

Le magnétisme artificiel pour les gaz d'atomes froids

Jean Dalibard

Chaire *Atomes et rayonnement*

Année 2013-14



COLLÈGE
DE FRANCE
—1530—

Thème général du cours : le magnétisme

Les phénomènes magnétiques jouent un rôle essentiel en physique quantique

Invariance de jauge

Effet Hall quantique

Effet Aharonov-Bohm, SQUIDS

Couplage spin-orbite, spintronique

Isolants et supraconducteurs topologiques, particules de Majorana

A la base de ces phénomènes magnétiques, la force de Lorentz $\mathbf{F} = q \mathbf{v} \times \mathbf{B} \dots$

Cette matière quantique magnétique est-elle accessible aux gaz d'atomes froids ?

Nos gaz d'atomes froids sont composés de particules de charge nulle

$$\mathbf{F} = q \mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0$$

perdu d'avance ?

pas forcément...

On peut émuler ce magnétisme par une ingénierie appropriée des forces qui agissent sur les atomes ou des phases quantiques qui apparaissent le long de leurs trajectoires.

Plan du cours de l'année 2014

Cours 1 et 2 : les principaux ingrédients du magnétisme

invariance de jauge, effet Aharonov-Bohm, niveaux de Landau, états de bord

Cours 3 et 4 : une première piste, l'utilisation de phases géométriques

approximation adiabatique, phase de Berry, champs de jauge artificiels

Cours 5: d'autres pistes, rotation, hamiltoniens dépendant du temps

Cours 6 et 7 : le rôle des interactions, des réseaux de vortex aux états fortement corrélés

Le magnétisme artificiel pour les gaz d'atomes froids

Cours 1.

Le magnétisme d'une particule ponctuelle

Jean Dalibard

Chaire *Atomes et rayonnement*

Année 2013-14



COLLÈGE
DE FRANCE
—1530—

Le magnétisme d'une particule ponctuelle

1. Quelques éléments de magnétostatique

Potentiel vecteur et invariance de jauge

2. Particule classique dans un champ magnétique

De la force de Lorentz à l'hamiltonien

3. Particule quantique dans un champ magnétique

Invariance de jauge quantique

4. L'effet Aharonov-Bohm

Phase quantique « géométrique »

5. Monopole magnétique et physique quantique

Argument de Dirac sur la quantification de la charge

Le magnétisme d'une particule ponctuelle

1. Quelques éléments de magnétostatique

Potentiel vecteur et invariance de jauge

2. Particule classique dans un champ magnétique

De la force de Lorentz à l'hamiltonien

3. Particule quantique dans un champ magnétique

Invariance de jauge quantique

4. L'effet Aharonov-Bohm

Phase quantique « géométrique »

5. Monopole magnétique et physique quantique

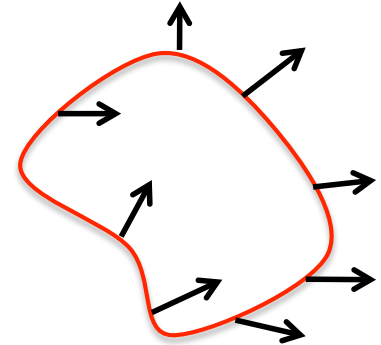
Argument de Dirac sur la quantification de la charge

Les équations de la magnétostatique

Absence de monopole magnétique

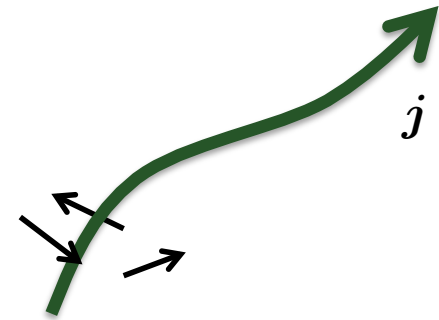
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

Le flux de \mathbf{B} à travers une surface fermée est toujours nul



Création d'un champ magnétique à partir de courants

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$$



Rappel: pour un champ électrostatique

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_{\text{elec.}}(\mathbf{r})}{\epsilon_0}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

Potentiel vecteur et changement de jauge

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \longrightarrow \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})$$

Le potentiel vecteur $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ n'est pas défini de manière unique

Si deux potentiels vecteurs sont tels que

$$\mathbf{A}'(\mathbf{r}) = \mathbf{A}(\mathbf{r}) + \nabla \chi(\mathbf{r})$$

où $\chi(\mathbf{r})$ est une fonction scalaire suffisamment régulière, alors ils correspondent au même champ magnétique

Exemple pour un champ magnétique uniforme dans l'espace $\mathbf{B} = B \mathbf{u}_z$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} -By \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

jauge de Landau (1)

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} -By/2 \\ +Bx/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

jauge symétrique

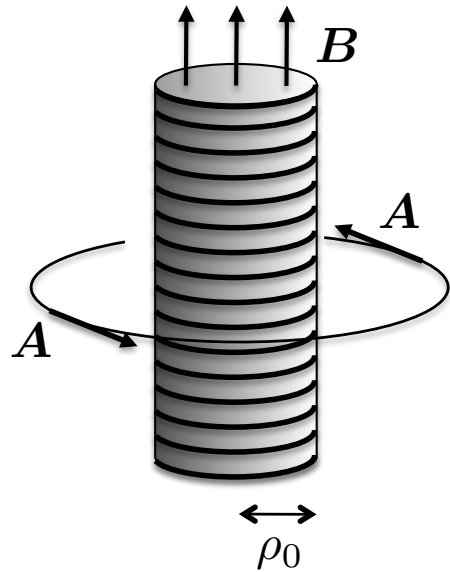
$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} 0 \\ Bx \\ 0 \end{pmatrix}$$

jauge de Landau (2)

$$\overleftarrow{\chi(\mathbf{r}) = -Bxy/2}$$

$$\overrightarrow{\chi(\mathbf{r}) = Bxy/2}$$

Exemple d'un solénoïde infini

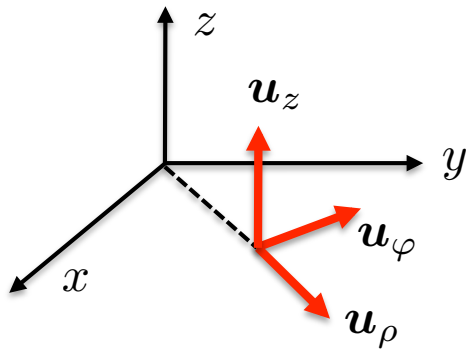


Solution dans l'hypothèse d'un champ nul à l'infini dans le plan xy :

$$\mathbf{B} = B_0 \mathbf{u}_z \quad \text{à l'intérieur du solénoïde}$$

$$\mathbf{B} = 0 \quad \text{à l'extérieur}$$

Un choix de jauge possible: $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ azimutal



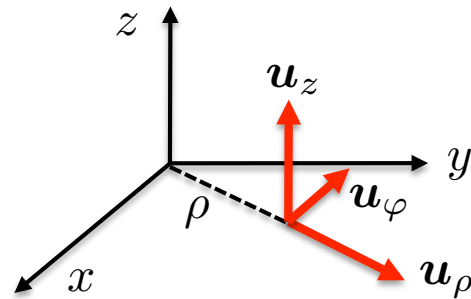
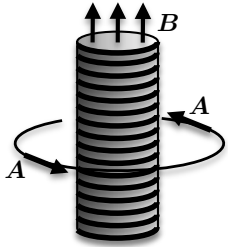
$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = A(\rho) \mathbf{u}_\varphi \quad \left\{ \begin{array}{l} A(\rho) = B_0 \frac{\rho}{2} \quad \text{si } \rho < \rho_0 \\ A(\rho) = B_0 \frac{\rho_0^2}{2\rho} \quad \text{si } \rho > \rho_0 \end{array} \right.$$

Limite d'un solénoïde de rayon nul, en gardant constant le flux $\Phi = \pi \rho_0^2 B_0$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\Phi}{2\pi\rho} \mathbf{u}_\varphi \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \Phi \delta(x)\delta(y) \mathbf{u}_z.$$

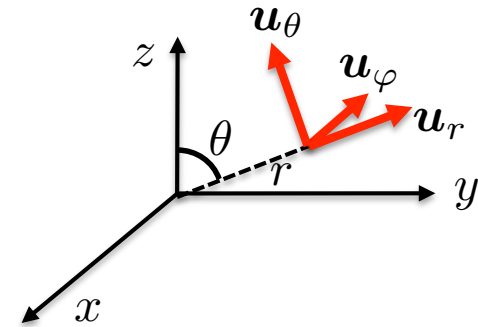
ligne de flux

Solénoïde (semi-) infini et monopole magnétique



coordonnées cylindriques

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\Phi}{2\pi\rho} \mathbf{u}_\varphi$$



coordonnées sphériques

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\Phi}{2\pi} \frac{1}{r \sin \theta} \mathbf{u}_\varphi$$

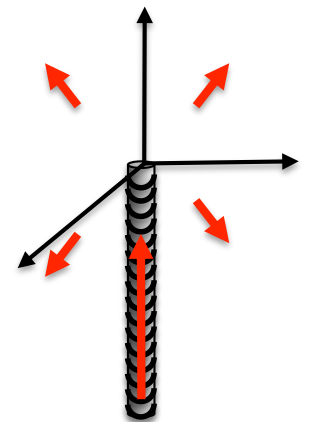
Que penser de $\mathbf{A}_m^{(1)}(\mathbf{r}) = \frac{q_m}{4\pi} \frac{1 - \cos \theta}{r \sin \theta} \mathbf{u}_\varphi$?

En dehors du demi-axe $z < 0$, on trouve $\mathbf{B}_m = \nabla \times \mathbf{A}_m^{(1)} = \frac{q_m}{4\pi r^2} \mathbf{u}_r$

monopole magnétique ???

Singularité sur le demi-axe $z < 0$ qui ajoute $q_m \Theta(-z) \delta(x) \delta(y) \mathbf{u}_z$

champ créé par un solénoïde semi-infini d'axe z



Monopole magnétique (suite)

Une manière de « simuler » un monopole magnétique dans une région de l'espace (en dehors du demi-axe $z < 0$) consiste à prendre

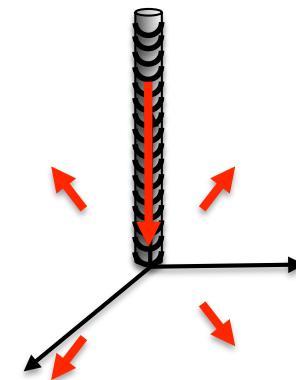
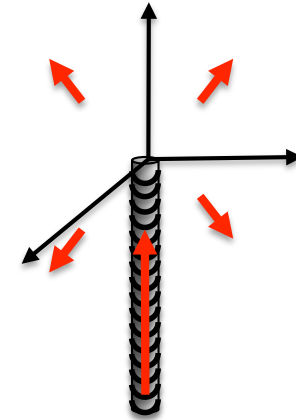
$$\mathbf{A}_m^{(1)}(\mathbf{r}) = \frac{q_m}{4\pi} \frac{1 - \cos \theta}{r \sin \theta} \mathbf{u}_\varphi$$

$$\mathbf{B}^{(1)}(\mathbf{r}) = \frac{q_m}{4\pi r^2} \mathbf{u}_r + q_m \Theta(-z) \delta(x) \delta(y) \mathbf{u}_z$$

On peut également considérer

$$\mathbf{A}_m^{(2)}(\mathbf{r}) = -\frac{q_m}{4\pi} \frac{1 + \cos \theta}{r \sin \theta} \mathbf{u}_\varphi$$

$$\mathbf{B}^{(2)}(\mathbf{r}) = \frac{q_m}{4\pi r^2} \mathbf{u}_r - q_m \Theta(z) \delta(x) \delta(y) \mathbf{u}_z$$



Les deux potentiels vecteurs ne sont pas reliés par une transformation de jauge valable sur l'espace entier (mais ça peut être le cas localement...)

Le magnétisme d'une particule ponctuelle

1. Quelques éléments de magnétostatique

Potentiel vecteur et invariance de jauge

2. Particule classique dans un champ magnétique

De la force de Lorentz à l'hamiltonien

3. Particule quantique dans un champ magnétique

Invariance de jauge quantique

4. L'effet Aharonov-Bohm

Phase quantique « géométrique »

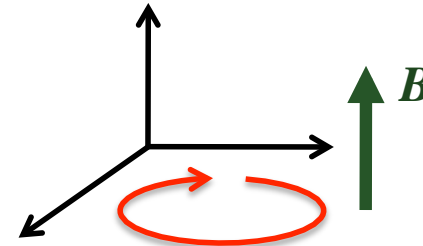
5. Monopole magnétique et physique quantique

Argument de Dirac sur la quantification de la charge

Particule classique dans un champ magnétique

Force de Lorentz $\mathbf{F}_L = q \mathbf{v} \times \mathbf{B}$

$$\longrightarrow M \ddot{\mathbf{r}} = q \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}$$



Pour un champ \mathbf{B} uniforme, mouvement cyclotron de pulsation $\omega_c = qB/M$ dans le plan xy et mouvement rectiligne uniforme le long de l'axe z

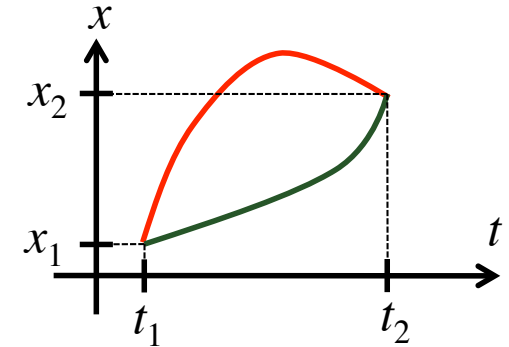
Pour préparer le passage à la mécanique quantique, nous allons présenter cette dynamique dans le cadre des formalismes lagrangien et hamiltonien

Le formalisme lagrangien pour une particule ponctuelle

On se donne une fonction de Lagrange $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$

Pour toute trajectoire continue dans l'espace $(\mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t))$, on calcule l'action

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L[\mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t), t] dt$$



La (ou les) trajectoire effectivement suivie par la particule rend l'action extrémale

Equations de Euler-Lagrange :

$$\frac{\partial L}{\partial r_i} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} \right), \quad r_i = x, y, z$$

Equivalence de deux fonctions de Lagrange:

$L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$ et $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) + \frac{d}{dt} \Omega(\mathbf{r}, t)$ conduisent aux mêmes équations de Euler-Lagrange

On peut ajouter au lagrangien une dérivée totale par rapport au temps

Lagrangien pour une particule dans un champ magnétique

Rappel: si le champ est nul, $L_{\text{libre}}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = \frac{1}{2}M\dot{\mathbf{r}}^2$ est le choix le plus simple (mvt. uniforme)

Si le champ magnétique est non nul, le choix

$$L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = \frac{1}{2}M\dot{\mathbf{r}}^2 + q \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r})$$

conduit à la « bonne » équation du mouvement (force de Lorentz)

Ce choix dépend du potentiel vecteur : semble briser l'invariance de jauge !

Heureusement, dans un changement de jauge

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) \longrightarrow \mathbf{A}'(\mathbf{r}) = \mathbf{A}(\mathbf{r}) + \nabla\chi(\mathbf{r})$$

le changement de lagrangien $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) \longrightarrow L_{\chi}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) + q \dot{\mathbf{r}} \cdot \nabla\chi(\mathbf{r})$

peut s'écrire

$$L_{\chi}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) + \frac{d}{dt}\Omega(\mathbf{r}) \quad \text{avec} \quad \Omega(\mathbf{r}) = q\chi(\mathbf{r})$$

Les deux lagrangiens sont donc bien équivalents

Hamiltonien pour une particule dans un champ magnétique

Pour passer du point de vue de Lagrange au point de vue de Hamilton, on effectue une transformation de Legendre. On introduit les moments canoniques

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i}$$

et on construit la fonction de Hamilton $H(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{r}} - L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$

Le mouvement de la particule est alors déterminé par les équations de Hamilton

$$\dot{r}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial r_i}$$

Pour une particule dans un champ magnétique :

$$\mathbf{p} = \nabla_{\dot{\mathbf{r}}} L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = M\dot{\mathbf{r}} + q\mathbf{A}(\mathbf{r})$$

impulsion

quantité de mouvement :
grandeur physique, indépendante de la jauge

$$H(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \frac{(\mathbf{p} - q\mathbf{A}(\mathbf{r}))^2}{2M}$$

Le magnétisme d'une particule ponctuelle

1. Quelques éléments de magnétostatique

Potentiel vecteur et invariance de jauge

2. Particule classique dans un champ magnétique

De la force de Lorentz à l'hamiltonien

3. Particule quantique dans un champ magnétique

Invariance de jauge quantique

4. L'effet Aharonov-Bohm

Phase quantique « géométrique »

5. Monopole magnétique et physique quantique

Argument de Dirac sur la quantification de la charge

Quantification canonique

Des crochets de Poisson classiques aux commutateurs quantiques :

opérateurs *position* et *impulsion* : $[\hat{r}_j, \hat{r}_k] = 0$, $[\hat{r}_j, \hat{p}_k] = i\hbar \delta_{j,k}$, $[\hat{p}_j, \hat{p}_k] = 0$

Quelle action sur une fonction d'onde $\psi(\mathbf{r})$? $\mathcal{P}(\mathbf{r}) = |\psi(\mathbf{r})|^2$

➡ On pose pour l'action de l'opérateur position $\hat{\mathbf{r}}[\psi(\mathbf{r})] = \mathbf{r} \psi(\mathbf{r})$

Ceci garantit que $\hat{r}_j \hat{r}_k [\psi(\mathbf{r})] = \hat{r}_k \hat{r}_j [\psi(\mathbf{r})]$

➡ Deuxième relation de commutation : $\hat{r}_j \hat{p}_k [\psi(\mathbf{r})] = \hat{p}_k [r_j \psi(\mathbf{r})] + i\hbar \delta_{j,k} \psi(\mathbf{r})$

La solution générale s'écrit : $\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar \nabla + \mathbf{X}(\mathbf{r})$

où $\mathbf{X}(\mathbf{r})$ est à ce stade un champ de vecteur quelconque.

Quantification canonique (suite)

opérateurs *position* et *impulsion* : $[\hat{r}_j, \hat{r}_k] = 0$, $[\hat{r}_j, \hat{p}_k] = i\hbar \delta_{j,k}$, $[\hat{p}_j, \hat{p}_k] = 0$

\hat{r} : multiplication par \mathbf{r}

$$\hat{p} = -i\hbar \nabla + \mathbf{X}(\mathbf{r})$$

➔ Troisième relation de commutation : $\hat{p}_j \hat{p}_k [\psi(\mathbf{r})] = \hat{p}_k \hat{p}_j [\psi(\mathbf{r})]$

$$\frac{\partial X_j}{\partial x_k} = \frac{\partial X_k}{\partial x_j} \Rightarrow \nabla \times \mathbf{X} = 0 \Rightarrow \mathbf{X} = \nabla \Omega(\mathbf{r})$$

En résumé, la quantification canonique revient à prendre pour les opérateurs position et impulsion

$$\hat{r}[\psi(\mathbf{r})] = \mathbf{r} \psi(\mathbf{r})$$

$$\hat{p}[\psi(\mathbf{r})] = -i\hbar \nabla \psi(\mathbf{r}) + (\nabla \Omega(\mathbf{r})) \psi(\mathbf{r})$$

La fonction $\Omega(\mathbf{r})$ est-elle importante ?

Comment éliminer la fonction $\Omega(\mathbf{r})$

On effectue un changement de fonction d'onde qui ne modifie pas la densité de probabilité

$$\psi(\mathbf{r}) \longrightarrow \hat{T}\psi(\mathbf{r}), \quad \text{avec} \quad \hat{T} = \exp[i\Omega(\hat{\mathbf{r}})/\hbar] \quad \textit{transformation unitaire}$$

Dans cette transformation, les opérateurs position et impulsion deviennent

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{r}} &\longrightarrow \hat{\hat{\mathbf{r}}} = \hat{T}\hat{\mathbf{r}}\hat{T}^\dagger = \hat{\mathbf{r}} \\ \hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\nabla + \nabla\Omega(\mathbf{r}) &\longrightarrow \hat{\hat{\mathbf{p}}} = \hat{T}\hat{\mathbf{p}}\hat{T}^\dagger = -i\hbar\nabla \end{aligned}$$

On peut donc éliminer la fonction $\Omega(\mathbf{r})$ grâce à une transformation unitaire appropriée

Dans la suite, l'opérateur impulsion $\hat{\mathbf{p}}$ désignera toujours $\hat{\mathbf{p}}[\psi(\mathbf{r})] = -i\hbar\nabla\psi(\mathbf{r})$

A ce stade, pas de lien avec un changement de jauge électromagnétique

Hamiltonien dans un champ magnétique

Principe de correspondance: à toute quantité physique fonction de \mathbf{r}, \mathbf{p} , on associe un opérateur fonction de $\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{p}}$ (avec la symétrisation appropriée)

$$\hat{H} = \frac{(\hat{\mathbf{p}} - q\mathbf{A}(\hat{\mathbf{r}}))^2}{2M} = \frac{(-i\hbar\nabla - q\mathbf{A}(\mathbf{r}))^2}{2M} \quad i\hbar\frac{\partial\psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \hat{H}\psi(\mathbf{r}, t)$$

Opérateur qui (comme son équivalent classique) fait intervenir explicitement le potentiel vecteur

Comment garantir l'invariance de jauge de la théorie ?

Si on fait simultanément les changements

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) \longrightarrow \mathbf{A}'(\mathbf{r}) = \mathbf{A}(\mathbf{r}) + \nabla\chi(\mathbf{r})$$

$$\psi(\mathbf{r}, t) \longrightarrow \psi'(\mathbf{r}, t) = \exp[iq\chi(\hat{\mathbf{r}})/\hbar]\psi(\mathbf{r}, t)$$

alors la fonction d'onde $\psi'(\mathbf{r}, t)$ est bien solution de l'équation de Schrödinger pour $\mathbf{A}'(\mathbf{r})$:

$$i\hbar\frac{\partial\psi'}{\partial t} = \frac{(-i\hbar\nabla - q\mathbf{A}'(\mathbf{r}))^2}{2M}\psi'(\mathbf{r}, t)$$

Lien profond entre la symétrie de jauge quantique et l'invariance de jauge de la magnétostatique

Le magnétisme d'une particule ponctuelle

1. Quelques éléments de magnétostatique

Potentiel vecteur et invariance de jauge

2. Particule classique dans un champ magnétique

De la force de Lorentz à l'hamiltonien

3. Particule quantique dans un champ magnétique

Invariance de jauge quantique

4. L'effet Aharonov-Bohm

Phase quantique « géométrique »

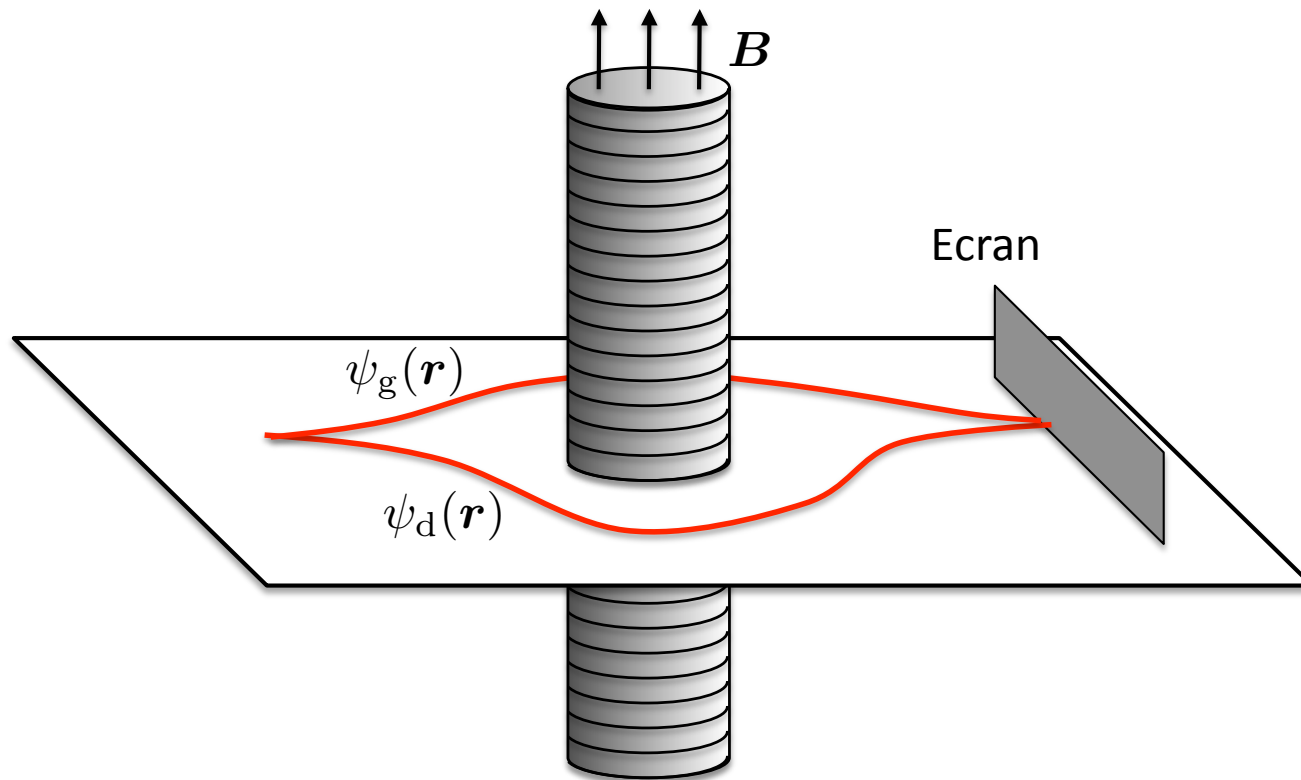
5. Monopole magnétique et physique quantique

Argument de Dirac sur la quantification de la charge

La géométrie de Aharonov et Bohm

1959, A&B : *Significance of Electromagnetic Potentials in the Quantum Theory*

(voir aussi Ehrenberg et Siday, 1949)



Interférence à deux ondes

Les particules ne peuvent pas pénétrer dans le solénoïde et ne ressentent donc pas de champ magnétique le long de leur(s) trajectoire(s) (pas de force de Lorentz)

Peut-on détecter qu'on a branché un courant dans le solénoïde en observant les franges d'interférence ?

L'argument de Aharonov & Bohm (1)

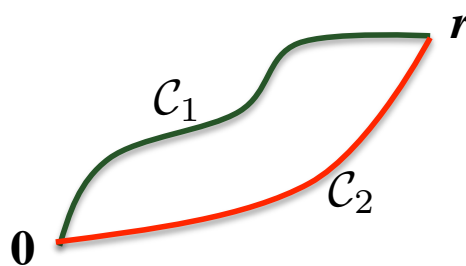
Les particules circulent dans une région où le champ magnétique est nul : $\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0$

Dans une région simplement connexe (i.e., sans trou), un potentiel vecteur qui vérifie :

$$\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0$$

peut s'écrire $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \nabla\chi(\mathbf{r})$ avec $\chi(\mathbf{r}) = \chi(\mathbf{0}) + \int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{r}} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$

En effet, la quantité $\int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{r}} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$ est alors définie de manière unique: elle ne dépend pas du chemin suivi pour aller de $\mathbf{0}$ à \mathbf{r}

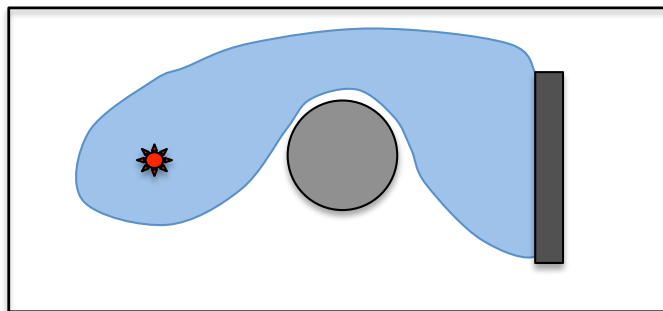
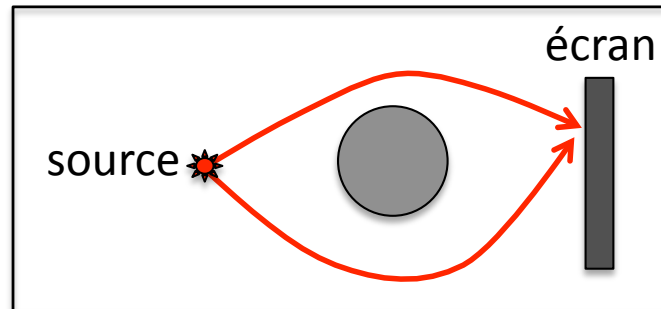

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{0}, C_1}^{\mathbf{r}} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} - \int_{\mathbf{0}, C_2}^{\mathbf{r}} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} &= \oint_{C_1 - C_2} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = 0 \\ &= \iint \mathbf{u}_z \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) \, d^2r = 0 \end{aligned}$$

Mais ce raisonnement ne s'applique pas tel quel à la géométrie de A&B car il y a un trou...

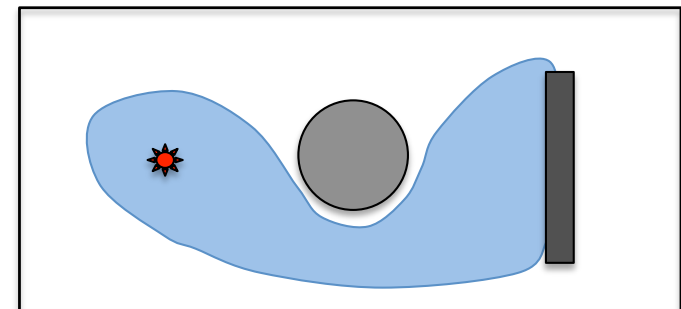
L'argument de Aharonov & Bohm (2)

Pour appliquer l'argument précédent malgré le trou représenté par le solénoïde, on va considérer des zones (patches) qui évitent ce solénoïde.

Vue de dessus:



zone I: $\mathbf{A}_I(\vec{r}) = \nabla \chi_I(\mathbf{r})$



zone II: $\mathbf{A}_{II}(\vec{r}) = \nabla \chi_{II}(\mathbf{r})$

Branchement du courant = changement de jauge pour chaque région simplement connexe

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0 \longrightarrow \mathbf{A}_I(\mathbf{r}) = \nabla \chi_I(\mathbf{r})$$

$$\psi_g^{(0)}(\mathbf{r}) \longrightarrow \psi_g(\mathbf{r}) = \exp[iq\chi_I(\mathbf{r})/\hbar] \psi_g^{(0)}(\mathbf{r})$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0 \longrightarrow \mathbf{A}_{II}(\mathbf{r}) = \nabla \chi_{II}(\mathbf{r})$$

$$\psi_d^{(0)}(\mathbf{r}) \longrightarrow \psi_d(\mathbf{r}) = \exp[iq\chi_{II}(\mathbf{r})/\hbar] \psi_d^{(0)}(\mathbf{r})$$

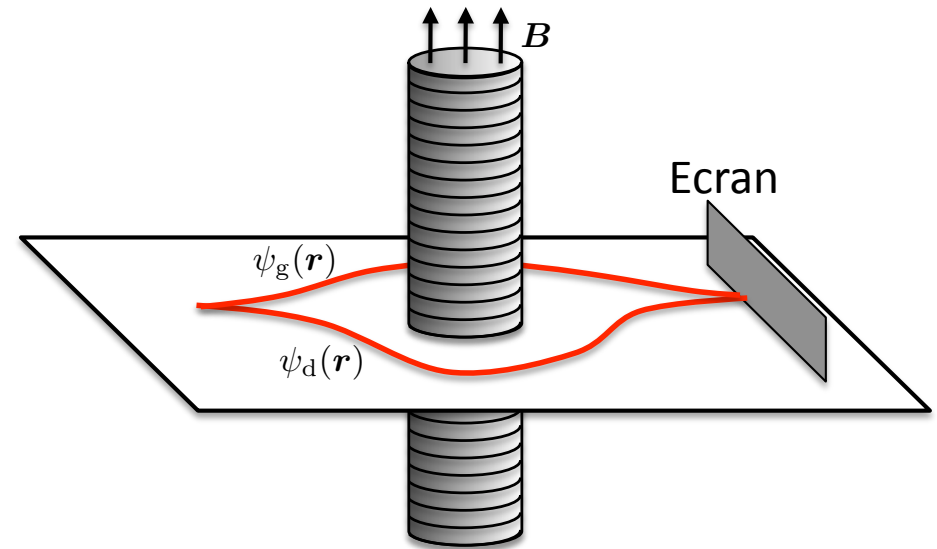
L'argument de Aharonov & Bohm (3)

Le signal d'interférence s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\mathbf{r}) &= |\psi_d(\mathbf{r}) + \psi_g(\mathbf{r})|^2 \\ &= |\psi_d|^2 + |\psi_g|^2 + \psi_d^* \psi_g + \psi_d \psi_g^* \end{aligned}$$

Le branchement du courant entraine

$$\begin{aligned} \psi_g^{(0)} &\longrightarrow \psi_g = \exp[iq\chi_I/\hbar] \psi_g^{(0)} \\ \psi_d^{(0)} &\longrightarrow \psi_d = \exp[iq\chi_{II}/\hbar] \psi_d^{(0)} \end{aligned}$$



ce qui provoque une modification du terme d'interférence:

$$\psi_d^*(\mathbf{r}) \psi_g(\mathbf{r}) = \exp([iq(\chi_I(\mathbf{r}) - \chi_{II}(\mathbf{r}))/\hbar] \psi_d^{(0)*}(\mathbf{r}) \psi_g^{(0)}(\mathbf{r}))$$

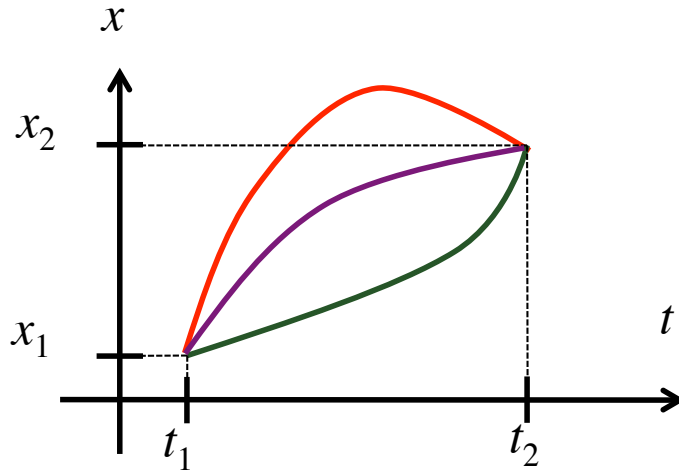
Ce changement de phase correspond à un décalage des franges d'interférence

$$\begin{aligned} \Phi = \chi_I(\mathbf{r}) - \chi_{II}(\mathbf{r}) &= \int_{0, \mathcal{C}_I}^{\mathbf{r}} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} - \int_{0, \mathcal{C}_{II}}^{\mathbf{r}} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_{\mathcal{C}} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \iint \mathbf{u}_z \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}') d^2r' \end{aligned}$$

flux du champ magnétique dans le solénoïde:

- détectable
- géométrique

Analyse de l'effet A-B fondé sur l'intégrale de chemin



Propagateur quantique :

$$K(\mathbf{r}_1, t_1; \mathbf{r}_2, t_2) \propto \sum_{\text{chemins } \Gamma} \exp(iS_\Gamma/\hbar)$$

$$S_\Gamma = \int_{t_1}^{t_2} L[\mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t), t] dt$$

En absence de courant dans le solénoïde : $L^{(0)}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$

En présence de courant : $L^{(0)}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) + q \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r})$

Terme additionnel dans l'action pour un chemin Γ donné allant de la source en $\mathbf{r}_1 = 0$ vers un point $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}$ de l'écran :

$$q \int_{t_1}^{t_2} \dot{\mathbf{r}}(t) \cdot \mathbf{A}[\mathbf{r}(t)] dt = q \int_{0, \Gamma}^{\mathbf{r}} \mathbf{A}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}'$$

Analyse de l'effet A-B fondé sur l'intégrale de chemin (2)

Même argument que précédemment : le terme additionnel $\delta S(\mathbf{r}, \Gamma_I) = q \int_{0, \Gamma_I}^{\mathbf{r}} \mathbf{A}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}'$ prend la même valeur pour tous les chemins restreints à la zone I

$$\longrightarrow \delta S_I(\mathbf{r})$$

Raisonnement identique pour la zone II : $\longrightarrow \delta S_{II}(\mathbf{r})$

Même si le calcul de l'intégrale de chemin est très compliqué, l'évaluation de la différence de phase induite par le branchement du courant dans le solénoïde est simple, au moins si on néglige la contributions des chemins « exotiques » faisant des tours complets du solénoïde :

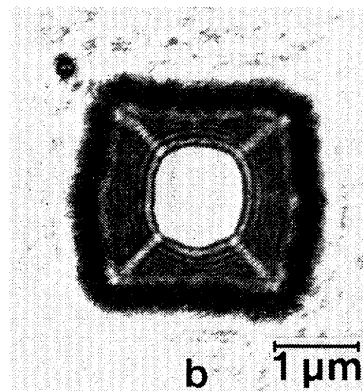
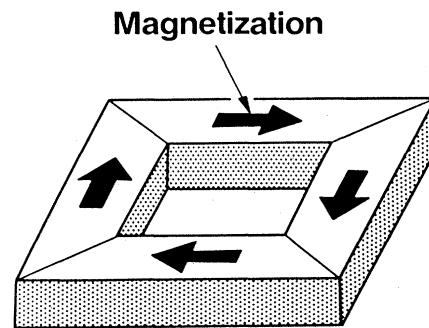
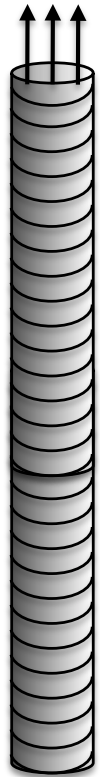
$$\text{Propagateur : } K(\mathbf{r}) \approx K_I(\mathbf{r}) + K_{II}(\mathbf{r}) \longrightarrow K_I(\mathbf{r}) e^{i\delta S_I(\mathbf{r})/\hbar} + K_{II}(\mathbf{r}) e^{i\delta S_{II}(\mathbf{r})/\hbar}$$

$$\text{Modification de la différence de phase : } \frac{1}{\hbar} (\delta S_I(\mathbf{r}) - \delta S_{II}(\mathbf{r}))$$

$$\text{c'est-à-dire : } \frac{q}{\hbar} \left(\int_{0, I}^{\mathbf{r}} \mathbf{A}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' - \int_{0, II}^{\mathbf{r}} \mathbf{A}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' \right) = \frac{q}{\hbar} \oint_C \mathbf{A}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' = q\Phi/\hbar$$

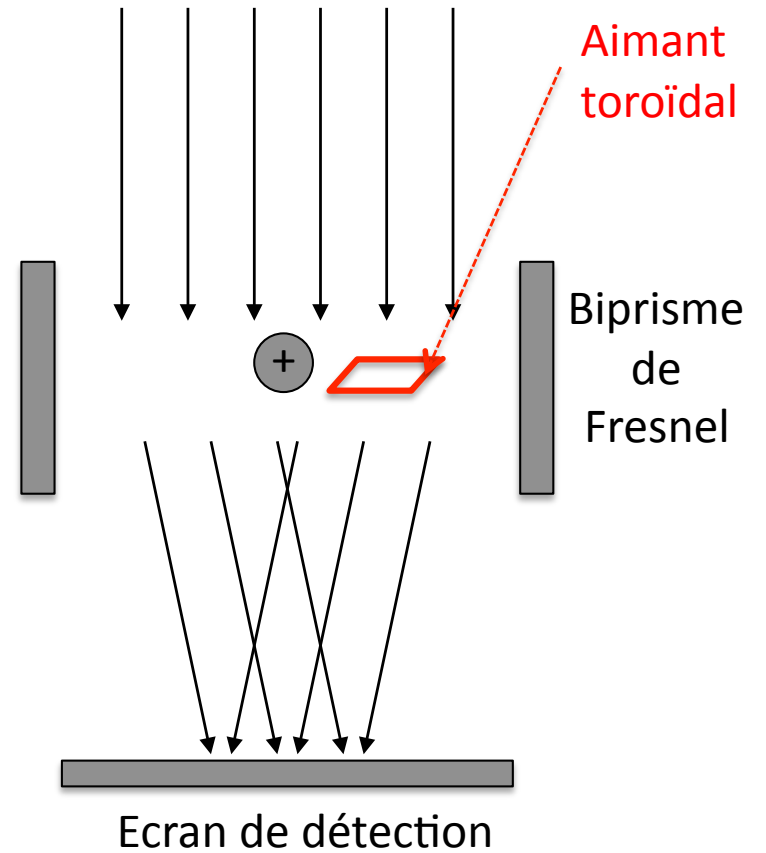
Mise en évidence expérimentale (1)

Chambers, 1960
Tonomura et al., 1982

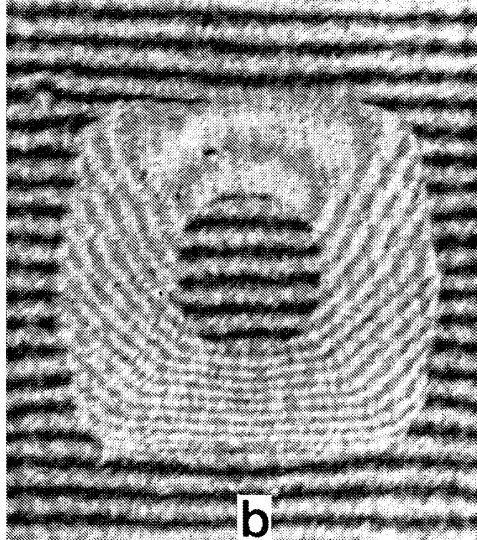


Permalloy

Faisceau électronique
150 keV, $\lambda=3 \cdot 10^{-12}$ m



Mise en évidence expérimentale (2)

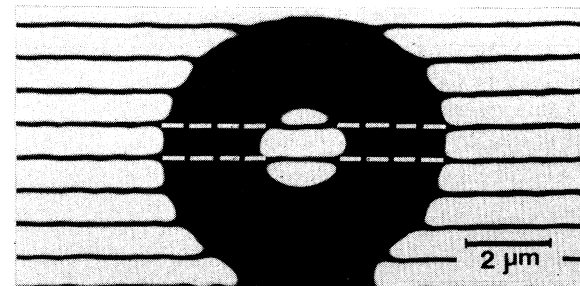
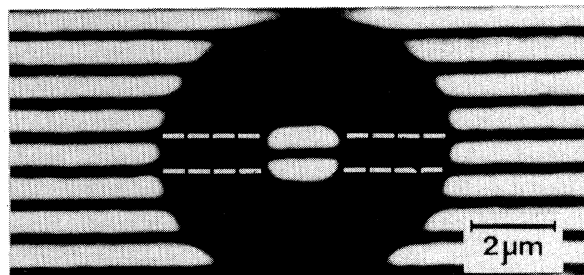


Tomomura et al, 1982

Franges d'interférence pour le faisceau d'électrons

Le décalage des franges entre l'intérieur et l'extérieur du tore correspond à la différence de marche attendue

Expérience reprise en 1985 par Tomomura, en déposant un autre matériau (niobium) à la surface du tore en Permalloy. Quand le niobium devient supraconducteur, la quantification du flux entraîne que le déphasage ne peut valoir que 0 ou π .



Le magnétisme d'une particule ponctuelle

1. Quelques éléments de magnétostatique

Potentiel vecteur et invariance de jauge

2. Particule classique dans un champ magnétique

De la force de Lorentz à l'hamiltonien

3. Particule quantique dans un champ magnétique

Invariance de jauge quantique

4. L'effet Aharonov-Bohm

Phase quantique « géométrique »

5. Monopole magnétique et physique quantique

Argument de Dirac sur la quantification de la charge

Comment décrire un monopole magnétique ?

On suppose qu'il existe une particule créant le champ magnétique $\mathbf{B}_m = \frac{q_m}{4\pi r^2} \mathbf{u}_r$

Pour décrire de manière quantique l'interaction entre une charge électrique et le champ créé par ce monopole, la seule procédure à notre disposition est d'écrire un hamiltonien qui fait intervenir un potentiel vecteur.

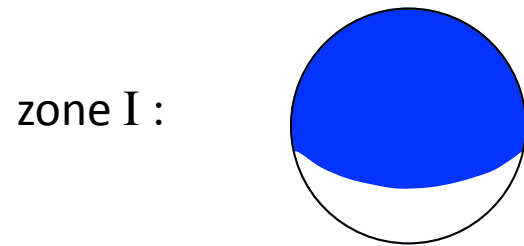
Mais il n'existe pas de potentiel vecteur \mathbf{A} capable de décrire le champ \mathbf{B}_m sur tout l'espace !

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) \, d^2r = 0$$

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_m \, d^2r = q_m$$

Compromis: on peut s'autoriser à utiliser différents potentiels vecteurs pour différentes zones (patches) de l'espace, pourvu qu'on puisse ensuite raccorder ces régions par une transformation de jauge appropriée.

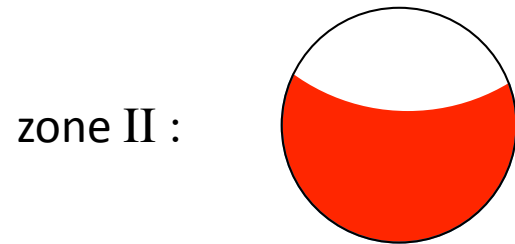
Modèle à deux zones pour un monopole magnétique



$$\mathbf{A}_I(\mathbf{r}) = \frac{q_m}{4\pi} \frac{1 - \cos \theta}{r \sin \theta} \mathbf{u}_\varphi$$

$$0 \leq \theta < 3\pi/4$$

$$r \neq 0$$



$$\mathbf{A}_{II}(\mathbf{r}) = -\frac{q_m}{4\pi} \frac{1 + \cos \theta}{r \sin \theta} \mathbf{u}_\varphi$$

$$\pi/4 < \theta \leq \pi$$

$$r \neq 0$$

Dans la région de recouvrement entre les zones I et II, les deux potentiels vecteurs \mathbf{A}_I et \mathbf{A}_{II} correspondent au même champ magnétique et doivent être reliés par une transformation de jauge (dans cette région seulement !):

$$\mathbf{A}_{II}(\mathbf{r}) - \mathbf{A}_I(\mathbf{r}) = -\frac{q_m}{2\pi} \frac{1}{r \sin \theta} \mathbf{u}_\varphi = \nabla \chi(\mathbf{r}) \quad \chi(\mathbf{r}) = \chi_0 - \frac{q_m}{2\pi} \varphi, \quad \mathbf{r} \in I \cap II$$

Que donne cette transformation de jauge pour une fonction d'onde ?

Monopole magnétique et quantification de la charge électrique

Particule de charge électrique q_e décrite par une fonction d'onde $\psi(\mathbf{r})$. L'expression de cette fonction d'onde dépend du potentiel vecteur

$$\mathbf{A}_I(\mathbf{r}) \longrightarrow \psi_I(\mathbf{r}) \qquad \mathbf{A}_{II}(\mathbf{r}) \longrightarrow \psi_{II}(\mathbf{r})$$

Dans la zone de recouvrement $I \cap II$, $\mathbf{A}_I(\mathbf{r})$ et $\mathbf{A}_{II}(\mathbf{r})$ sont reliés par une transformation de jauge, et il doit en aller de même pour $\psi_I(\mathbf{r})$ et $\psi_{II}(\mathbf{r})$

$$\psi_{II}(\mathbf{r}) = e^{iq_e\chi(\mathbf{r})/\hbar} \psi_I(\mathbf{r}) \qquad \chi(\mathbf{r}) = \chi_0 - \frac{q_m}{2\pi}\varphi$$

Par ailleurs, $\psi_I(\mathbf{r})$ et $\psi_{II}(\mathbf{r})$, comme toutes fonctions d'onde en mécanique quantique, doivent être monovaluées. En particulier : $\psi_{I/II}(r, \theta, \varphi + 2\pi) = \psi_{I/II}(r, \theta, \varphi)$

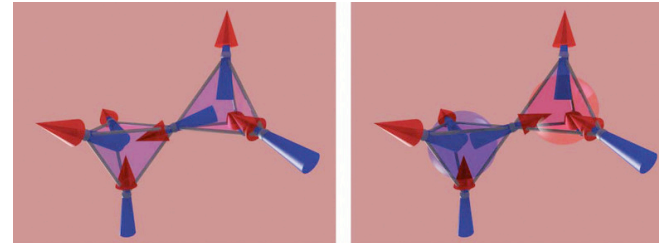
$$\exp\left(i\frac{q_e q_m}{\hbar}\right) = 1 \quad \Rightarrow \quad q_e q_m = n h$$

Il suffit d'un monopole magnétique pour expliquer la quantification de la charge électrique

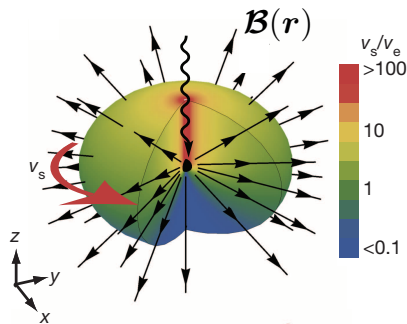
Simulations de monopoles magnétiques

Plusieurs expériences récentes de matière condensée ont récemment mis en évidence des structures liées au paramètre d'ordre du système ou à des quasi-particules dont les propriétés sont mathématiquement voisines d'un monopole magnétique

2009: réseaux de moments magnétiques de type « spin ice »



R. Moessner



2014: condensat de Bose-Einstein spineur dans un champ magnétique quadrupolaire (Ray et al)

Attention : ces systèmes ne génèrent pas un champ magnétique « réel » de monopole et n'impliquent en rien la quantification de la charge électrique « à la Dirac »

Il s'agit d'analogies intéressantes, qui permettent de visualiser la topologie associée à ces monopoles (avec en plus la notion de fractionnalisation pour les matériaux *spin ice*)

Description d'un condensat de Bose-Einstein spineur

Collection d'atomes de spin 1 tous préparés dans le même état

$$\Psi(\mathbf{r}) = \psi(\mathbf{r}) \begin{pmatrix} \zeta_{+1}(\mathbf{r}) \\ \zeta_0(\mathbf{r}) \\ \zeta_{-1}(\mathbf{r}) \end{pmatrix} \quad \sum_{m=-1}^{+1} |\zeta_m(\mathbf{r})|^2 = 1.$$

$\psi(\mathbf{r})$: amplitude de probabilité pour trouver un atome au point \mathbf{r}
indépendamment de son état de spin

ζ_m : amplitudes de probabilité relatives pour les trois états de spin

Peut-on (sous certaines hypothèses) écrire une équation d'évolution fermée pour ψ ?
(Ho-Shenoy, 1996)

Equation d'évolution et émergence d'un « potentiel vecteur » pour ψ

$$\Psi(\mathbf{r}) = \psi(\mathbf{r}) \begin{pmatrix} \zeta_{+1}(\mathbf{r}) \\ \zeta_0(\mathbf{r}) \\ \zeta_{-1}(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = \psi(\mathbf{r}) |\zeta(\mathbf{r})\rangle \quad \langle \zeta(\mathbf{r}) | \zeta(\mathbf{r}) \rangle = 1$$

Equation d'évolution pour Ψ : $i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2M} \Delta \Psi + \dots$

Le calcul du laplacien donne: $\Delta \Psi = \Delta(\psi|\zeta\rangle) = (\Delta\psi)|\zeta\rangle + 2(\nabla\psi) \cdot (\nabla|\zeta\rangle) + \psi(\Delta|\zeta\rangle)$

Sous l'hypothèse de suivi adiabatique du degré de liberté de spin (on y reviendra...), on obtient l'équation d'évolution cherchée pour ψ en prenant le produit scalaire avec $\langle \zeta |$:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2M} \Delta \psi + i \frac{\hbar}{M} \nabla \psi \cdot \mathcal{A} + \dots \quad \mathcal{A}(\mathbf{r}) = i\hbar \langle \zeta | (\nabla |\zeta\rangle)$$

structure en $\hat{\mathbf{p}} \cdot \mathcal{A}(\mathbf{r})$

D.S. Hall et al., 2014: peut-on générer une « texture de spin » $|\zeta(\mathbf{r})\rangle$ telle que le potentiel vecteur associé soit celui d'un monopole ?

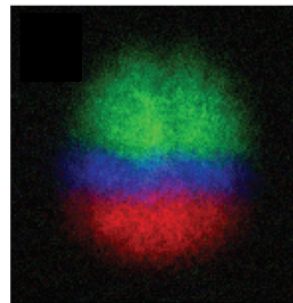
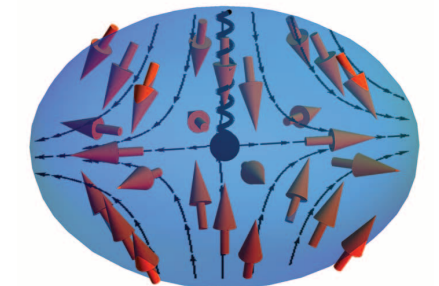
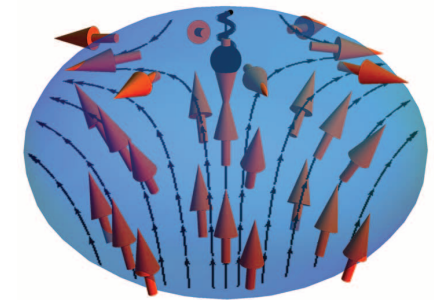
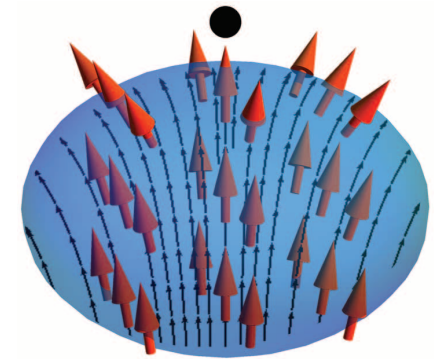
$$\mathcal{A}(\mathbf{r}) \propto \frac{1 + \cos \theta}{r \sin \theta} \mathbf{u}_\varphi$$

Un monopole dans un condensat spineur (groupe de D.S. Hall, 2014)

On part d'un condensat spineur dans un champ magnétique uniforme, parallèle à l'axe z . Le condensat est dans l'état de spin

$$|m_z = +1\rangle \longleftrightarrow |\zeta\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On amène progressivement un zéro de champ magnétique le long du demi axe $z > 0$, pour faire basculer adiabatiquement le spin dans la partie supérieure du nuage (champ magnétique quadrupolaire)



$$\begin{aligned} |m_z = -1\rangle \\ |m_z = 0\rangle \\ |m_z = +1\rangle \end{aligned}$$

Le « potentiel vecteur » résultant $\mathcal{A}(\mathbf{r}) = i\hbar \langle \zeta | (\nabla | \zeta \rangle)$ possède la structure recherchée. Le « champ magnétique » $\mathcal{B}(\mathbf{r})$ qui lui est associé s'interprète comme la vorticité du champ de vitesse superfluide.

En résumé...

$$\hat{H} = \frac{(\hat{\mathbf{p}} - q\mathbf{A}(\hat{\mathbf{r}}))^2}{2M}$$

Lien mécanique classique -- mécanique quantique

Force de Lorentz

Phase de Aharonov - Bohm

Lien électromagnétisme -- physique quantique

transformation de jauge

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) \longrightarrow \mathbf{A}'(\mathbf{r}) = \mathbf{A}(\mathbf{r}) + \nabla\chi(\mathbf{r}) \qquad \psi(\mathbf{r}, t) \longrightarrow \psi'(\mathbf{r}, t) = \exp[iq\chi(\hat{\mathbf{r}})/\hbar]\psi(\mathbf{r}, t)$$