cela fait varier l'énergie de l'état fondamental par la quantité :

$$\begin{aligned} \frac{U}{zJ} \gg 1 : \quad E(N+1) &= E(N) + \frac{U}{2} [n(n+1) - n(n-1)] \\ &= E(N) + nU. \end{aligned} \quad (19)$$

**Potentiel chimique et gap.** Par dérivation numérique, on en déduit le potentiel chimique en version microcanonique,

$$\mu = \frac{\partial E}{\partial N} = \frac{d\epsilon}{d\bar{n}}, \quad (20)$$

que l'on trace en fonction de  $\bar{n}$  sur la figure 7. Cette variation présente plusieurs caractéristiques importantes.

- Pour des valeurs de  $U/zJ$  inférieures au seuil de la première annulation de  $\Delta n$ , la variation de  $\mu$  en fonction de  $\bar{n}$  est continue.
- Quand on atteint le seuil de  $U/zJ$  pour lequel  $\Delta n$  s'annule à la valeur  $\bar{n} = 1$  ( $U/zJ \approx 6$ ), une discontinuité de  $\mu$  apparaît. En d'autres termes, on peut définir en ce point deux valeurs du potentiel chimique,  $\mu_{\pm}(\bar{n})$ .
- Ce type de discontinuité se retrouve pour toutes les valeurs entières de  $\bar{n}$ , pourvu que l'on choisisse  $U/zJ$  assez grand pour avoir  $\Delta n = 0$  en ce point.
- Dans la limite  $U/zJ \gg 1$ , la variation en ligne brisée de  $\epsilon(\bar{n})$  se transcrit en une évolution en marche d'escalier pour sa dérivée  $\mu$ , avec un saut de  $\mu \approx 0$  à  $\mu \approx U$  pour  $\bar{n} = 1$ , de  $\mu \approx (n-1)U$  à  $\mu \approx nU$  pour  $\bar{n} = n$  [cf. (19)].

Cette discontinuité du potentiel chimique est en fait la signature véritable de la transition entre un état superfluide et un état isolant. Si l'on revient à l'énergie du système total  $E = N_{\text{sites}}\epsilon$ , et qu'on choisit un remplissage entier, par exemple  $\bar{n} = 1$  ou de manière équivalente  $N = N_{\text{sites}}$ , cette discontinuité signifie que l'énergie à payer pour ajouter une particule

$$\mu_+(N) = \frac{E(N+1) - E(N)}{(N+1) - N} = E(N+1) - E(N) \quad (21)$$

est différente de l'énergie gagnée quand on enlève une particule

$$\mu_-(N) = E(N) - E(N-1). \quad (22)$$

En d'autres termes, le gap défini par

$$\Delta(N) = E(N+1) + E(N-1) - 2E(N) = \mu_+(N) - \mu_-(N) \quad (23)$$

est non nul au point de remplissage entier : il faut payer une énergie finie, non nulle à la limite thermodynamique, pour créer dans le système une excitation élémentaire de type particule-trou, où l'on ajoute une particule à un endroit et on crée un trou à un autre. On déduit immédiatement de (19) que la valeur de ce gap est  $\sim U$  dans le cas  $U \gg J$ .



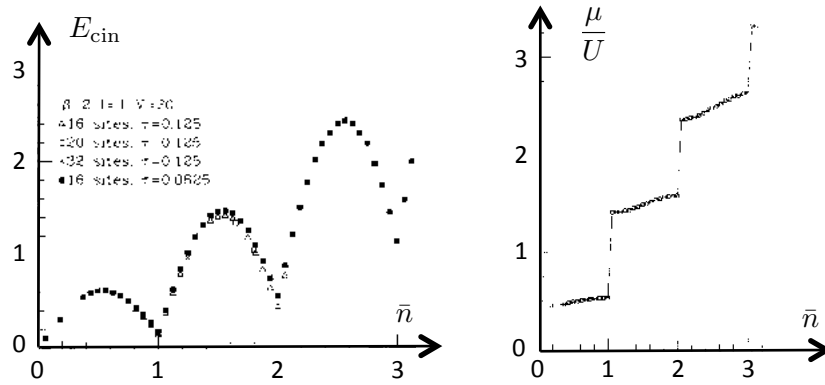


FIGURE 8. Etude de la transition superfluide-isolant de Mott à 1D par une méthode de Monte-Carlo quantique pour un rapport  $U/J = 40$  (ici  $t \equiv J, V \equiv \frac{U}{2}$ ). Gauche : variation de l'énergie cinétique avec le taux de remplissage  $\rho \equiv \bar{n}$ . Droite : variation du potentiel chimique  $\rho \equiv \bar{n}$ . Figures extraites et adaptées de Batrouni, Scalettar, et al. (1990).

**Gap et incompressibilité.** Dans ce qui va suivre, nous allons paramétrer le gaz par son potentiel chimique  $\mu$  plutôt que par le nombre moyen de particules par site  $\bar{n}$ . La discontinuité de  $\mu$  quand  $\bar{n}$  passe par une valeur entière devient alors

$$\left. \frac{\partial \mu}{\partial \bar{n}} \right|_{\bar{n}=n} = \infty \quad \longrightarrow \quad \kappa \equiv \left. \frac{\partial \bar{n}}{\partial \mu} \right|_{\mu \in [\mu_-, \mu_+]} = 0. \quad (24)$$

La quantité  $\kappa$ , appelée *compressibilité* du système, s'annule donc quand  $\mu$  est dans l'intervalle  $[\mu_-, \mu_+]$ . Le système est alors incompressible : le nombre moyen de particule par site  $\bar{n}$ , et donc la densité du fluide, ne varient pas quand on modifie le potentiel chimique.

## 2-2 Au delà de Gutzwiller : calculs numériques

Le fait que  $\Delta n$  s'annule dès qu'on entre dans la phase isolante est un artefact du choix en fait très restreint de notre classe de fonctions d'essai. En effet, ces fonctions présentent soit un ordre à longue portée avec  $\langle \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_i \rangle \neq 0$

pour tout couple de sites  $(i, j)$ , soit un écart-type  $\Delta n = 0$ . Les traitements numériques exacts, fondés sur des méthodes Monte Carlo quantiques, permettent d'aller au delà de cette simplification quelque peu abusive. Ils s'attachent à rechercher des phases incompressibles, telles que  $\partial \bar{n} / \partial \mu = 0$ . Ces phases incompressibles vont de pair avec l'absence d'ordre à longue portée. En effet cet ordre s'obtient grâce à des particules (et/ou des trous) délocalisés sur l'ensemble du réseau, ce qui n'est pas énergétiquement favorable si l'état fondamental est « protégé » par un gap  $\Delta(N)$  non nul.

On a représenté sur la figure 8 un exemple de résultat numérique obtenu par Batrouni, Scalettar, et al. (1990) sur un système unidimensionnel. On y voit apparaître :

- Une réduction forte de l'énergie cinétique, proportionnelle à  $\langle \hat{b}_{j+1}^\dagger \hat{b}_j \rangle$  pour des remplissages entiers, mais pas l'annulation complète prédite notre *ansatz* précédent : il reste donc une corrélation de phase non nulle entre sites voisins, et le nombre de particules par sites n'est pas strictement figé.
- L'apparition de plateaux dans le tracé de la densité en fonction du potentiel chimique, confirmant l'incompressibilité du système pour des remplissages entiers.

Pour ce problème 1D, la transition est de type Kosterlitz–Thouless et l'état superfluide à température nulle n'est pas décrit par un vrai ordre à longue portée, mais une décroissance algébrique de la fonction  $g_1$  avec la distance  $(i - j)a$  entre les sites considérés. L'approximation de champ moyen ne décrit alors pas très bien la position de la transition, qui est trouvée numériquement à  $U/J = 3.37$  (Kühner, White, et al. 2000) pour  $\bar{n} = 1$  alors que la prédiction de l'*ansatz* de Gutzwiller vue au chapitre précédent est  $U/zJ \approx 5.8$ , soit  $U/J \approx 11.6$ . Signalons également le travail théorique et expérimental récent de Boéris, Gori, et al. (2016), prolongeant cette étude au delà du cas des liaisons fortes considéré ici.

Ces études Monte Carlo ont été généralisées plus récemment à trois dimensions par Capogrosso-Sansone, Prokof'ev, et al. (2007), qui ont trouvé la valeur  $U/J \approx 29.34$  pour la position de la transition superfluide-isolant pour un remplissage  $\bar{n} = 1$ . Ce résultat est relativement proche de la valeur prédite par la méthode variationnelle à la Gutzwiller :  $U/zJ \approx 5.8$  avec  $z = 6$ , soit  $U/J \approx 35$ .

### 2-3 Comment décrire un gaz piégé

Pour décrire de manière quantitative le comportement du fluide dans un potentiel extérieur, deux ingrédients supplémentaires sont nécessaires :

- **Le passage aux variables  $\mu, T$ .** Nous avons utilisé jusqu'ici les variables du point de vue canonique, c'est-à-dire la température et le nombre d'atomes  $N$  dans le réseau (ou le taux d'occupation de chaque site  $\bar{n}$ ). À partir de l'énergie  $E(N)$  de l'état fondamental, nous avons pu déterminer le potentiel chimique en point de vue canonique  $\mu = \frac{\partial E}{\partial N}$ . Nous allons désormais utiliser les variables caractéristiques du point de vue grand-canonique, à savoir le potentiel chimique  $\mu$  et la température  $T$ , et nous en déduisons les autres quantités thermodynamiques du système, comme le taux d'occupation  $\bar{n}$ . Ce point de vue correspond physiquement à un système pouvant échanger des particules avec un réservoir, le réservoir imposant son potentiel chimique. Cette situation correspond intuitivement à celle d'un gaz placé dans un potentiel de piégeage  $V_{\text{trap}}(\mathbf{r})$  : une région donnée autour du point  $\mathbf{r}_0$  ressent un potentiel moyen  $\bar{V}_{\text{trap}} \approx V_{\text{trap}}(\mathbf{r}_0)$  et elle échange des particules avec les autres régions du piège, ressentant chacune un potentiel de confinement différent.
- **L'approximation de densité locale.** Supposons que l'on a réussi à déterminer l'état du fluide homogène, sa densité  $n_{\text{homog}}$  ou son énergie  $E_{\text{homog}}$  par exemple, en fonction de son potentiel chimique  $\mu$  et de sa température  $T$ .

Plaçons maintenant le fluide dans un potentiel extérieur  $V_{\text{trap}}(\mathbf{r})$  qui le confine et posons  $V_{\text{trap}}(0) = 0$  au centre du piège ; caractérisons ce fluide par son potentiel chimique  $\mu_0$  et sa température  $T$ . Si les échelles de longueur typiques du système homogène – la longueur de cicatrisation ou la longueur d'onde thermique par exemple – sont petites devant la taille caractéristique du gaz piégé, on peut faire l'approximation suivante : l'état du fluide au point  $\mathbf{r}$  doit être semblable à l'état trouvé pour le fluide homogène pour la même température  $T$  et pour le potentiel chimique local

$$\mu(\mathbf{r}) = \mu_0 - V_{\text{trap}}(\mathbf{r}). \quad (25)$$

Dans ces conditions, la mesure d'une quantité thermodynamique comme la densité  $n(\mathbf{r}, T)$  sur toute l'étendue du piège permet de re-

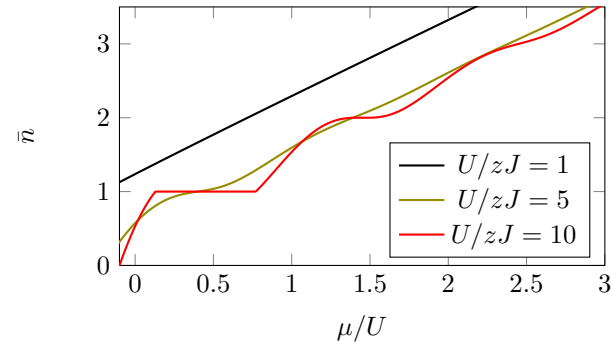


FIGURE 9. Variation du nombre moyen de particules par site  $\bar{n}$  avec  $\mu$ , pour différentes valeurs de  $U/zJ$  (point de vue grand canonique).

monter aux propriétés du gaz homogène :

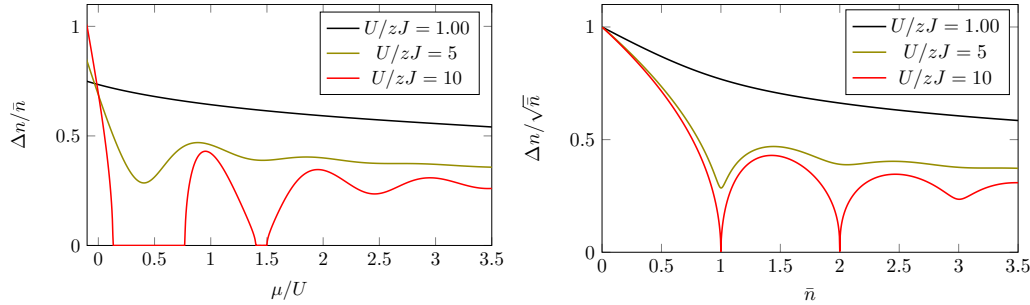
$$n(\mathbf{r}, T) = n_{\text{homog}}[\mu_0 - V_{\text{trap}}(\mathbf{r}), T], \quad (26)$$

c'est-à-dire l'ensemble des valeurs de la densité  $n_{\text{homog}}[\mu, T]$  pour  $\mu$  variant depuis  $-\infty$  jusqu'à la valeur au centre du piège  $\mu_0$ . Cette procédure a été mise à profit dans de nombreuses expériences d'atomes froids pour mesurer l'équation d'état de fluides quantiques (Ho & Zhou 2009).

Le principe de l'approche grand-canonique consiste à remplacer l'hamiltonien de Hubbard (10) par l'énergie libre

$$\begin{aligned} \hat{F} &= \hat{H} - \mu \hat{N} \\ &= -J \sum_{\langle ij \rangle} \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_j + \frac{U}{2} \sum_j \hat{n}_j (\hat{n}_j - 1) - \mu \sum_j \hat{n}_j. \end{aligned} \quad (27)$$

Nous nous intéressons ici à l'état fondamental (température  $T = 0$ ) et nous devons donc chercher l'état fondamental de  $\hat{F}$  et son énergie en fonction du potentiel chimique  $\mu$ . Ce potentiel chimique peut prendre *a priori* toutes les valeurs depuis  $-\infty$  (nombre de particules très faible) à  $+\infty$  (nombre de particules très élevé). Nous nous intéresserons ici à la région où  $\mu$  est entre 0 et quelques  $U$ , ce qui correspond à des taux de remplissage de quelques unités.



**FIGURE 10.** Gauche : variation avec  $\mu$  de la fluctuation relative du nombre de particules par site, pour différentes valeurs de  $zJ/U$ . Droite : pour rappel, variation de la même quantité avec  $\bar{n}$  (chapitre 4).

Comme dans l'approche développée précédemment, l'ansatz de Gutzwiller

$$|\Psi_G\rangle = |\text{site 1} : \Psi\rangle \otimes |\text{site 2} : \Psi\rangle \otimes \dots \otimes |\text{site } N_s : \Psi\rangle \quad (28)$$

avec

$$|\text{site } j : \Psi\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} c(n) |n\rangle_j \quad \sum_n |c(n)|^2 = 1, \quad (29)$$

permet de capturer une grande partie des phénomènes importants. La minimisation de  $\langle \Psi_G | \hat{F} | \Psi_G \rangle$  se fait d'une manière similaire à ce que nous avons vu plus haut, à ceci près que l'on n'impose plus un nombre donné de particule par site

$$\bar{n} = \frac{N_{\text{atomes}}}{N_{\text{sites}}} = \sum_n n |c(n)|^2, \quad (30)$$

mais que l'on se donne une valeur de  $\mu$ . Une fois le minimum sur  $\{c(n)\}$  trouvé pour toute valeur de  $\mu$ , on connaît les différentes quantités thermodynamiques, y compris le taux d'occupation moyen par site (30).

Un exemple de résultat, montrant la variation de  $\bar{n}$  avec  $\mu$ , est représenté sur la figure 9. On pourra vérifier que cette variation est l'exacte symétrique de celle trouvée précédemment pour  $\mu$  tracé en fonction de  $\bar{n}$ , pour les mêmes valeurs du paramètre  $zJ/U$ . Cette symétrie était bien sûr attendue

compte tenu de l'équivalence des ensembles statistiques en ce qui concerne le calcul des valeurs moyennes. Les zones isolantes apparaissent ici comme des plateaux, le long desquels la densité ne change pas bien que le potentiel chimique varie.

En plus de la variation de  $\bar{n}$  avec  $\mu$ , on peut également s'intéresser aux fluctuations  $\Delta n$ . Cette quantité est représentée en figure 10 (gauche) ; on y retrouve les plateaux  $\Delta n = 0$  sur les intervalles de valeurs de  $\mu$  pour lesquels  $\bar{n}$  est verrouillé à une valeur entière. Il est important de remarquer que ces situations  $\Delta n = 0$ , qui sont des points qu'on trace  $\Delta n$  en fonction de  $\bar{n}$  (figure 10, droite), sont obtenues pour des segments finis quand on trace  $\Delta n$  en fonction de  $\mu$ .

Enfin, nous avons tracé en figure 11 un diagramme de phase dans le plan  $(zj/U, \mu/U)$  avec une ligne continue séparant

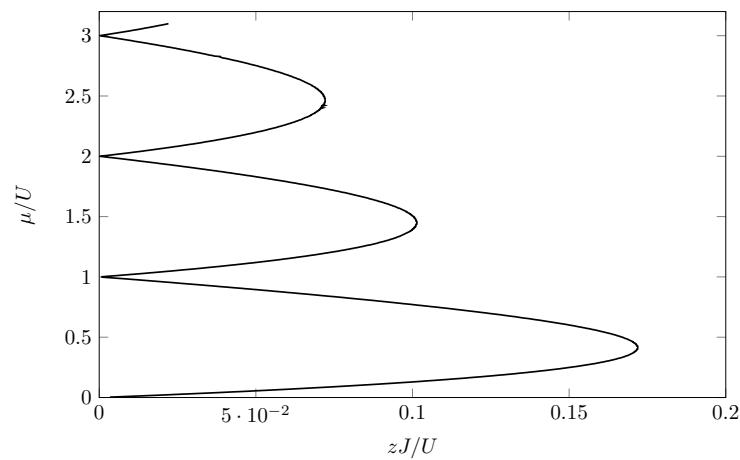
- des lobes correspondant à la phase isolante  $\frac{\partial \bar{n}}{\partial \mu} = 0$ . Dans le cadre de l'approximation de Gutzwiller,  $\Delta n = 0$  pour cette phase ; à chaque lobe est associé une valeur entière donnée de  $\bar{n}$ .
- une zone superfluide dans toute la partie droite du plan.

Notons que l'on peut retrouver analytiquement la forme d'un lobe correspondant à un remplissage  $n$  donné, au moins au voisinage de sa pointe, en se restreignant à l'ansatz de Gutzwiller tronqué présenté au chapitre précédent, où seuls  $c(n)$  et  $c(n \pm 1)$  sont non nuls.

## 2-4 La structure en « pièce montée » (*wedding cake*)

Nous revenons maintenant aux expériences menées dans des pièges harmoniques pour confiner les atomes. Comme nous l'avons indiqué plus haut, le principe de l'approximation de densité locale permet d'utiliser directement le diagramme de la figure 11 pour déterminer l'état stationnaire du nuage.

À température nulle, une configuration donnée du nuage correspond à un choix donné du paramètre  $zJ/U$  et une valeur du potentiel chimique au centre du piège  $\mu_0$ , soit un point dans le plan  $(zj/U, \mu/U)$ . L'état du fluide quand on s'éloigne du centre s'obtient par la substitution  $\mu \rightarrow \mu_0 - V_{\text{trap}}(\mathbf{r})$ , ce qui correspond à la demi-droite verticale  $\mu < \mu_0$ . Un exemple de cette construction est donné en figure 12. On obtient ainsi une structure qualifiée



(b)

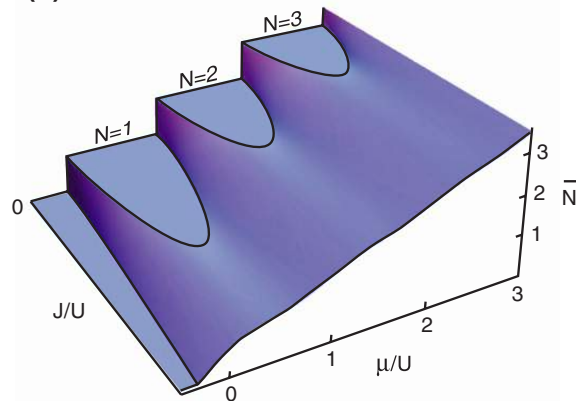


FIGURE 11. Haut : Lobes correspondant à la phase « isolant de Mott » dans le plan  $(zJ/U, \mu/U)$ . Le reste du plan correspond à la phase superfluide. Bas : représentation 3D de la variation du taux d'occupation par site  $\bar{n} \equiv \bar{N}$  en fonction des paramètres de contrôle  $J/U$  et  $\mu/U$ . Cette figure est extraite de la thèse de M. Greiner.

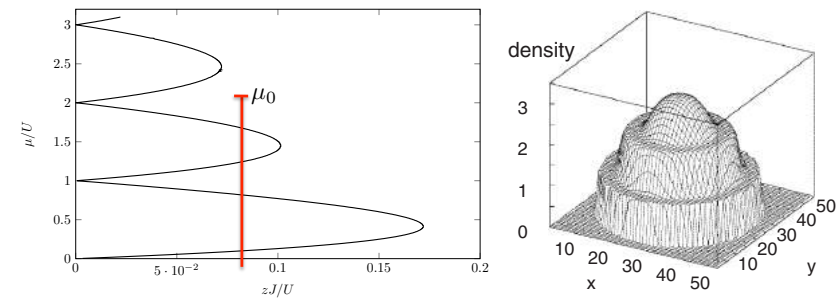
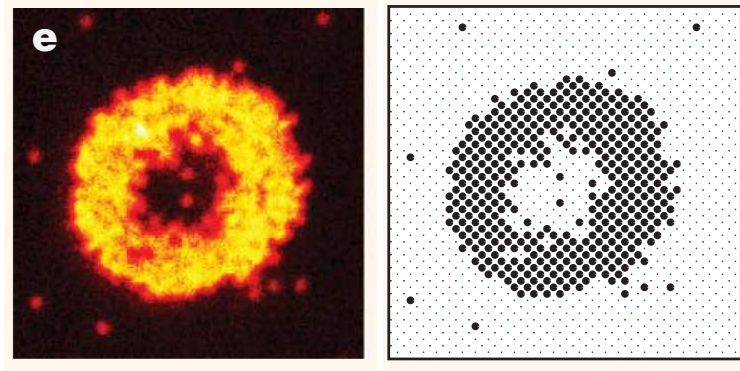


FIGURE 12. Gauche : Principe de l'approximation de densité locale : les différentes phases du gaz piégé s'obtiennent en partant du potentiel chimique central  $\mu_0$  et en traçant une demi-droite verticale (en rouge) correspondant aux différents potentiels chimiques  $\mu(\mathbf{r}) = \mu_0 - V_{\text{trap}}(\mathbf{r})$  rencontrés quand on s'éloigne du centre du piège. Droite : profil de densité attendu pour la configuration de la figure de gauche. Le centre du piège est superfluide et on traverse deux zones isolantes, avec  $\bar{n} = 2$  puis  $\bar{n} = 1$  quand on s'éloigne du centre du piège. La figure de droite a été calculée par M. Niemeyer et H. Monien dans une configuration 2D (et publiée par M. Greiner dans sa thèse).

de pièce montée ou de ziggourat selon les auteurs. Les plateaux de densités sont des phases isolantes et correspondent à des remplissages à nombre entier de particules par site ; ils sont séparés par des zones superfluides.

La première mise en évidence de cette structure a été faite par Campbell, Mun, et al. (2006) et Fölling, Widera, et al. (2006). Le principe de l'expérience de Campbell, Mun, et al. (2006) était de sonder le nuage d'atomes de Rb avec une micro-onde accordée sur la transition hyperfine  $F = 1 \rightarrow F = 2$ . En utilisant le fait que la fréquence de résonance n'est pas exactement la même pour les atomes isolés et pour ceux placés sur un site multiplement occupé, il a été possible de reconstruire la structure en pièce montée autour du centre du piège. Fölling, Widera, et al. (2006) utilisent également une micro-onde, mais en présence d'un gradient de champ magnétique. Ceci permet d'induire la transition hyperfine uniquement pour une fine tranche d'atomes. On fait alors une image de cette tranche pour révéler la structure en plateau.

Ces expériences ont reprises plus récemment avec des expériences de



**FIGURE 13.** Gauche : Exemple de distribution d'atomes dans un piège harmonique superposé à un réseau optique, mesuré avec un « microscope atomique ». Droite : distribution reconstruite, connaissant la réponse optique du système de détection. Cette image révèle deux phases « isolant de Mott », avec  $n = 2$  (disque sombre au centre) et  $n = 1$  (couronne brillante sur le bord), séparées par une mince zone où le taux de remplissage moyen décroît. Figure extraite de Sherson, Weitenberg, et al. (2010).  $V_{x,y} = 23 E_r$ .

« microscope atomique », permettant d'imager les atomes en les figeant sur les sites du réseau (Bakr, Peng, et al. 2009; Sherson, Weitenberg, et al. 2010). Nous avons détaillé le principe de ce microscope, qui combine piégeage dipolaire et mélasse optique, dans le cours 2014-15. Rappelons simplement que le profil de densité est en fait binaire, en raison des collisions inélastiques induites par les faisceaux laser de mélasse optique. Par un processus de photo-association, deux atomes occupant le même site peuvent donner naissance à une molécule diatomique qui n'est pas détectée. De ce fait, les sites contenant un nombre impair d'atomes sont vus comme « éclairés » ; les sites contenant un nombre pair d'atomes sont vus comme « sombres », tout comme les sites vides.

Nous montrons sur la figure 13 un exemple de distribution spatiale obtenue pour un gaz piégé à 2D : on y voit deux phases « isolant de Mott » avec un remplissage 2 pour la zone centrale (formant donc un disque sombre) et un remplissage 1 apparaissant comme une couronne brillante.

## 3 Le mode de Higgs

### 3-1 Paramètre d'ordre et fonctionnelle d'énergie

La transition entre l'état superfluide et l'état isolant de Mott est un exemple de transition de phase quantique, que l'on peut chercher à décrire de manière approchée par une théorie de champ moyen. Pour préciser la nature de cette transition, plaçons-nous en un point de remplissage entier,  $\bar{n} \in \mathbb{N}$ , et utilisons une fois encore l'ansatz de Gutzwiller. Nous avons vu au chapitre précédent que l'on peut restreindre la forme des fonctions d'essai aux trois composantes  $c(n)$  les plus peuplées, portant sur les états  $|\bar{n}\rangle$  et  $|\bar{n} \pm 1\rangle$  :

$$\begin{pmatrix} c(\bar{n} + 1) \\ c(\bar{n}) \\ c(\bar{n} - 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i(\eta+\varphi)} \sin \theta \sin \chi \\ \cos \theta \\ e^{i(\eta-\varphi)} \sin \theta \cos \chi \end{pmatrix}, \quad (31)$$

qui est bien normé pour n'importe quel choix des quatre paramètres réels  $\theta, \varphi, \eta, \chi$ . Le choix de se placer exactement à un remplissage entier impose des populations égales pour  $\bar{n} \pm 1$ , soit

$$\chi = \pi/4. \quad (32)$$

Par ailleurs, nous avons vu au chapitre 4 que le minimum d'énergie est atteint pour

$$\eta = 0; \quad (33)$$

fixons pour l'instant ce deuxième paramètre à sa valeur d'équilibre, nous reviendrons sur cette hypothèse en § 4. L'expression générale (31) se simplifie donc en

$$\begin{pmatrix} c(\bar{n} + 1) \\ c(\bar{n}) \\ c(\bar{n} - 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\varphi} \sin \theta / \sqrt{2} \\ \cos \theta \\ e^{-i\varphi} \sin \theta / \sqrt{2} \end{pmatrix}. \quad (34)$$

Par ailleurs, nous avons également vu au chapitre 4 que l'énergie ne dépend pas de  $\varphi$ , qui prend donc une valeur aléatoire lors de la transition isolant  $\rightarrow$  superfluide.

Définissons maintenant le paramètre d'ordre caractérisant cette transition. En analogie avec ce que nous avons vu pour un gaz homogène, considérons pour cela la valeur moyenne de l'opérateur  $\hat{b}$  dans l'état de Gutzwiller  $|\Psi_G\rangle$ . Nous obtenons à partir de (34), à une constante multiplicative

près

$$\psi = \rho e^{i\varphi} \quad \text{avec} \quad \rho = \frac{1}{2} \sin(2\theta). \quad (35)$$

Ce paramètre d'ordre est un nombre complexe et nous avons vu au chapitre 4 que l'énergie par site qui lui est associée s'écrit au voisinage de la transition

$$\epsilon(\psi) = \frac{U}{2} |\psi|^4 - A |\psi|^2 \quad (36)$$

avec

$$\begin{aligned} A &= \bar{n} z J \left[ 1 + \frac{1}{2\bar{n}} + \sqrt{1 + \frac{1}{\bar{n}}} \right] - \frac{U}{2} \\ &\approx 2\bar{n} z J - \frac{U}{2} \quad \text{pour} \quad \bar{n} \gg 1. \end{aligned} \quad (37)$$

On peut généraliser cette énergie au cas où l'état du gaz n'est pas le même sur chaque site du réseau. Continuons à travailler dans le cadre de l'ansatz de Gutzwiller :

$$|\Psi_G\rangle = |\text{site 1} : \Psi_1\rangle \otimes |\text{site 2} : \Psi_2\rangle \otimes \dots \otimes |\text{site } j : \Psi_j\rangle \otimes \dots \quad (38)$$

mais supposons maintenant que les états  $\psi_j$ , et donc les coefficients  $c_j(n)$ , varient avec l'indice de site  $j$ . Si cette variation est assez douce, on peut passer à une limite continue : le paramètre d'ordre  $\psi_j$ , qui dépend lui aussi du site  $j$ , s'écrit alors comme une fonction complexe  $\psi(\mathbf{r})$  de la variable d'espace  $\mathbf{r}$ . L'énergie associée à  $\psi(\mathbf{r})$  s'écrit

$$E(\psi) = \int \mathcal{H}[\psi(\mathbf{r})] d^3r, \quad (39)$$

où la densité d'énergie est donnée par [cf. appendice et Polkovnikov, Altman, et al. (2005)]

$$\mathcal{H}(\psi) = \frac{U}{2} |\psi|^4 - A |\psi|^2 + B |\nabla \psi|^2. \quad (40)$$

À l'énergie sur site donnée en (36) est venu s'ajouter le terme  $B|\nabla\psi|^2$ , où le coefficient  $B$  est relié au coefficient tunnel  $J$ . Ce terme représente l'énergie à payer pour créer des fluctuations spatiales du paramètre d'ordre.

L'état fondamental de (39-40) est obtenu pour un paramètre d'ordre  $\psi$  uniforme dans l'espace ( $\nabla\psi = 0$ ).

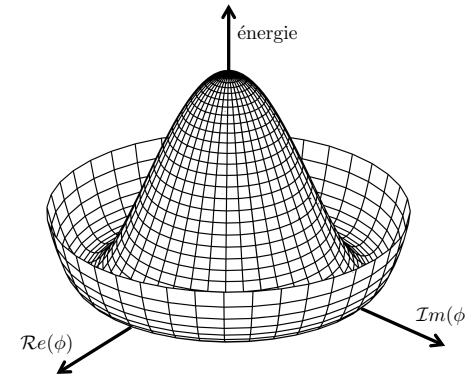


FIGURE 14. Énergie  $\epsilon(\rho)$  avec  $\rho = |\psi|$  pour un paramètre d'ordre  $\psi$  complexe, dans le cas  $A > 0$ .

- Si  $A < 0$ , alors le minimum correspond au paramètre d'ordre nul  $\psi = 0$ . Pour l'ansatz de Gutzwiller, ceci correspond à la phase isolante, avec  $c(\bar{n}) = 1, c(\bar{n} \pm 1) = 0$ .
- Si  $A > 0$ , le minimum est obtenu pour

$$|\psi|^2 = \frac{A}{U}. \quad (41)$$

Dans ce cas, la variation de  $\epsilon(\psi)$  avec les deux composantes réelles et imaginaires de  $\psi$  a la forme bien connue de *chapeau mexicain* représentée sur la figure 14 : il y a une infinité de  $\psi$  qui minimisent  $\epsilon$ , puisque seul le module de  $\psi$  est imposé. Sa phase peut être choisie de manière quelconque, ce choix correspondant à une brisure spontanée de la symétrie  $U(1)$ .

**Modélisation plus précise.** Pour arriver à la fonctionnelle d'énergie (39-40), nous avons notablement simplifié les étapes d'une démarche rigoureuse. Il faut en principe partir de la description de l'état sur site  $|\Psi_j\rangle$  en terme de 4 champs :

$$\begin{pmatrix} c_j(\bar{n} + 1) \\ c_j(\bar{n}) \\ c_j(\bar{n} - 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i(\eta_j + \varphi_j)} \sin \theta_j \sin \chi_j \\ \cos \theta_j \\ e^{i(\eta_j - \varphi_j)} \sin \theta_j \cos \chi_j \end{pmatrix}. \quad (42)$$



et écrire les équations d'évolution couplées de ces 4 champs  $\theta_j$ ,  $\varphi_j$ ,  $\eta_j$  et  $\chi_j$ . On peut alors montrer que l'on peut éliminer les variations des deux champs  $\eta_j$  (qui reste voisin de 0) et  $\chi_j$  (qui reste voisin de  $\pi/4$ ) pour se ramener à un problème où seuls  $\theta_j$  et  $\varphi_j$  jouent un rôle, via la fonctionnelle d'énergie déterminée précédemment. Nous reviendrons sur cette procédure en § 4 [voir également l'appendice de chapitre et Polkovnikov, Altman, et al. (2005)]

**Lien avec la condensation de Bose–Einstein.** La fonctionnelle d'énergie (39-40) est formellement équivalente à celle utilisée pour décrire la condensation de Bose–Einstein d'un gaz homogène. La fonction complexe  $\psi(\mathbf{r})$  représente alors l'amplitude de probabilité pour l'état fondamental  $\mathbf{p} = 0$ . Le terme en  $U|\psi|^4$  représente les interactions entre particules, telles que nous les avons modélisées au chapitre 3 avec  $U = G$ . Le dernier terme représente l'énergie cinétique habituelle avec  $B = \hbar^2/2m$ . Au voisinage de la température nulle,  $A$  est égal au potentiel chimique  $\mu = g\rho$ .

### 3-2 Dynamique dans le modèle de Landau–Ginzburg

Intéressons-nous maintenant à la dynamique du problème dans le cas  $A > 0$ , correspondant au modèle en chapeau mexicain. Intuitivement, si on se réfère à la mécanique classique et que l'on place une particule ponctuelle dans ce type de potentiel, on s'attend à trouver deux types de mouvement.

- Le premier correspond à la rotation de la bille au fond de la rigole, c'est-à-dire un mouvement où l'angle polaire varie linéairement en temps, la distance au centre restant constante. La fréquence associée à ce mouvement peut être arbitrairement basse.
- Le second correspond à une oscillation radiale de la particule, pour un angle polaire donné. Dans l'approximation harmonique, la fréquence de cette oscillation se fait avec une pulsation  $\omega$  reliée à la courbure du potentiel en  $\rho = \rho_{\min}$

$$\omega^2 \propto \left. \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial \rho^2} \right|_{\rho=\rho_{\min}} = 4A. \quad (43)$$

Que devient cette intuition quand on passe en mécanique quantique ?

La réponse n'est pas évidente car la question est en fait ambiguë. Il ne suffit pas de se donner la densité d'énergie  $\mathcal{H}(\psi)$  pour y répondre. Il faut également connaître le terme dynamique  $\mathcal{L}_{\text{dyn}}$  qui intervient dans l'action, pour former la densité de lagrangien

$$\mathcal{L}(\psi) = \mathcal{L}_{\text{dyn}}(\psi) - \mathcal{H}(\psi). \quad (44)$$

Pour progresser, limitons-nous à deux cas :

- (i) l'équation de Schrödinger, encore appelé *cas non relativiste*. La densité de Lagrangien (déjà rencontrée au chapitre 3) s'écrit

$$\mathcal{L}_{\text{dyn}}(\psi) = \frac{i\hbar}{2} (\psi^* \dot{\psi} - \psi \dot{\psi}^*). \quad (45)$$

- (ii) la théorie relativiste des champs, pour laquelle on prend

$$\mathcal{L}_{\text{dyn}}(\psi) = \frac{B}{c^2} \dot{\psi}^* \dot{\psi}, \quad (46)$$

où  $c$  à la dimension d'une vitesse. Sous cette forme, on peut regrouper les termes de dérivées spatiales de  $\mathcal{H}$  et de dérivée temporelle  $\mathcal{L}_{\text{dyn}}$  sous une forme covariante :

$$\frac{B}{c^2} \dot{\psi}^* \dot{\psi} - B|\nabla\psi|^2 \equiv -B|\partial_\mu\psi|^2. \quad (47)$$

Nous appellerons cette situation « cas relativiste », même si on peut la rencontrer dans un système d'atomes froids, bougeant donc très lentement. La vitesse  $c$  correspond alors (par exemple) à la vitesse d'ondes sonores.

Plaçons-nous au voisinage du minimum (41) de  $E(\psi)$ , en prenant par convention une phase nulle pour le paramètre d'ordre, soit  $\psi_{\min} = \psi_0 > 0$ . Notons

$$\psi = \psi_0 + \delta_a + i\delta_p \quad (48)$$

où  $\delta_{a,p}$  sont des quantités réelles dépendant du temps et de l'espace, et supposées petites devant  $\psi_0$ . La quantité  $\delta_a$  correspond à un changement d'amplitude de  $\psi$  et  $\delta_p$  à un changement de phase.

Le développement de  $\mathcal{H}(\psi)$  au voisinage de ce minimum donne

$$\mathcal{H}(\delta_a, \delta_p) = \epsilon_{\min} + 2A\delta_a^2 + B(\nabla\delta_a)^2 + B(\nabla\delta_p)^2. \quad (49)$$

Comme prévu, cette énergie ne contient pas de terme linéaire en  $\delta_{a,p}$  puisqu'on fait un développement au voisinage du minimum. Par ailleurs, cette énergie ne fait pas intervenir directement  $\delta_p$  mais seulement son gradient, puisqu'un changement uniforme de  $\delta_p$  correspond à une variation au fond de la rigole du chapeau mexicain, donc sans variation d'énergie. Notons enfin qu'à partir de maintenant, nous choisirons l'origine des énergies en  $\epsilon_{\min}$ , de sorte que la solution  $\psi_0$  est une solution stationnaire.

La partie dynamique de la densité de lagrangien s'écrit pour les deux cas identifiés ci-dessus :

$$\text{Cas (i) : } \mathcal{L}_{\text{dyn}}(\delta_a, \delta_p) = \hbar \left( \dot{\delta}_a \delta_p - \delta_a \dot{\delta}_p \right) \quad (50)$$

et

$$\text{Cas (ii) : } \mathcal{L}_{\text{dyn}}(\delta_a, \delta_p) = \frac{B}{c^2} \left( \dot{\delta}_a^2 + \dot{\delta}_p^2 \right). \quad (51)$$

Ecrivons maintenant les deux équations de Lagrange pour les deux variables  $\delta_{a,p}$  :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\delta}_j} \right) = \frac{\partial L}{\partial \delta_j} \quad j = a, p. \quad (52)$$

où  $L = \int \mathcal{L}$  et où les dérivées intervenant dans ces équations doivent être comprises comme des dérivées fonctionnelles (Feynman & Hibbs 1965; Schiff 1968). On trouve

$$\begin{aligned} \text{Cas (i) : } \quad \hbar \dot{\delta}_a &= B \nabla^2 \delta_p \\ \hbar \dot{\delta}_p &= -2A \delta_a + B \nabla^2 \delta_a \end{aligned} \quad (53)$$

et

$$\begin{aligned} \text{Cas (ii) : } \quad (B/c^2) \ddot{\delta}_p &= B \nabla^2 \delta_p \\ (B/c^2) \ddot{\delta}_a &= -2A \delta_a + B \nabla^2 \delta_a \end{aligned} \quad (54)$$

Les membres de droite de ces deux systèmes sont identiques, puisqu'ils proviennent de la même fonctionnelle d'énergie (40). En revanche, les membres de gauche sont différents et correspondent à deux structures de modes également différentes, comme nous allons le voir dans le paragraphe qui suit.

### 3-3 Mode de Goldstone, mode de Higgs

Pour étudier la structure de mode liée aux deux équations du mouvement (57) et (54), nous allons regarder les relations de dispersion auxquelles elles conduisent.

**Cas relativiste.** Commençons par le cas « relativiste » (54), qui est le plus simple. On dispose dans ce cas de deux équations découplées pour la phase et pour l'amplitude, conduisant donc à deux modes indépendants. Les relations de dispersion déduites de (54) sont :

$$\begin{aligned} \text{Cas (ii) : } \quad \omega^2 &= c^2 k^2 & (55) \\ \omega^2 &= \omega_0^2 + c^2 k^2 & \text{avec } \omega_0 = c\sqrt{2A/B}, & (56) \end{aligned}$$

que nous allons maintenant discuter.

Le premier mode (55), provenant de la variation de la phase  $\delta_p$ , est un mode de type phonon. Sa fréquence tend vers 0 quand on considère des vecteurs d'onde  $k$  de plus en plus faibles. Ce mode de fréquence nulle est le mode de Goldstone que l'on attend quand on traverse une transition de phase correspondant à la brisure spontanée d'une symétrie continue, en l'occurrence le choix de la phase du paramètre d'ordre  $\psi$  : il est logique que cela ne coûte quasiment pas d'énergie de construire des états du système où la phase n'a pas une valeur uniforme comme pour l'état fondamental, mais varie uniquement sur une échelle de longueur arbitrairement grande.

Le deuxième mode (56), provenant de la variation de l'amplitude  $\delta_a$ , est précisément le mode de Higgs. Sa fréquence ne tend pas vers 0 quand le vecteur d'onde  $k$  tend vers 0, mais vers la limite finie  $\omega_0$ . Cette limite d'une fréquence non nulle pour  $k \rightarrow 0$  correspond à l'image intuitive d'une particule classique oscillant radialement dans le potentiel en chapeau mexicain. Notons que la pulsation  $\omega_0$  varie comme  $\sqrt{A}$  et s'annule donc au point critique.

**Cas non relativiste.** Passons maintenant au cas « non relativiste » (57), correspondant par exemple à l'équation de Gross-Pitaevskii pour un gaz de bosons sans spin. Nous retrouvons donc exactement la situation déjà étudiée au chapitre 3 (§ 3.3). Cherchons une solution sous forme d'onde

plane en  $e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}$  pour  $\delta_a$  et  $\delta_p$ . Le système (57) couple les amplitudes  $\bar{\delta}_a$  et  $\bar{\delta}_p$  de ces ondes planes et elles doivent donc être solution du système  $2 \times 2$  :

$$\begin{aligned} \text{Cas (i) :} \quad & i\hbar\omega \bar{\delta}_a + Bk^2 \bar{\delta}_p = 0 \\ & (2A + Bk^2) \bar{\delta}_a - i\hbar\omega \bar{\delta}_p = 0 \end{aligned} \quad (57)$$

Ce système n'admet de solution non nulle que si son déterminant est nul, ce qui donne la relation de dispersion

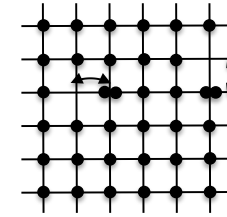
$$\text{Cas (i) :} \quad (\hbar\omega)^2 = Bk^2 (2A + Bk^2). \quad (58)$$

Ceci n'est autre que la relation de Bogoliubov, écrite pour  $A = g\rho$  et  $B = \hbar^2/2m$ . On a donc toujours un mode tel que  $\omega \rightarrow 0$  quand  $k \rightarrow 0$ , ce qui était attendu d'après le théorème de Goldstone. En revanche, il n'y a pas de mode de Higgs dans ce cas même si le potentiel en chapeau mexicain est bien là ! Ce potentiel n'est donc pas une garantie de l'existence du mode de Higgs.

## 4 Le mode de Higgs dans un réseau optique

Nous ne discuterons pas ici le rôle crucial du mode de Higgs, ni du mécanisme de Higgs qui l'accompagne, dans le domaine de la physique des particules et nous aborderons seulement le cas de la matière condensée. Une fois identifiés les deux ingrédients indispensables pour son observation, à savoir le potentiel en chapeau mexicain (40) d'une part, la dynamique de type relativiste (45) d'autre part, il est naturel de rechercher si l'on peut générer ce mode dans des systèmes *a priori* non relativistes, au prix d'une modification de l'hamiltonien et de ses variables dynamiques. Il est clair qu'il faut se tourner vers des problèmes plus riches que celui d'un gaz de bosons uniforme, puisqu'on est alors dans le cas non relativiste simple (57) qui ne conduit qu'à un seul mode, de type Goldstone.

Dans le cadre de la supraconductivité, cette question a été abordée par de nombreux auteurs et le mode de Higgs a finalement pu être identifié dans des expériences menées au début des années 80 [voir par exemple Sooryakumar & Klein (1980) and Sooryakumar & Klein (1981) avec la discussion théorique de Littlewood & Varma (1981), ainsi que Méasson, Gal-



**FIGURE 15.** Réseau optique pour un remplissage entier (ici  $\bar{n} = 1$ ) : la conduction se fait de manière symétrique par des trous (des sites vides) et des « particules » (des sites doublement occupés).

lais, et al. (2014) pour des expériences récentes]. Une revue détaillée est présentée par Podolsky, Auerbach, et al. (2011) et Pekker & Varma (2014).

Dans le cadre des atomes froids, la discussion théorique d'un mode d'amplitude a été initiée par Altman & Auerbach (2002) et Polkovnikov, Sachdev, et al. (2002), puis reprise de manière plus approfondie par Huber, Altman, et al. (2007). L'idée essentielle est de constater que le lagrangien relativiste correspond à une transition de phase dans un système possédant une symétrie « particule-trou » (figure 15). Cette symétrie se retrouve si on considère un réseau à remplissage entier, la transition de phase correspondant à la transition superfluide–isolant de Mott.

### 4-1 Le cas d'un mode uniforme

Nous allons nous intéresser dans ce paragraphe au cas particulier d'un mode uniforme, pour lequel tous les états  $|\Psi_j\rangle$  aux différents sites du réseau sont égaux. La raison de cette hypothèse simplificatrice est la suivante : le mode de Higgs a pour relation de dispersion  $\omega^2 = \omega_0^2 + c^2k^2$ , ce qui signifie que sa fréquence reste non nulle même si on considère des excitations de vecteurs d'onde  $k$  arbitrairement petits. On s'attend donc également à le trouver pour le cas  $k = 0$  qui correspond à une excitation homogène sur tout le système.

Cette hypothèse simplifie considérablement l'analyse, comme nous allons le voir maintenant. Elle va nous permettre de montrer avec des calculs

relativement légers comment on aboutit alors à la partie dynamique du lagrangien sous la forme relativiste  $\psi^* \dot{\psi}$ . Nous dirons ensuite quelques mots sur le cas général où  $|\Psi_j\rangle$  varie d'un site à l'autre, ce cas étant détaillé dans l'appendice en fin de chapitre.

Comme indiqué en (42), il faut en principe se donner les 4 champs  $\{\theta_j, \chi_j, \eta_j, \varphi_j\}$  pour caractériser l'état du gaz sur le réseau dans le cadre de l'ansatz de Gutzwiller :

$$|\Psi_j\rangle = \begin{pmatrix} e^{i(\eta_j + \varphi_j)} \sin \theta_j \sin \chi_j \\ \cos \theta_j \\ e^{i(\eta_j - \varphi_j)} \sin \theta_j \cos \chi_j \end{pmatrix} \quad (59)$$

Si le mode est uniforme, ces champs ne dépendent pas de  $j$  et constituent donc simplement 4 variables  $\{\theta, \eta, \varphi, \chi\}$ . Imposer au gaz d'être au taux de remplissage  $\bar{n}$  entier fixe la valeur de  $\chi = \pi/4$  et on se retrouve face à un problème à trois variables  $\{\theta, \eta, \varphi\}$  en fonction desquelles l'état du gaz en chaque site s'écrit

$$|\Psi_j\rangle = \begin{pmatrix} e^{i(\eta + \varphi)} \sin \theta / \sqrt{2} \\ \cos \theta \\ e^{i(\eta - \varphi)} \sin \theta / \sqrt{2} \end{pmatrix}. \quad (60)$$

L'énergie associée à cet état s'écrit, à l'ordre 2 inclus en  $\eta$  :

$$E(\rho, \eta) = 2nzJ \eta^2 \rho^2 + \epsilon(\rho) \quad \text{avec} \quad \epsilon(\rho) = \frac{U}{2} \rho^4 - A\rho^2 \quad (61)$$

et où

$$\rho = \frac{1}{2} \sin(2\theta) \quad (62)$$

est le module du paramètre d'ordre  $\psi$  introduit au paragraphe précédent.

Il nous reste à évaluer la partie dynamique du lagrangien. Partons pour cela de l'expression générale de  $\mathcal{L}_{\text{dyn}}(\psi) = \frac{i\hbar}{2} (\psi^* \dot{\psi} - \dot{\psi}^* \psi)$  pour l'équation de Schrödinger et appliquons-là à  $|\Psi_j\rangle$ . Un calcul sans difficulté donne

$$\mathcal{L}_{\text{dyn}} \equiv \frac{i\hbar}{2} \left( \langle \Psi_j | \dot{\Psi}_j \rangle - \langle \dot{\Psi}_j | \Psi_j \rangle \right) = -\hbar \dot{\eta} \rho^2 \quad (63)$$

de sorte que nous sommes ramenés à l'étude du système dynamique à deux variables  $\rho, \eta$  avec, en posant  $\hbar = 1$  pour simplifier les notations

$$\mathcal{L}(\rho, \eta) = -\dot{\eta} \rho^2 - 2nzJ \eta^2 \rho^2 - \epsilon(\rho). \quad (64)$$

**Remarque.** Notons que la variable  $\varphi$  a disparu du problème. Elle n'intervient pas dans l'énergie et elle ne figure pas non plus dans la partie dynamique du lagrangien dans l'hypothèse d'un état uniforme. En fait, cette variable devient pertinente quand on prend en compte les variations spatiales de  $\chi$ , c'est-à-dire une différence de population entre les états  $|n \pm 1\rangle_j$ . Cette différence de population se couple à la phase relative  $\varphi$  entre ces deux états pour donner naissance à un mode de Goldstone, dont la fréquence tend vers 0 quand son vecteur d'onde tend vers 0.

## 4-2 Le lagrangien « relativiste »

Nous souhaitons maintenant montrer comment on peut arriver pour la partie dynamique du lagrangien à la forme relativiste :

$$\mathcal{L}_{\text{dyn}}(\psi) = \frac{B}{c^2} \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad (65)$$

nécessaire pour l'observation du mode de Higgs.

Plaçons-nous pour commencer dans le cadre du mode uniforme envisagé au paragraphe précédent et montrons comment l'élimination de la variable  $\eta$  permet d'arriver à la forme souhaitée. Partant du lagrangien (64), nous remarquons d'abord que nous pouvons le remplacer par le lagrangien équivalent

$$\mathcal{L}'(\rho, \eta) = 2\eta \rho \dot{\rho} - 2nzJ \eta^2 \rho^2 - \epsilon(\rho) \quad (66)$$

en lui ajoutant la dérivée totale par rapport au temps  $\frac{d}{dt}(\eta \rho^2)$ . On fait alors apparaître un carré parfait qui regroupe toute la contribution de la variable  $\eta$  :

$$\mathcal{L}'(\rho, \eta) = -2nzJ \left( \eta \rho - \frac{\dot{\rho}}{2nzJ} \right)^2 + \frac{\dot{\rho}^2}{2nzJ} - \epsilon(\rho). \quad (67)$$

Sous cette forme, on constate que la dynamique de la variable  $\eta$  est figée. Son équation du mouvement se réduit à

$$\eta \rho - \frac{\dot{\rho}}{2nzJ} = 0 \quad (68)$$

ce qui annule le premier terme du lagrangien. Le premier terme (carré parfait) de (67) peut donc être ignoré et on arrive au lagrangien d'une particule

$$\left( \begin{array}{c} e^{i(\eta+\varphi)} \sin \theta \sin \chi \\ \cos \theta \\ e^{i(\eta-\varphi)} \sin \theta \cos \chi \end{array} \right) \left\{ \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} \rho = \frac{1}{2} \sin 2\theta \\ \eta \end{array} \right\} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} \right)^2 \\ \left. \begin{array}{l} \varphi \\ \chi \end{array} \right\} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial t} \\ \psi = \rho e^{i\varphi} \end{array} \right.$$

**FIGURE 16.** Procédure pour aboutir au lagrangien dynamique (65) par élimination des champs  $\eta(\mathbf{r})$  et  $\chi(\mathbf{r})$  au profit des champs  $\rho(\mathbf{r})$  et  $\varphi(\mathbf{r})$ , puis du paramètre d'ordre complexe  $\psi = \rho e^{i\varphi}$ .

massive en mouvement dans le potentiel en chapeau mexicain

$$\mathcal{L}''(\rho, \eta) = \frac{1}{2nzJ} \left( \frac{d\rho}{dt} \right)^2 - \epsilon(\rho), \quad (69)$$

qui correspond bien, pour le cas particulier  $\psi = \rho$  du mode uniforme, à la forme recherchée (65) avec

$$\frac{B}{c^2} = \frac{1}{2nzJ}. \quad (70)$$

La fréquence du mode de Higgs (56) se déduit de ce résultat

$$\omega_0 = \sqrt{8} \bar{n}zJ \left( 1 - \frac{U}{4\bar{n}zJ} \right)^{1/2}. \quad (71)$$

Elle s'annule au point de transition  $U = 4\bar{n}zJ$ .

Quand on passe à des modes non uniformes (cf. appendice), les quantités  $\rho(t)$  et  $\eta(t)$  deviennent des champs  $\rho(\mathbf{r}, t)$  et  $\eta(\mathbf{r}, t)$ . La démarche que nous venons de suivre continue à s'appliquer : le champ  $\eta$  (gaussien) peut s'éliminer par intégration et ceci fait apparaître le terme  $\left( \frac{\partial \rho}{\partial t} \right)^2$  correspondant au terme dynamique « relativiste » nécessaire pour faire apparaître le

mode de Higgs. En parallèle, le champ  $\chi(\mathbf{r}, t)$  s'élimine par intégration pour faire apparaître le terme  $\rho^2 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2$ . On remarque finalement que

$$\left( \frac{\partial \rho}{\partial t} \right)^2 + \rho^2 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 = \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad (72)$$

avec  $\psi = \rho e^{i\varphi}$ , ce qui constitue la partie dynamique relativiste (65) désirée pour le lagrangien. Cette procédure est résumée sur la figure . La prise en compte du couple de variables  $\varphi, \chi$  ne modifie pas le résultat (71) pour le mode de Higgs provenant du couple  $\rho, \eta$ . Elle fait simplement apparaître le mode de Goldstone (55), dont la fréquence  $\omega$  tend vers 0 quand  $k \rightarrow 0$  (et donc s'annule dans l'hypothèse du mode uniforme).

**Remarque 1.** Il est essentiel pour que le traitement qui précède soit valable que l'on se soit placé à un nombre de remplissage entier. C'est grâce à cette hypothèse, qui assure physiquement la symétrie particule-trou, que nous avons pu éliminer les champs  $\sigma$  et  $\eta$  pour aboutir à un lagrangien en  $\dot{\rho}^2$  et en  $\dot{\varphi}^2$ . Si on ne place pas au remplissage entier (ou en son voisinage), des termes d'ordre 1 en  $\dot{\rho}$  et en  $\dot{\varphi}$  subsistent ; ils dominent les termes en  $\dot{\rho}^2$  et en  $\dot{\varphi}^2$  et on perd la séparation entre mode de Higgs et mode de Goldstone, à l'instar de ce qui se produit pour les modes de Bogoliubov.

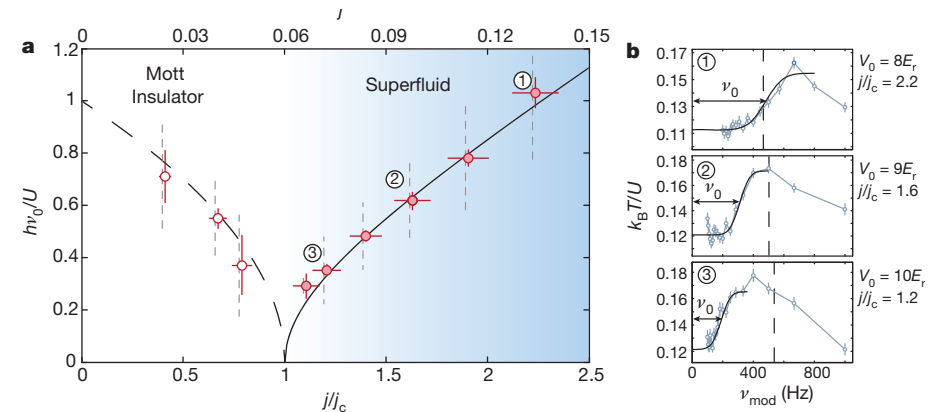
**Remarque 2.** *Stricto sensu* l'existence du mode de Higgs n'est pas la garantie de son observabilité. En effet, les termes que nous avons négligés dans notre approche parce qu'ils étaient d'un ordre supérieur peuvent rendre ce mode instable, en favorisant sa décroissance en deux (ou plus) modes de Goldstone (Podolsky, Auerbach, et al. 2011). Il faut en pratique évaluer la largeur de ce mode liée aux processus de décroissance et la comparer à la valeur de  $\omega_H$  elle-même, ce qui revient à définir un « facteur de qualité ». Pour le cas des réseaux optiques, on prédit que ce mode possède un bon facteur de qualité, sauf au voisinage immédiat du point de transition, auquel cas  $\omega_H \rightarrow 0$  (Podolsky, Auerbach, et al. 2011).

### 4-3 Observation du mode de Higgs

L'observation expérimentale du mode de Higgs dans un réseau optique a été décrite dans deux publications récentes, Bissbort, Götze, et al. (2011) et Endres, Fukuhara, et al. (2012). La première publication est basée sur la méthode de spectroscopie de Bragg, déjà décrite au chapitre 2 : on mesure l'énergie transférée au gaz en fonction de la différence de fréquence entre les deux faisceaux d'excitation, pour un transfert donné d'impulsion  $\hbar k$ . La comparaison entre la courbe mesurée et des simulations numériques permet d'identifier le pic provenant du mode d'amplitude. Notons qu'avec cette méthode, on ne sonde pas le mode de Higgs à vecteur d'onde nul et on ne révèle donc pas complètement sa relation de dispersion en  $\omega_k^2 = \omega_0^2 + c^2 k^2$ , en particulier le fait que  $\omega_k$  tend vers une limite finie non nulle quand  $k \rightarrow 0$ .

La deuxième publication (Endres, Fukuhara, et al. 2012) utilise la technique développée initialement par le groupe de Zurich (Stöferle, Moritz, et al. 2004; Schori, Stöferle, et al. 2004) pour sonder des modes de très bas vecteur d'onde dans un réseau optique 2D au voisinage de  $\bar{n} = 1$ . On module l'intensité des faisceaux créant le réseau, ce qui a pour effet principal de moduler le terme d'effet tunnel de manière uniforme sur le réseau. On mesure là encore l'échauffement du gaz après une durée de modulation donnée, en fonction de la fréquence de modulation. L'expérience de Endres, Fukuhara, et al. (2012) tire parti d'une détection très précise de la température grâce à un microscope atomique, ce qui permet de réduire fortement l'échauffement minimal détectable. Cela permet en particulier de rester dans un domaine de température compatible avec l'existence de la phase isolante (Gerber 2007). La fréquence du mode de Higgs est déterminée comme le seuil au dessus duquel on observe cet échauffement (figure 17, droite). Le résultat principal de Endres, Fukuhara, et al. (2012) est représenté sur la gauche de la figure 17, montrant la variation de la fréquence du mode ainsi déterminé en fonction du paramètre  $J/U$  contrôlant la transition superfluide–isolant. L'accord théorie expérience est très bon, aussi bien du côté superfluide pour le mode de Higgs que du côté isolant pour le mode d'excitation particule-trou (présentant un gap).

Notons pour terminer que ces deux expériences sur le mode de Higgs ont été faites avec des gaz confinés dans un potentiel harmonique, donc non homogènes. Il serait intéressant de les reprendre avec des systèmes



**FIGURE 17.** Gauche : Variation de la fréquence du mode de Higgs au voisinage du point de transition superfluide – isolant de Mott. Droite : signal d'absorption utilisé pour définir la valeur expérimentale du mode de Higgs. Figure extraite de Endres, Fukuhara, et al. (2012).

homogènes, et étudier si cela permet d'observer le mode de Higgs comme un pic bien défini dans le spectre d'excitation, et non pas comme un seuil pour une probabilité d'excitation variant ensuite de manière douce.

## 5 Appendice : identification des modes

Le but de cet appendice est de décrire la démarche (relativement longue et complexe !) permettant de faire apparaître les modes de Goldstone et de Higgs dans un réseau optique dans le cadre de l'approximation de Gutzwiller. Comme dans le texte principal du chapitre, nous nous limitons au cas du remplissage entier ( $n$  atomes par site en moyenne). Notre traitement suivra de près celui présenté dans l'article de Polkovnikov, Altman, et al. (2005).

**Passage à la limite continue.** Nous nous plaçons dans le cas général où les excitations du gaz d'atomes sur réseau dépendent du site. Les para-



mètres servant à caractériser l'état sur le site  $j$  sont les deux amplitudes  $\theta_j, \chi_j$  et les deux phases  $\eta_j, \varphi_j$  :

$$|\Psi_j\rangle = \begin{pmatrix} e^{i(\eta_j + \varphi_j)} \sin \theta_j \sin \chi_j \\ \cos \theta_j \\ e^{i(\eta_j - \varphi_j)} \sin \theta_j \cos \chi_j \end{pmatrix}. \quad (73)$$

On suppose que ces quatre paramètres varient lentement d'un site à l'autre, de sorte que l'on peut faire une approximation continue (à 1D pour simplifier les notations<sup>3</sup>, soit  $z = 2$  proches voisins par site)

$$\sum_j \rightarrow \frac{1}{a} \int dx \quad (74)$$

$$f_j \rightarrow f(x) \quad (75)$$

$$f_{j+1} - f_j \rightarrow a \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \dots \quad (76)$$

où  $a$  représente le pas du réseau.

On se concentre comme dans ce qui précède sur le cas d'un remplissage entier ( $\chi = \pi/4$ ) et l'on pose  $\sigma = -2\chi + \frac{\pi}{2}$  avec  $\sigma \ll 1$ . On peut alors mettre la densité de lagrangien sous la forme ( $\hbar = 1$ ) :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{dyn}} - \mathcal{H} \quad \text{avec} \quad \mathcal{L}_{\text{dyn}} = -\dot{\eta}\rho^2 + \dot{\varphi}\rho^2\sigma \quad (77)$$

et pour  $\bar{n} \gg 1$

$$\mathcal{H} \approx \epsilon(\rho) + nJ\rho^2(4\eta^2 + \sigma^2) + 2nJa^2 \left[ \left( \frac{\partial \rho}{\partial x} \right)^2 + \rho^2 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (78)$$

où l'on a posé comme précédemment

$$\epsilon(\rho) = -A\rho^2 + \frac{U}{2}\rho^4 \quad \text{avec} \quad A = 4nJ - \frac{U}{2}. \quad (79)$$

Rappelons que nous sommes ici à une dimension, soit  $z = 2$  proches voisins par site, de sorte que cette définition de  $\epsilon(\rho)$  coïncide bien avec celle utilisée plus haut pour le potentiel en chapeau mexicain.

3. *Stricto sensu* la nature de la transition est modifiée à une dimension : elle devient une transition de type Kosterlitz-Thouless. Nous utilisons ici cette version 1D simplement pour avoir des expressions plus simples.

**Élimination des champs  $\eta$  et  $\sigma$ .** En ajoutant la dérivée totale par rapport au temps  $\frac{d}{dt}(\eta\rho^2)$ , on transforme la partie dynamique du lagrangien en

$$\mathcal{L}_{\text{dyn}} = 2\dot{\rho}\rho\eta + \dot{\varphi}\rho^2\sigma. \quad (80)$$

Sous cette forme, on voit que le lagrangien du problème dépend des champs  $\eta$  et  $\sigma$ , mais pas de leur dérivée. De plus cette variation est quadratique, ce qui correspond à un champ gaussien. Dans le cadre du formalisme de l'intégrale de chemin, la contribution de tous les chemins possibles associés à ces champs se fait alors simplement : ces champs s'éliminent après intégration, ce qui permet d'arriver à une dynamique ne portant que sur les champs  $\rho$  et  $\varphi$ .

Plus précisément, on reconnaît dans la densité de lagrangien le début de deux carrés parfaits pour les champs  $\eta$  et  $\sigma$  que l'on souhaite éliminer

$$-4nJ\rho^2\eta^2 + 2\dot{\rho}\rho\eta = -4nJ \left( \rho\eta - \frac{\dot{\rho}}{4nJ} \right)^2 + \frac{\dot{\rho}^2}{4nJ} \quad (81)$$

et

$$-nJ\rho^2\sigma^2 + \dot{\varphi}\rho^2\sigma = -nJ\rho^2 \left( \sigma - \frac{\dot{\varphi}}{2nJ} \right)^2 + \frac{\rho^2\dot{\varphi}^2}{4nJ}. \quad (82)$$

Après intégration sur  $\eta$  et  $\sigma$ , on arrive à la densité de lagrangien

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\rho, \varphi) &= \frac{\dot{\rho}^2}{4nJ} - \epsilon(\rho) - 2nJa^2 \left( \frac{\partial \rho}{\partial x} \right)^2 \\ &+ \rho^2 \left[ \frac{\dot{\varphi}^2}{4nJ} - 2nJa^2 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (83)$$

C'est bien le lagrangien « relativiste » recherché avec une dépendance quadratique pour les dérivées temporelles des deux champs  $\rho$  et  $\varphi$ .

**Relations de dispersion pour les champs  $\rho$  et  $\varphi$ .** La fin de l'analyse est calquée sur ce que nous avons vu plus haut sur les modes d'amplitude et de phase. Le mouvement du champ  $\rho$  au voisinage du minimum de  $\epsilon(\rho)$  est donné par :

$$\frac{1}{2nJ} \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = -\frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} + 4nJa^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}. \quad (84)$$

Les mouvements de petite amplitude correspondent à la relation de dispersion

$$\omega^2 = \omega_H^2 + c^2 k^2 \quad (85)$$

avec la fréquence du mode de Higgs

$$\omega_H^2 = 2nJ \left( \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial \rho^2} \right). \quad (86)$$

La courbure de  $\epsilon$  est évaluée au fond du chapeau mexicain, soit

$$\left( \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial \rho^2} \right) = 4A \quad \text{soit} \quad \omega_H = \sqrt{8} \, 2nJ \left( 1 - \frac{U}{8nJ} \right)^{1/2}, \quad (87)$$

ce qui coïncide avec (71) pour  $z = 2$  proches voisins. La vitesse du son  $c$  est quant à elle donnée par

$$c = \sqrt{8} \, nJa. \quad (88)$$

L'équation du mouvement pour le champ  $\varphi$  est donnée par

$$\frac{1}{2nJ} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 4nJa^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}. \quad (89)$$

ce qui conduit à la relation de dispersion  $\omega = ck$ , avec la même vitesse du son que (88). On retrouve là le mode de Goldstone associé à la brisure spontanée de la symétrie liée à la phase  $\varphi$ .

## Références

Altman, E., E. Demler & M. D. Lukin (2004), « Probing many-body states of ultracold atoms via noise correlations », in *Phys. Rev. A* 70, p. 013603.  
 Altman, Ehud & Assa Auerbach (2002), « Oscillating Superfluidity of Bosons in Optical Lattices », in *Phys. Rev. Lett.* 89.25, p. 250404.  
 Bakr, W. S., A. Peng, S. Fölling & M. Greiner (2009), « A quantum gas microscope for detecting single atoms in a Hubbard-regime optical lattice », in *Nature* 462, pp. 74–77.  
 Batrouni, Ghassan George, Richard T. Scalettar & Gergely T. Zimanyi (1990), « Quantum critical phenomena in one-dimensional Bose systems », in *Phys. Rev. Lett.* 65 (14), pp. 1765–1768.

Bissbort, Ulf, Sören Götze, Yongqiang Li, Jannes Heinze, Jasper S. Krauser, Malte Weinberg, Christoph Becker, Klaus Sengstock & Walter Hofstetter (2011), « Detecting the Amplitude Mode of Strongly Interacting Lattice Bosons by Bragg Scattering », in *Phys. Rev. Lett.* 106 (20), p. 205303.  
 Boéris, G., L. Gori, M. D. Hoogerland, A. Kumar, E. Lucioni, et al. (2016), « Mott transition for strongly interacting one-dimensional bosons in a shallow periodic potential », in *Phys. Rev. A* 93 (1), p. 011601.  
 Campbell, G.K., J. Mun, M. Boyd, P. Medley, A. E. Leanhardt, L. G. Marcassa, D. E. Pritchard & W. Ketterle (2006), « Imaging the Mott Insulator Shells by Using Atomic Clock Shifts », in *Science* 313, p. 5787.  
 Capogrosso-Sansone, B., N. V. Prokof'ev & B. V. Svistunov (2007), « Phase diagram and thermodynamics of the three-dimensional Bose-Hubbard model », in *Physical Review B (Condensed Matter and Materials Physics)* 75.13, 134302, p. 134302.  
 Endres, Manuel, Takeshi Fukuhara, David Pekker, Marc Cheneau, Peter Schauβ, Christian Gross, Eugene Demler, Stefan Kuhr & Immanuel Bloch (2012), « The 'Higgs' amplitude mode at the two-dimensional superfluid/Mott insulator transition », in *Nature* 487.7408, pp. 454–458.  
 Feynman, R.P. & A.R. Hibbs (1965), *Quantum Mechanics and Path Integrals*, McGraw Hill.  
 Fölling, S., F. Gerbier, A. Widera, O. Mandel, T. Gericke & I. Bloch (2005), « Spatial quantum noise interferometry in expanding ultracold atom clouds », in *Nature* 434, pp. 481–484.  
 Fölling, S., A. Widera, T. Müller, F. Gerbier & I. Bloch (2006), « Formation of spatial shell structures in the superfluid to Mott insulator transition », in *Phys. Rev. Lett.* 97, p. 060403.  
 Gerbier, F., S. Trotzky, S. Fölling, U. Schnorrberger, J. D. Thompson, et al. (2008), « Expansion of a Quantum Gas Released from an Optical Lattice », in *Phys. Rev. Lett.* 101 (15), p. 155303.  
 Gerbier, F., A. Widera, S. Fölling, O. Mandel, T. Gericke & I. Bloch (2005a), « Interference pattern and visibility of a Mott insulator », in *Phys. Rev. A* 72, p. 053606.  
 – (2005b), « Phase coherence of an atomic Mott insulator », in *Phys. Rev. Lett.* 95, p. 050404.  
 Gerbier, Fabrice (2007), « Boson Mott Insulators at Finite Temperatures », in *Phys. Rev. Lett.* 99 (12), p. 120405.

- Greiner, M., O. Mandel, T. Esslinger, T. W. Hänsch & I. Bloch (2002), « Quantum phase transition from a superfluid to a Mott insulator in a gas of ultracold atoms », in *Nature* 415, p. 29.
- Guarrera, V., N. Fabbri, L. Fallani, C. Fort, K. M. R. van der Stam & M. Inguscio (2008), « Noise Correlation Spectroscopy of the Broken Order of a Mott Insulating Phase », in *Phys. Rev. Lett.* 100 (25), p. 250403.
- Haller, Elmar, Russell Hart, Manfred J. Mark, Johann G. Danzl, Lukas Reichsöllner, Mattias Gustavsson, Marcello Dalmonte, Guido Pupillo & Hanns-Christoph Nagerl (2010), « Pinning quantum phase transition for a Luttinger liquid of strongly interacting bosons », in *Nature* 466.7306, pp. 597–600.
- Ho, T.-L. & Qi Zhou (2009), « Obtaining the phase diagram and thermodynamic quantities of bulk systems from the densities of trapped gases », in *Nature Physics* 6, p. 131.
- Huber, S. D., E. Altman, H. P. Buchler & G. Blatter (2007), « Dynamical properties of ultracold bosons in an optical lattice », in *Phys. Rev. B* 75.8, 085106, p. 085106.
- Hung, Chen-Lung, Xibo Zhang, Nathan Gemelke & Cheng Chin (2010), « Slow Mass Transport and Statistical Evolution of an Atomic Gas across the Superfluid–Mott-Insulator Transition », in *Phys. Rev. Lett.* 104 (16), p. 160403.
- Jiménez-García, K., R. L. Compton, Y.-J. Lin, W. D. Phillips, J. V. Porto & I. B. Spielman (2010), « Phases of a Two-Dimensional Bose Gas in an Optical Lattice », in *Phys. Rev. Lett.* 105 (11), p. 110401.
- Köhl, M., H. Moritz, T. Stöferle, C. Schori & T. Esslinger (2005), « Superfluid to Mott insulator transition in one, two, and three dimensions », in *Journal of Low Temperature Physics* 138, p. 635.
- Kühner, T. D., S. R. White & H. Monien (2000), « One-dimensional Bose-Hubbard model with nearest neighbor interaction », in *Phys. Rev. B* 61, p. 12474.
- Littlewood, P. B. & C. M. Varma (1981), « Gauge-Invariant Theory of the Dynamical Interaction of Charge Density Waves and Superconductivity », in *Phys. Rev. Lett.* 47 (11), pp. 811–814.
- Méasson, M.-A., Y. Gallais, M. Cazayous, B. Clair, P. Rodière, L. Cario & A. Sacuto (2014), « Amplitude Higgs mode in the  $2H - \text{NbSe}_2$  superconductor », in *Phys. Rev. B* 89 (6), p. 060503.
- Mun, J., P. Medley, G. K. Campbell, L. G. Marcassa, D. E. Pritchard & W. Ketterle (2007), « Phase diagram for a Bose–Einstein condensate moving in an optical lattice », in *arXiv :0706.3946*.
- Pekker, David & CM Varma (2014), « Amplitude/Higgs modes in condensed matter physics », in *arXiv :1406.2968*.
- Podolsky, Daniel, Assa Auerbach & Daniel P. Arovas (2011), « Visibility of the amplitude (Higgs) mode in condensed matter », in *Phys. Rev. B* 84 (17), p. 174522.
- Polkovnikov, A., E. Altman, E. Demler, B. Halperin & M. D. Lukin (2005), « Decay of superfluid currents in a moving system of strongly interacting bosons », in *Phys. Rev. A* 71, p. 063613.
- Polkovnikov, A., S. Sachdev & S. M. Girvin (2002), « Nonequilibrium Gross-Pitaevskii dynamics of boson lattice models », in *Phys. Rev. A* 66, p. 053607.
- Schiff, Leonard I (1968), « Quantum Mechanics 3rd, Chap. 14 », in *New York : McGraw-Hill*.
- Schori, C., T. Stöferle, H. Moritz, H. Köhl & T. Esslinger (2004), « Excitations of a Superfluid in a Three-Dimensional Optical Lattice », in *Phys. Rev. Lett.* 93, p. 240402.
- Sengupta, K. & N. Dupuis (2005), « Mott-insulator-to-superfluid transition in the Bose-Hubbard model : A strong-coupling approach », in *Phys. Rev. A* 71 (3), p. 033629.
- Sherson, Jacob F., Christof Weitenberg, Manuel Endres, Marc Cheneau, Immanuel Bloch & Stefan Kuhr (2010), « Single-atom-resolved fluorescence imaging of an atomic Mott insulator », in *Nature* 467.7311, 68.
- Sooryakumar, R. & M. V. Klein (1980), « Raman Scattering by Superconducting-Gap Excitations and Their Coupling to Charge-Density Waves », in *Phys. Rev. Lett.* 45 (8), pp. 660–662.
- (1981), « Raman scattering from superconducting gap excitations in the presence of a magnetic field », in *Phys. Rev. B* 23 (7), pp. 3213–3221.
- Spielman, I. B., W. D. Phillips & J. V. Porto (2007), « The Mott insulator transition in two dimensions », in *Phys. Rev. Lett.* 98, p. 080404, eprint: cond-mat/0606216.
- (2008), « Condensate Fraction in a 2D Bose Gas Measured across the Mott-Insulator Transition », in *Phys. Rev. Lett.* 100 (12), p. 120402.
- Stöferle, T., H. Moritz, C. Schori, M. Köhl & T. Esslinger (2004), « Transition from a Strongly Interacting 1D Superfluid to a Mott Insulator », in *Phys. Rev. Lett.* 92, p. 130403.

- Trotzky, S., L. Pollet, F. Gerbier, U. Schnorrberger, I. Bloch, N. V. Prokof'ev, B. Svistunov & M. Troyer (2010), « Suppression of the critical temperature for superfluidity near the Mott transition », in *Nature Physics* 6.12, 998–1004.
- Wessel, S., F. Alet, M. Troyer & G. George Batrouni (2004), « Quantum Monte Carlo simulations of confined bosonic atoms in optical lattices », in *Phys. Rev. A* 70, p. 053615.
- Zwinger, W. (2003), « Mott-Hubbard transition of cold atoms in optical lattices », in *J. Opt. B* 5, S9.