

*Le magnétisme artificiel pour les gaz d'atomes froids*

# Magnétisme dans un réseau périodique

Jean Dalibard

Chaire *Atomes et rayonnement*

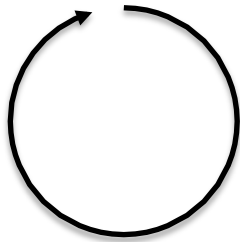
Année 2013-14



COLLÈGE  
DE FRANCE  
— 1530 —

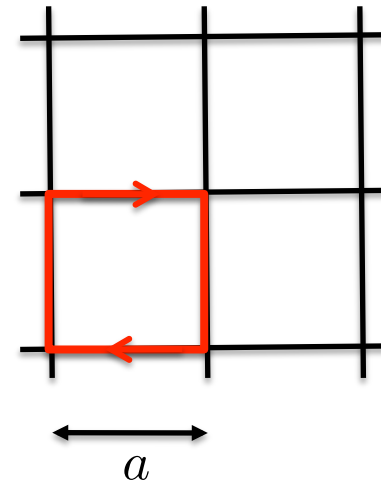
# Magnétisme et réseau périodique

## le mouvement cyclotron



$$\ell = \sqrt{\hbar / qB}$$

## le mouvement sur un réseau carré

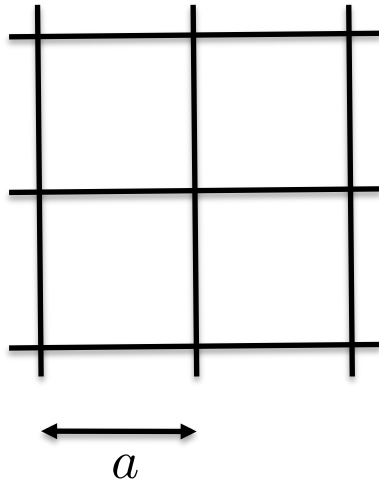


Compétition entre deux phénomènes (« frustration ») :

$$\frac{a^2}{\ell^2} = \frac{qBa^2}{\hbar} = 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi = Ba^2 \quad : \text{flux à travers une plaquette} \\ \Phi_0 = h/q \quad : \text{quantum de flux} \end{array} \right.$$

= phase de Aharonov-Bohm sur le contour d'une plaquette

# Valeurs pertinentes de la phase Aharonov-Bohm $2\pi\Phi/\Phi_0$



Dans un solide « ordinaire » :

$$B \sim 100 \text{ T} \quad a \sim 1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$$

$$\Phi = Ba^2 \sim 10^{-18} \text{ Wb}$$

$$\Phi_0 = h/q \approx 4 \cdot 10^{-15} \text{ Wb}$$

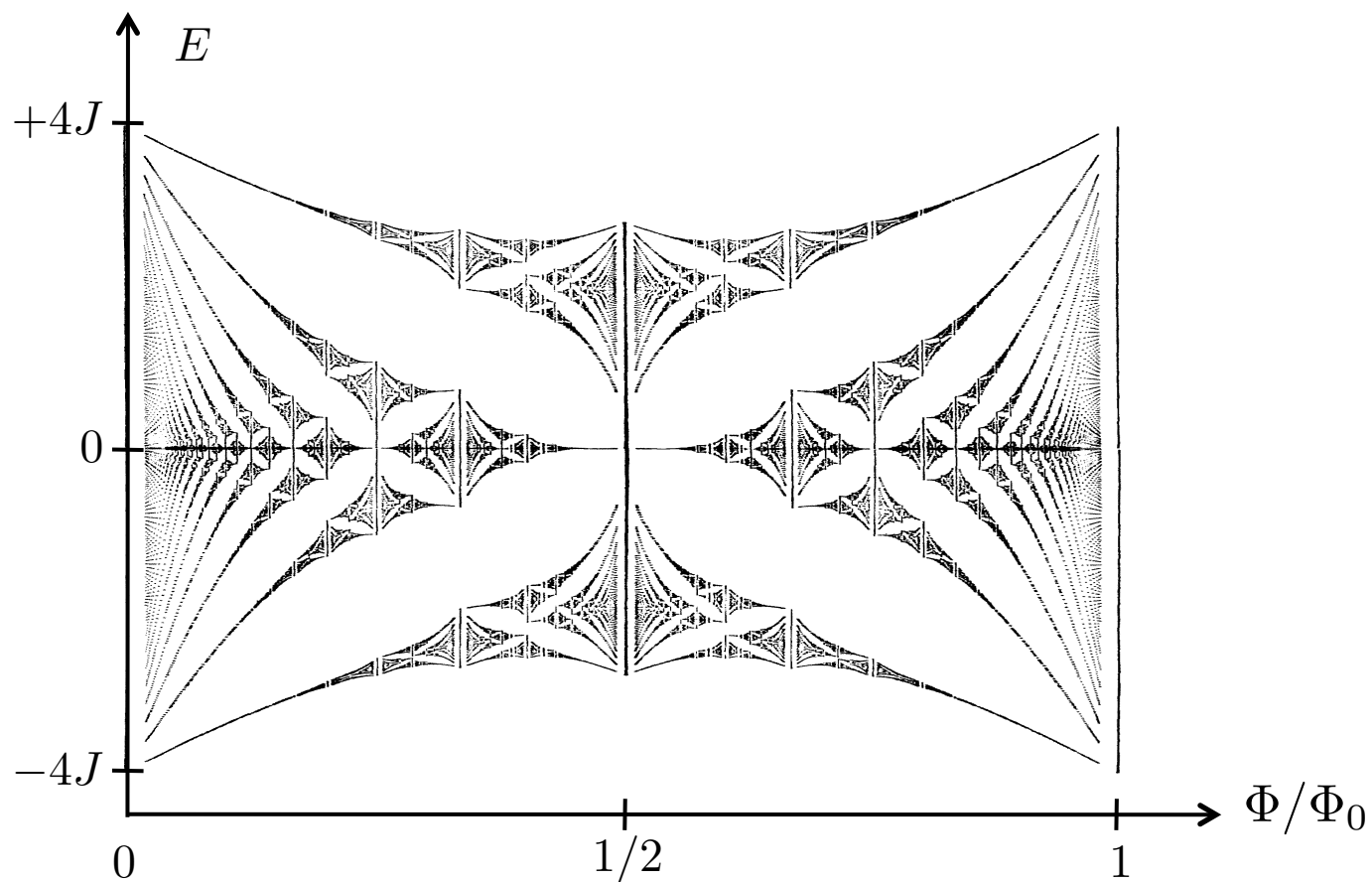
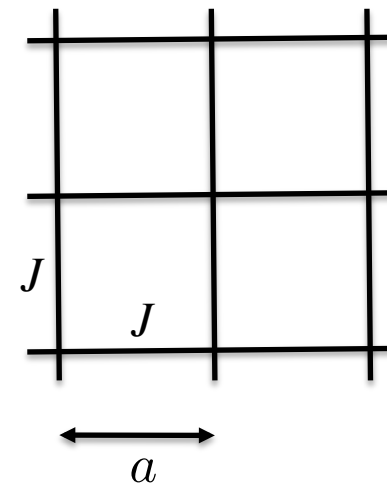
$$\longrightarrow 2\pi \Phi/\Phi_0 \sim 10^{-3}$$

Pas d'effet radicalement nouveau lié au réseau  
à attendre dans ce régime « de champ faible »

Si le flux  $Ba^2$  devient beaucoup plus grand grâce à l'utilisation de matériaux synthétiques ou de champs magnétiques artificiels, la frustration peut jouer un rôle dominant.

# Le spectre d'énergie à une particule

Hofstadter, 1976 : modèle de liaisons fortes



# Plan du cours

## 1. Champs de jauge sur réseau

*Modèle des liaisons fortes, choix de jauge*

## 2. Le papillon de Hofstadter

*Séparation en sous-bandes, nombre de Chern*

## 3. Les réseaux optiques secoués

*Comment obtenir des coefficients tunnels non réels*

## 4. Réseaux combinant plusieurs états internes

*Effet tunnel assisté par laser*

# Plan du cours

## 1. Champs de jauge sur réseau

*Modèle des liaisons fortes, choix de jauge*

## 2. Le papillon de Hofstadter

*Séparation en sous-bandes, nombre de Chern*

## 3. Les réseaux optiques secoués

*Comment obtenir des coefficients tunnels non réels*

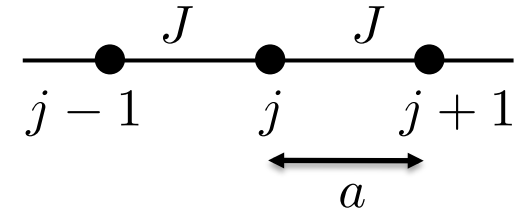
## 4. Réseaux combinant plusieurs états internes

*Effet tunnel assisté par laser*

# Le modèle des liaisons fortes

Réseau 1D périodique, modèle à une bande :

$$\hat{H} = -J \sum_{j \in \mathbb{Z}} |w_{j+1}\rangle \langle w_j| + \text{h.c.}$$



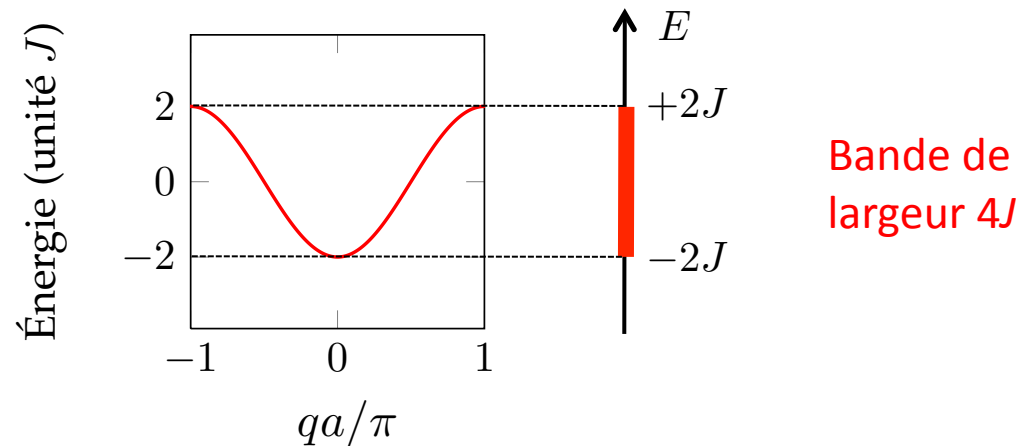
Etats propres = ondes de Bloch (version discrétisée des ondes planes)

$$|\psi_q\rangle = \sum_j e^{ijaq} |w_j\rangle$$

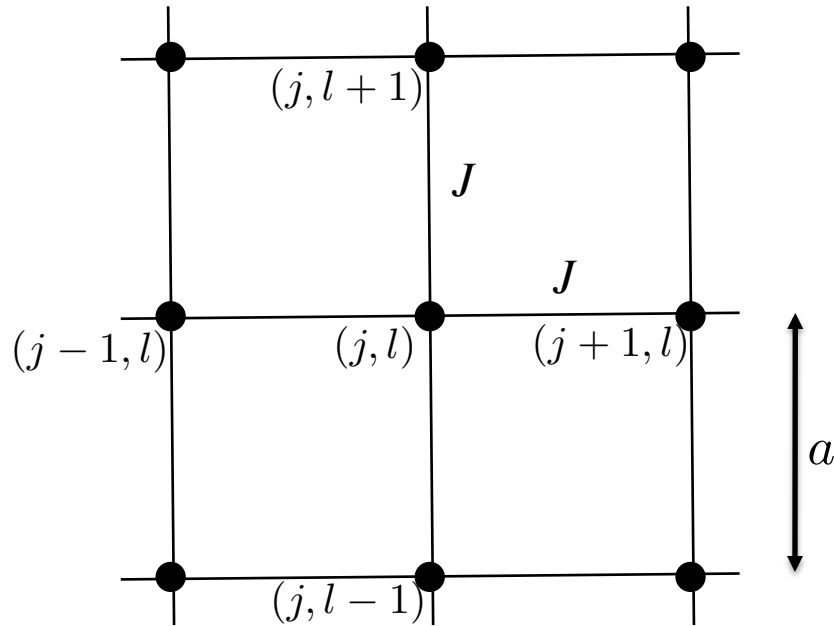
$q \in ] -\pi/a, \pi/a ]$  : quasi-moment  
zone de Brillouin

Energie associée :

$$E(q) = -2J \cos(aq)$$



# Modèle des liaisons fortes à 2D



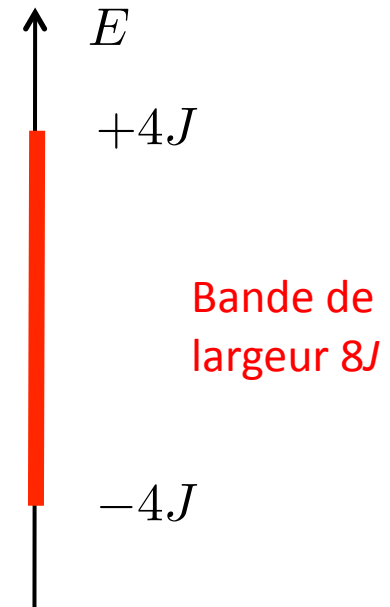
$$\hat{H} = \hat{H}_x + \hat{H}_y \quad : \text{hamiltonien séparable}$$

$$\hat{H} = -J \sum_{j,l} (|w_{j+1,l}\rangle \langle w_{j,l}| + |w_{j,l+1}\rangle \langle w_{j,l}|) + \text{h.c.}$$

Etats propres : ondes de Bloch à deux dimensions

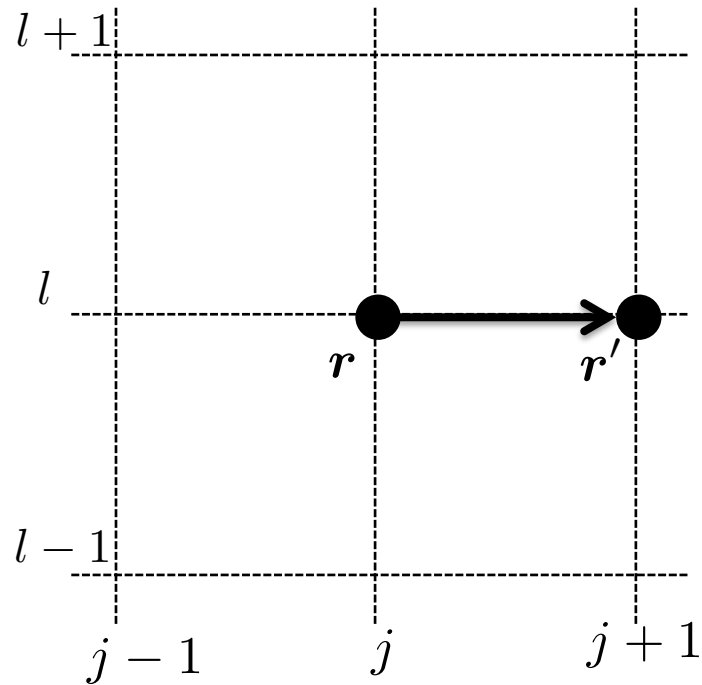
$$\mathbf{q} = (q_x, q_y) \quad |\psi_{\mathbf{q}}\rangle = \sum_{j,l} e^{ia(jq_x + lq_y)} |w_{j,l}\rangle$$

$$E(\mathbf{q}) = -2J (\cos(aq_x) + \cos(aq_y))$$





# Réseau sous champ magnétique



Phase de Aharonov-Bohm associée au lien  $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}'$

$$\phi(\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}') = \frac{q}{\hbar} \int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}'} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$$

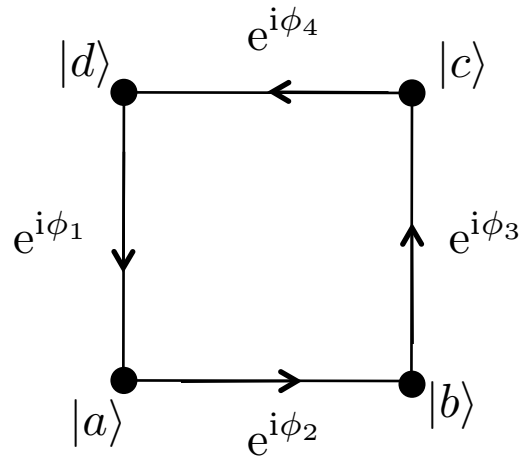
Substitution de Peierls dans le régime des liaisons fortes :  
chaque terme tunnel de l'hamiltonien est affecté de la phase correspondante

$$-J |w_{j+1,l}\rangle \langle w_{j,l}| \longrightarrow -J e^{i\phi(j,l \rightarrow j+1,l)} |w_{j+1,l}\rangle \langle w_{j,l}|$$

# Choix de jauge

Sur une plaquette donnée du réseau, la seule quantité physique (invariante de jauge) est la somme des phases des coefficients.

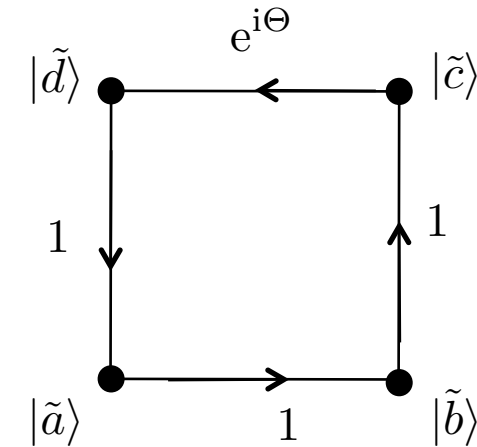
Illustration sur un système à 4 sites



$$\hat{H} = -J \left( e^{i\phi_1} |a\rangle\langle d| + e^{i\phi_2} |b\rangle\langle a| + e^{i\phi_3} |c\rangle\langle b| + e^{i\phi_4} |d\rangle\langle c| \right) + \text{h.c.}$$

On redéfinit la phase des états de base

$$\left\{ \begin{array}{l} |\tilde{a}\rangle = e^{i\phi_1} |a\rangle \\ |\tilde{b}\rangle = e^{i(\phi_1+\phi_2)} |b\rangle \\ |\tilde{c}\rangle = e^{i(\phi_1+\phi_2+\phi_3)} |c\rangle \\ |\tilde{d}\rangle = |d\rangle \end{array} \right.$$



$$\Theta = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4$$

# Champ magnétique uniforme et jauge de Landau

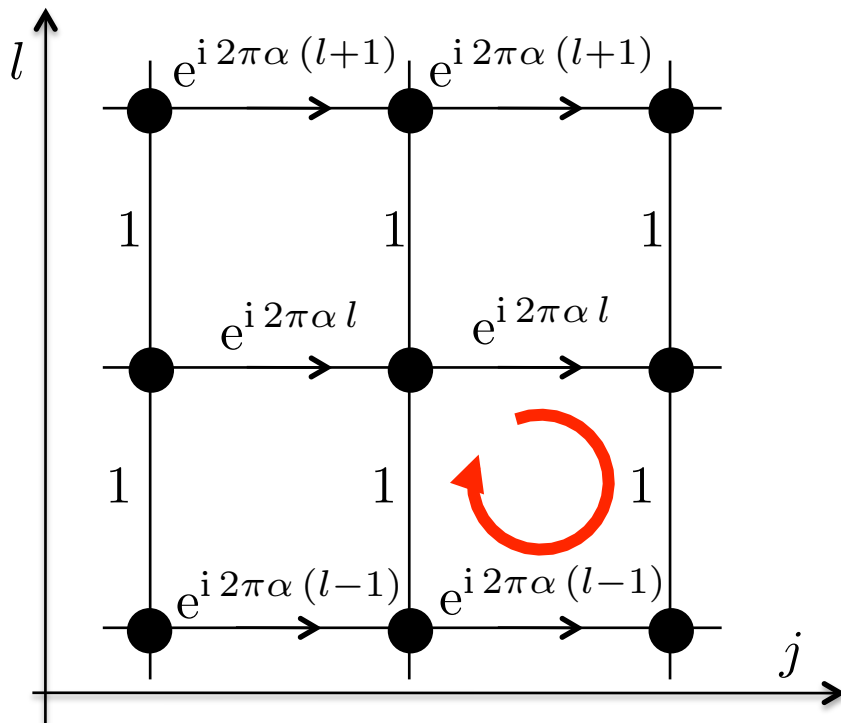
On décide d'attribuer une phase nulle à tous les liens verticaux

Equivalent pour cette version discrète de  $\mathbf{A} = (-By, 0, 0)$

La phase totale accumulée sur le pourtour de chaque cellule doit être identique :

$$2\pi\alpha \quad \text{avec} \quad \alpha = \Phi/\Phi_0$$

$$\begin{cases} \Phi = B\alpha^2 & : \text{flux à travers une plaquette} \\ \Phi_0 = h/q & : \text{quantum de flux} \end{cases}$$



Calcul de cette phase totale :

$$\begin{aligned} \Theta &= 2\pi\alpha l + 0 - 2\pi\alpha(l-1) + 0 \\ &= 2\pi\alpha \end{aligned}$$

# Plan du cours

## 1. Champs de jauge sur réseau

*Modèle des liaisons fortes, choix de jauge*

## 2. Le papillon de Hofstadter

*Séparation en sous-bandes, nombre de Chern*

## 3. Les réseaux optiques secoués

*Comment obtenir des coefficients tunnels non réels*

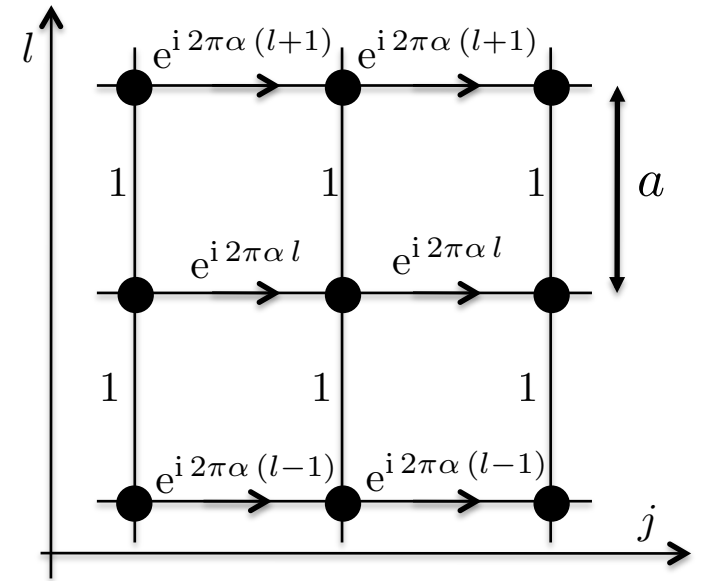
## 4. Réseaux combinant plusieurs états internes

*Effet tunnel assisté par laser*

# Formulation générale du problème

On cherche le spectre de l'hamiltonien

$$\hat{H} = -J \sum_{j,l} e^{i2\pi\alpha l} |w_{j+1,l}\rangle \langle w_{j,l}| + |w_{j,l+1}\rangle \langle w_{j,l}| + \text{h.c.}$$



On garde la périodicité selon l'axe  $x$ , mais on perd la périodicité selon l'axe  $y$

*On peut chercher les fonctions propres sous forme de fonctions de Bloch pour  $x$*

$$|\Psi\rangle = \sum_{j,l} C_l e^{ijaq_x} |w_{j,l}\rangle$$

*Equation de récurrence (équation de Harper) vérifiée par les coefficients  $C_l$ .*

Un cas particulier important : coefficient  $\alpha$  rationnel,  $\alpha = p'/p$

On retrouve alors la périodicité selon  $y$ , mais avec une période  $pa$  au lieu de  $a$ .

$$2\pi\alpha l \longleftrightarrow 2\pi\alpha(l + p)$$

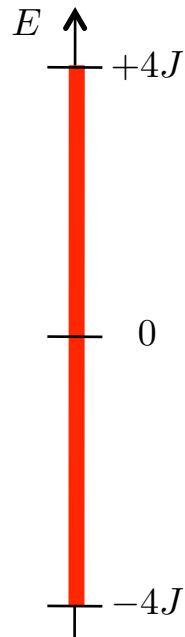
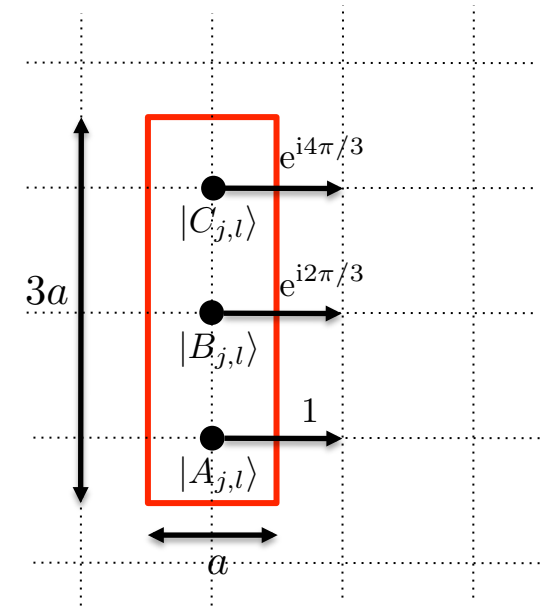
# L'exemple du flux $\alpha = 1/3$

Cellule unité à trois sites  $|A\rangle, |B\rangle, |C\rangle$  de taille  $a \times 3a$

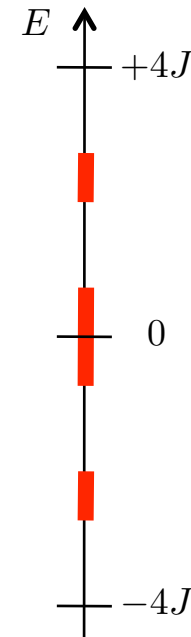
On cherche les états propres sous forme de fonctions de Bloch :

$$|\Psi_{\mathbf{q}}\rangle = \sum_{j,l} e^{ia(jq_x + 3lq_y)} (\alpha|A_{j,l}\rangle + \beta|B_{j,l}\rangle + \gamma|C_{j,l}\rangle)$$

$$\hat{H}|\Psi_{\mathbf{q}}\rangle = E(\mathbf{q})|\Psi_{\mathbf{q}}\rangle \longrightarrow \text{matrice } 3 \times 3 \text{ à diagonaliser pour chaque } \mathbf{q}$$

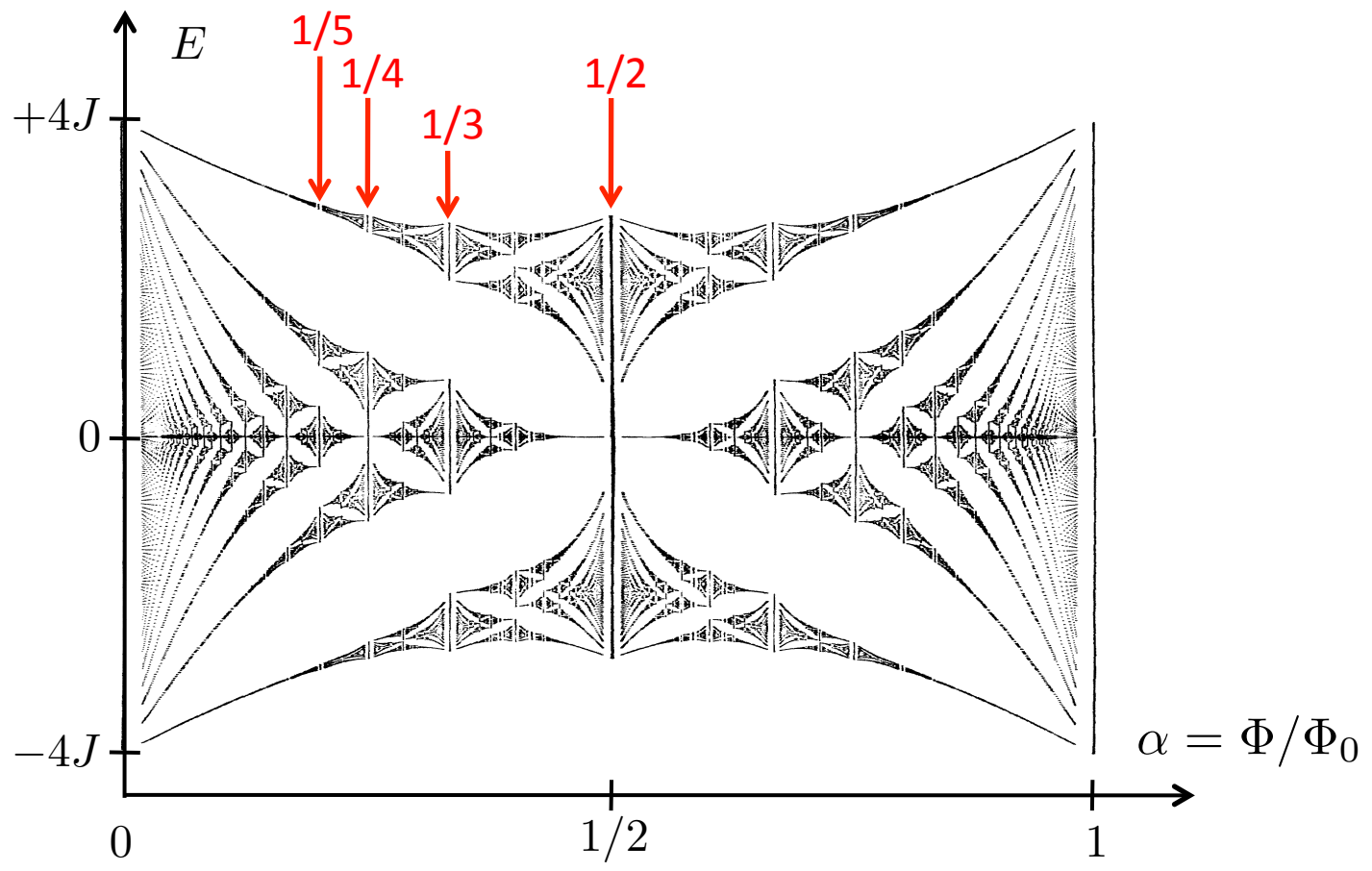


La bande fondamentale se fragmente en trois sous-bandes



# Forme générale du spectre

Hofstadter, 1976

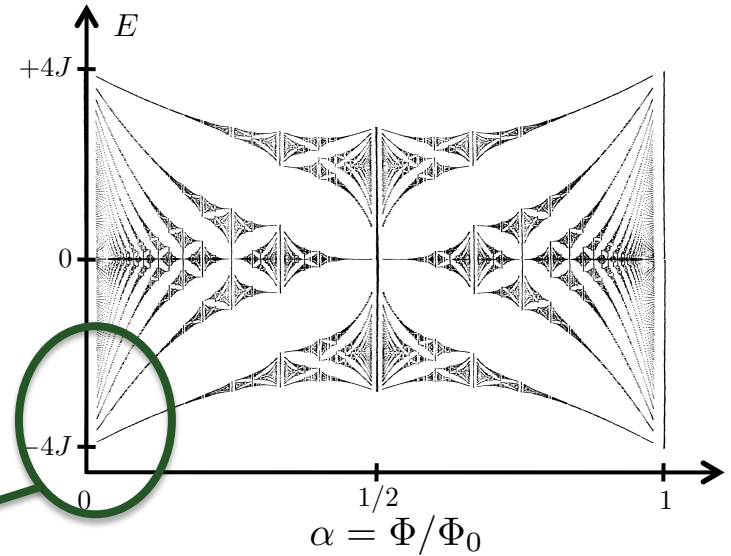
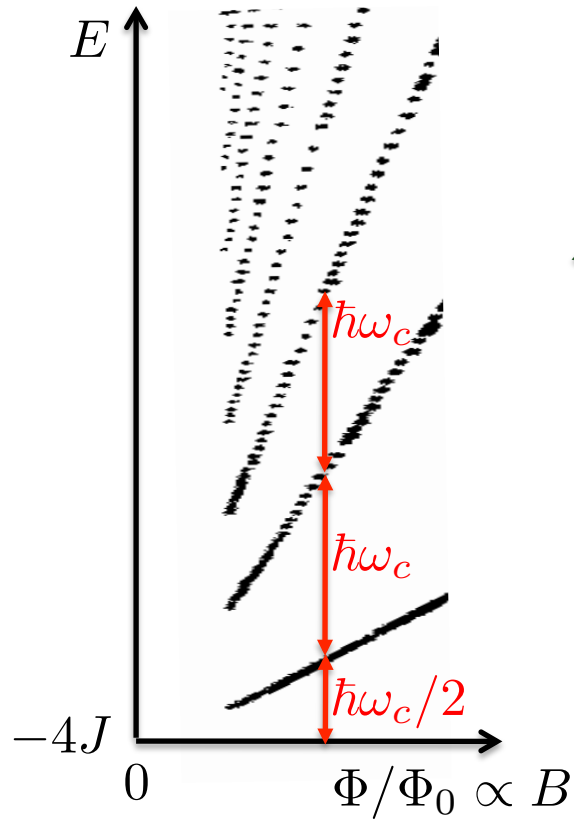


Structure fractale et self-similarité

Points de Dirac pour  $\alpha = 1/2, 1/4, \dots$

# Les niveaux de Landau retrouvés

Hofstadter, 1976



Niveaux très fins et équidistants

$$E_n = (n + 1/2)\hbar\omega_c$$

avec  $\omega_c = qB/M_{\text{eff}}$

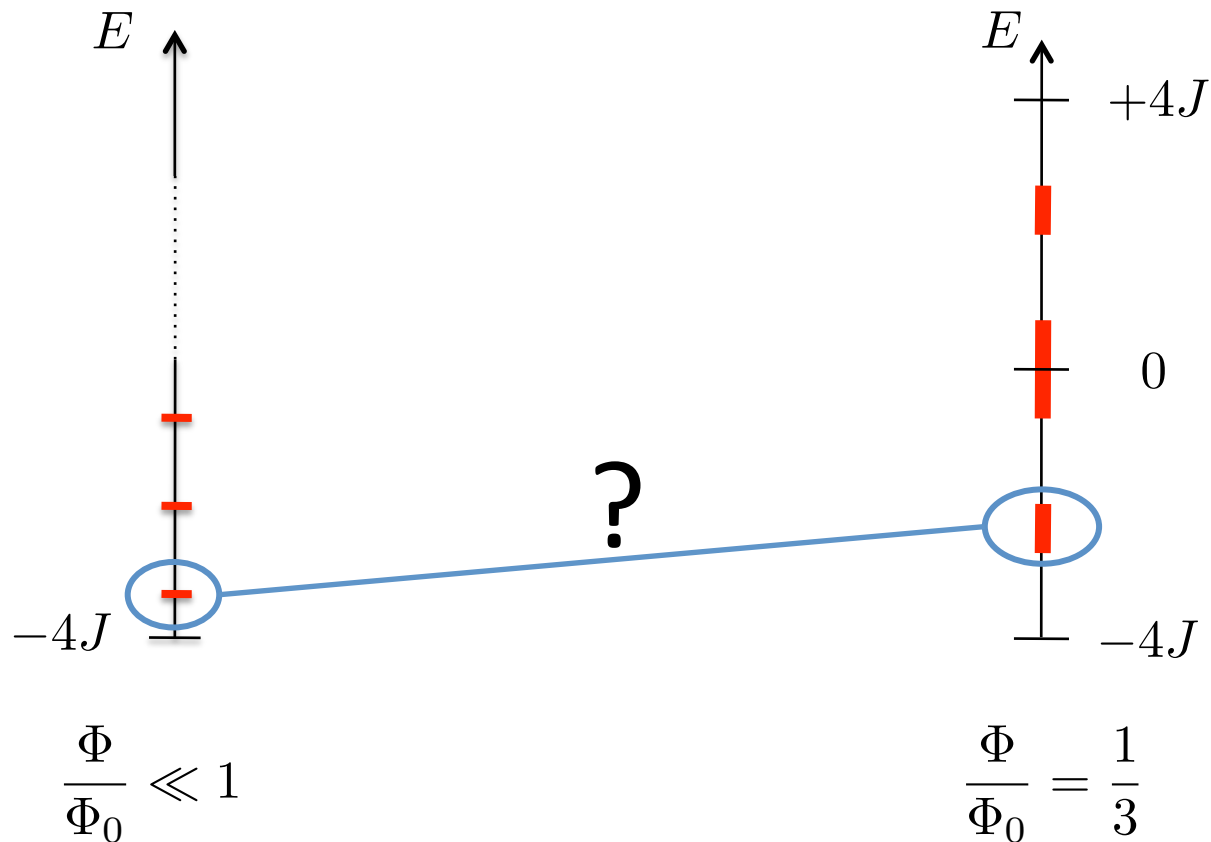
Dans ce réseau carré :  $M_{\text{eff}} = \frac{\hbar^2}{2Ja^2}$

$$\longrightarrow \hbar\omega_c = 2J \frac{\Phi}{\Phi_0}$$

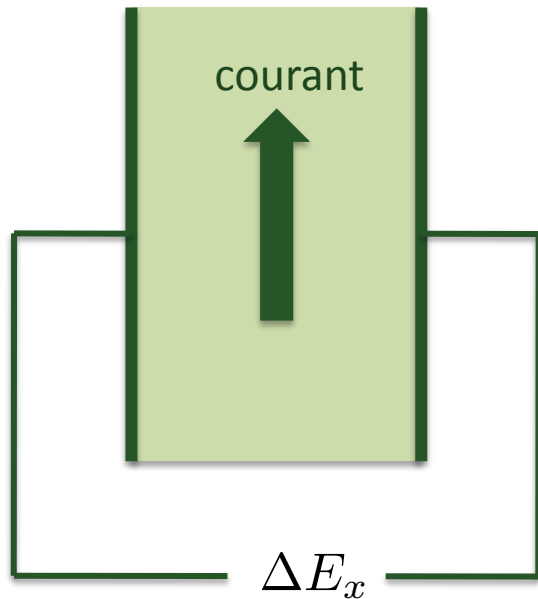


# La topologie des bandes d'énergie

Au delà des valeurs très basses du flux, est-ce qu'il existe un lien quantitatif entre les niveaux de Landau et les sous-bandes trouvées pour un flux plus grand ?



## Une propriété remarquable des niveaux de Landau



Conductivité transverse quantifiée si on remplit le niveau de Landau fondamental (et seulement lui) :

$$\dot{N}_y = \frac{1}{h} \Delta E_x$$

Obtient-on un courant similaire si on remplit seulement la sous-bande la plus basse pour une valeur donnée de  $\Phi/\Phi_0$  ?

Oui dans le cas particulier  $\alpha = 1/p$  !

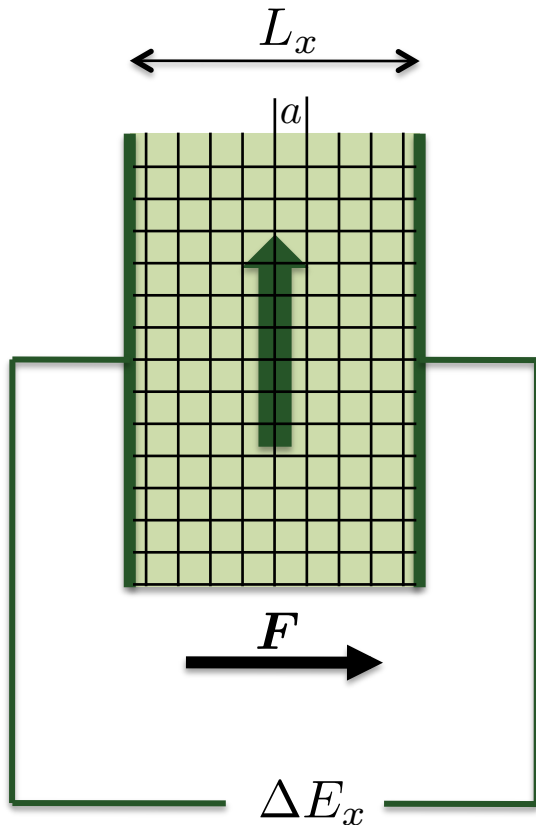
Conséquence d'un résultat général établi par Thouless et al, 1982, pour un remplissage de type « isolant » (potentiel chimique dans un gap):

$$\dot{N}_y = \frac{C}{h} \Delta E_x$$

$C$  : nombre entier (nombre de Chern)

# Interprétation physique du nombre de Chern

$$\dot{N}_y = C \Delta E_x / h$$



On applique une force  $F$  associée à la différence d'énergie  $\Delta E_x = F L_x$

Oscillations de Bloch le long de l'axe  $x$  avec la période

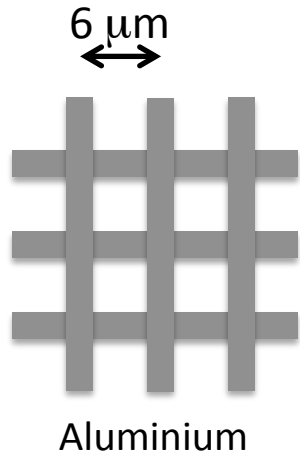
$$\tau_B = \frac{h}{F a}$$

En une période de Bloch, combien de particules traversent un segment de longueur  $a$  ?

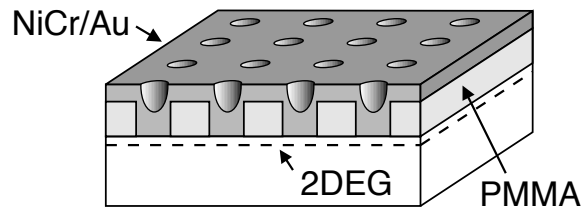
$$\begin{aligned} \delta N &= a J_y \tau_B \\ &= a \frac{1}{L_x} \left( \frac{C}{h} \Delta E_x \right) \left( \frac{h}{F a} \right) \\ &= C \quad \text{le nombre de Chern !} \end{aligned}$$

Le LLL et la sous-bande fondamentale du papillon pour  $\alpha = 1/p$  sont topologiquement équivalents car ils ont le même nombre de Chern ( $C=1$ )

# Expériences avec des réseaux de grand pas en matière condensée

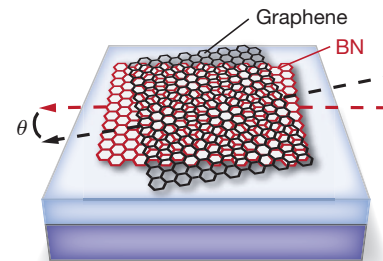


Etude de la transition supraconductrice en présence de flux  
Pannetier et al, 1984



Conductance de Hall en présence d'un réseau  
Albrecht et al, 2001

Figure de Moiré avec deux feuilles  
de graphène et conductance de Hall,  
Dean et al, 2013



# Plan du cours

## 1. Champs de jauge sur réseau

*Modèle des liaisons fortes, choix de jauge*

## 2. Le papillon de Hofstadter

*Séparation en sous-bandes, nombre de Chern*

## 3. Les réseaux optiques secoués

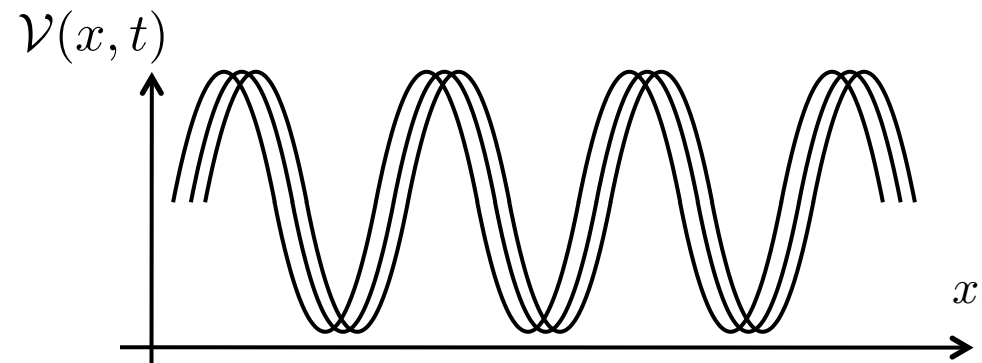
*Comment obtenir des coefficients tunnels non réels*

## 4. Réseaux combinant plusieurs états internes

*Effet tunnel assisté par laser*

## But de cette approche

Réseau modulé dans le temps



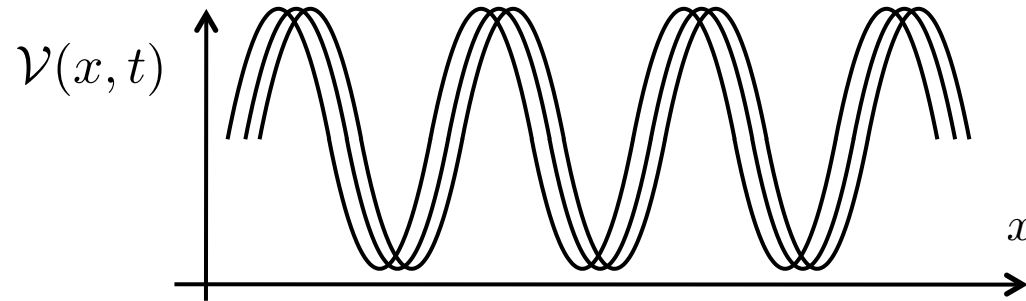
On veut utiliser les différents paramètres de la modulation

- amplitude
- fréquence
- phase
- dimensionnalité

pour faire une « ingénierie » des coefficients tunnels, avec en particulier

$$J \longrightarrow J e^{i\theta}$$

## Rappel pour un réseau 1D modulé (cours 2012-13)



$$\mathcal{V}(x, t) = V[x - x_0(t)]$$

On peut faire une transformation unitaire pour simplifier l'analyse du problème :

$$\hat{U}(t) = \exp(ix_0(t)\hat{p}/\hbar)$$

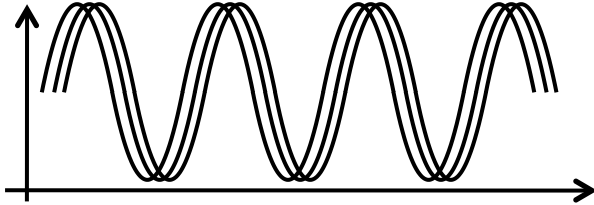
On passe de  $\hat{H}(t) = \frac{\hat{p}^2}{2M} + V[x - x_0(t)]$  à  $\hat{H}(t) = \frac{[\hat{p} - A(t)]^2}{2M} + V(x)$

$$A(t) = M\dot{x}_0(t)$$

Dans le modèle des liaisons fortes, ceci conduit à

$$\hat{H}(t) = -J e^{iM a \dot{x}_0(t)/\hbar} \sum_j |w_{j+1}\rangle \langle w_j| + \text{h.c.}$$

## La modification du coefficient tunnel



$$\hat{H}(t) = -J e^{iMa\dot{x}_0(t)/\hbar} \sum_j |w_{j+1}\rangle \langle w_j| + \text{h.c.}$$

On écrit le vecteur d'état sous la forme

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_j \alpha_j(t) |w_j\rangle$$

L'équation de Schrödinger conduit alors à

$$i\hbar \dot{\alpha}_j = -J \left( \alpha_{j+1} e^{-iMa\dot{x}_0(t)/\hbar} + \alpha_{j-1} e^{+iMa\dot{x}_0(t)/\hbar} \right)$$

Deux échelles de temps : mouvement rapide  $\dot{x}_0(t)$  , mouvement lent  $J/\hbar$

Moyenne temporelle de l'équation d'évolution :  $i\hbar \dot{\alpha}_j = -\bar{J}^* \alpha_{j+1} - \bar{J} \alpha_{j-1}$

avec le coefficient tunnel moyenné :  $\bar{J} = J \langle e^{iMa\dot{x}_0(t)/\hbar} \rangle$

*Que peut-on obtenir par cette méthode ?*



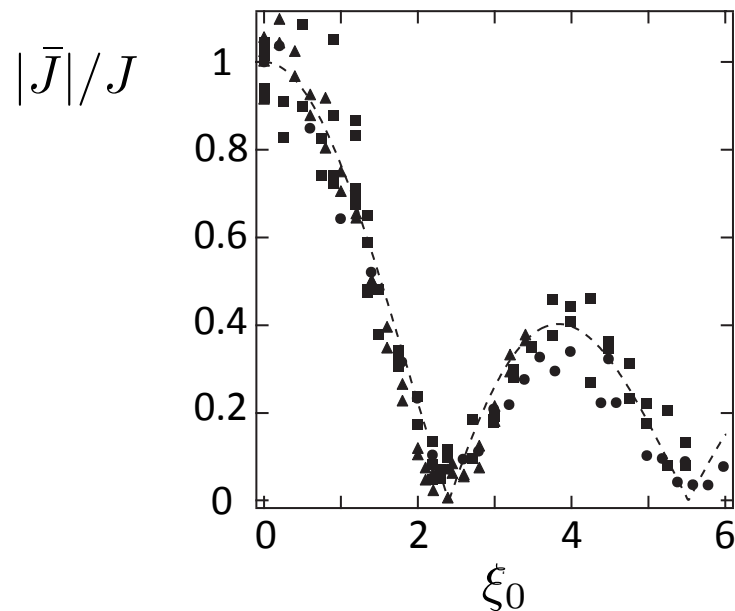
# Changement de l'amplitude du coefficient tunnel

$$\bar{J} = J \langle e^{i Ma \dot{x}_0(t)/\hbar} \rangle$$

Expérience de Pise (2007) : modulation sinusoïdale

$$\frac{Ma}{\hbar} \dot{x}_0(t) = \xi_0 \sin(\Omega t + \phi) \quad \longrightarrow \quad \bar{J} = J \langle e^{i \xi_0 \sin(\Omega t + \phi)} \rangle = J \mathcal{J}_0(\xi_0)$$

fonction de Bessel

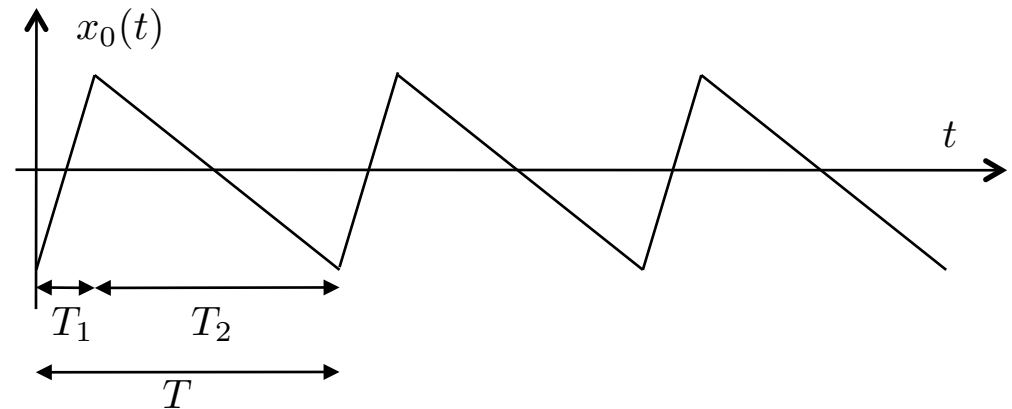


Permet de changer le signe du coefficient tunnel, mais pas sa phase

# Changement de la phase du coefficient tunnel (version 1)

$$\bar{J} = J \langle e^{i M a \dot{x}_0(t) / \hbar} \rangle$$

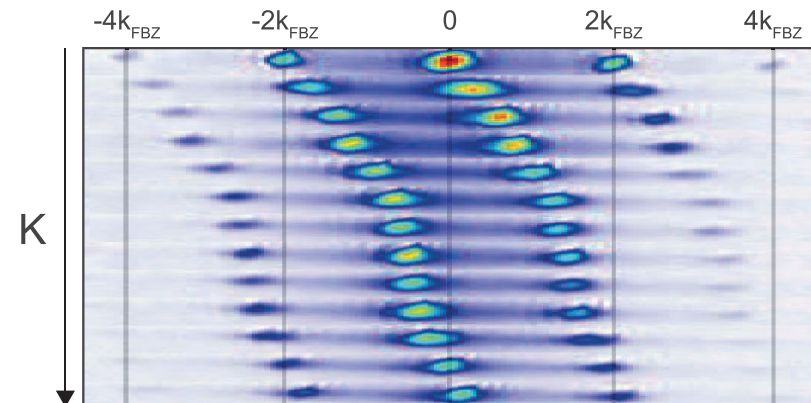
On prend une modulation temporelle asymétrique



$$\frac{\bar{J}}{J} = \frac{T_1}{T} e^{i M a v_1 / \hbar} + \frac{T_2}{T} e^{i M a v_2 / \hbar} \quad \textit{a priori non réel}$$

$$v_1 T_1 + v_2 T_2 = 0$$

Equivalent d'un potentiel vecteur constant :  
 décalage du minimum de la courbe de dispersion,  
 qui peut être mis en évidence  
 dans une expérience de temps de vol



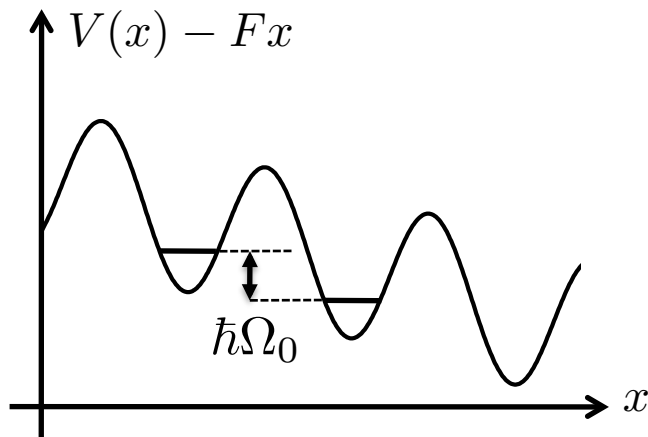
# Changement de la phase du coefficient tunnel (version 2)

On revient à une modulation sinusoidale

On va chercher à imprimer la phase  $\phi$  de la modulation  $\frac{Ma}{\hbar} \dot{x}_0(t) = \xi_0 \sin(\Omega t + \phi)$  sur le coefficient tunnel

- Jusqu'à maintenant, on a vu  $\bar{J} = J \mathcal{J}_0(\xi_0)$ , ce qui ne convient pas.
- Mais on peut aussi produire  $\bar{J} = J \mathcal{J}_1(\xi_0) e^{i\phi}$  en profitant d'une résonance !

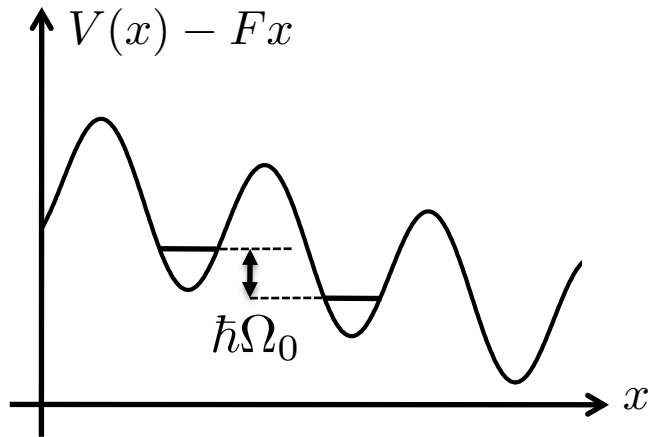
**Première étape :** on superpose au réseau une force uniforme  $F$



Décalage en énergie de deux sites adjacents d'une quantité  $\hbar\Omega_0$

**Deuxième étape :** on va moduler à  $\Omega \sim \Omega_0$

## Utilisation d'une résonance (suite)



On cherche le vecteur d'état sous la forme

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_j \alpha_j(t) e^{ij\Omega_0 t} |w_j\rangle$$

L'équation de Schrödinger pour le réseau vibrant conduit alors à

$$i \hbar \dot{\alpha}_j = -J \left( \alpha_{j+1} e^{-i(Max_0(t)/\hbar - \Omega_0 t)} + \alpha_{j-1} e^{+i(Max_0(t)/\hbar - \Omega_0 t)} \right)$$

Pour  $\frac{Ma}{\hbar} \dot{x}_0(t) = \xi_0 \sin(\Omega t + \phi)$  et  $\Omega = \Omega_0$ , le coefficient tunnel moyenné vaut :

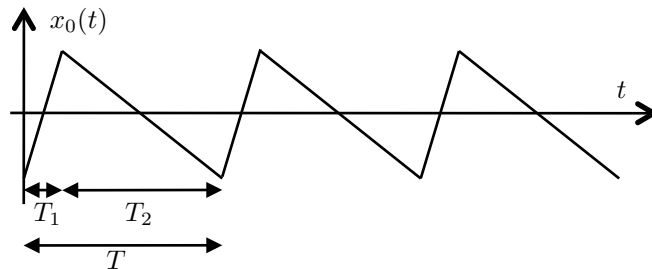
$$\bar{J} = J \langle e^{i[\xi_0 \sin(\Omega t + \phi) - \Omega_0 t]} \rangle = J \left\langle \sum_n \mathcal{J}_n(\xi_0) e^{in(\Omega t + \phi)} e^{-i\Omega_0 t} \right\rangle$$

$$\bar{J} = J \mathcal{J}_1(\xi_0) e^{i\phi}$$

**Gagné ! ( au moins à 1D )**

# Le passage à deux dimensions

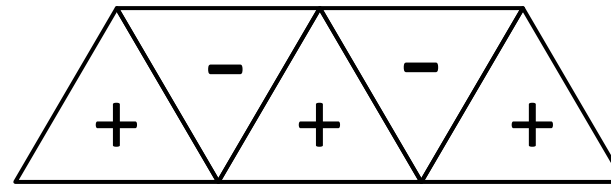
## Modulation asymétrique



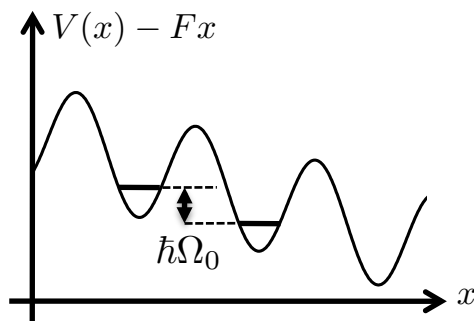
Applicable à un réseau triangulaire  
(ne marche pas si les côtés de la cellule  
du réseau sont deux à deux parallèles)

Conduit à un flux alterné

Hambourg 2013



## Modulation résonnante

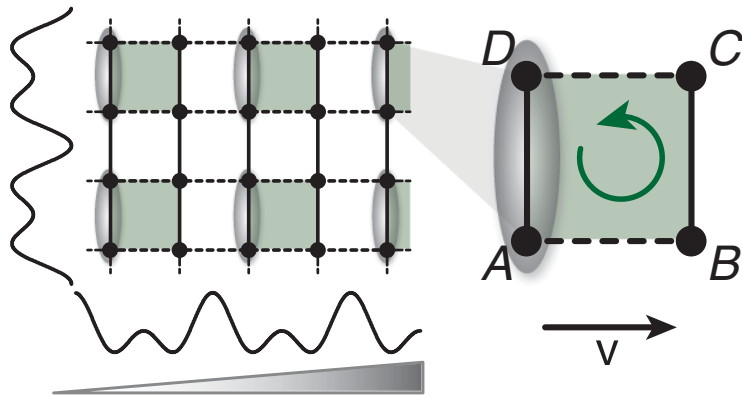


Peut être adapté à un réseau carré  
pour produire un flux uniforme,  
moyennant certaines subtilités...

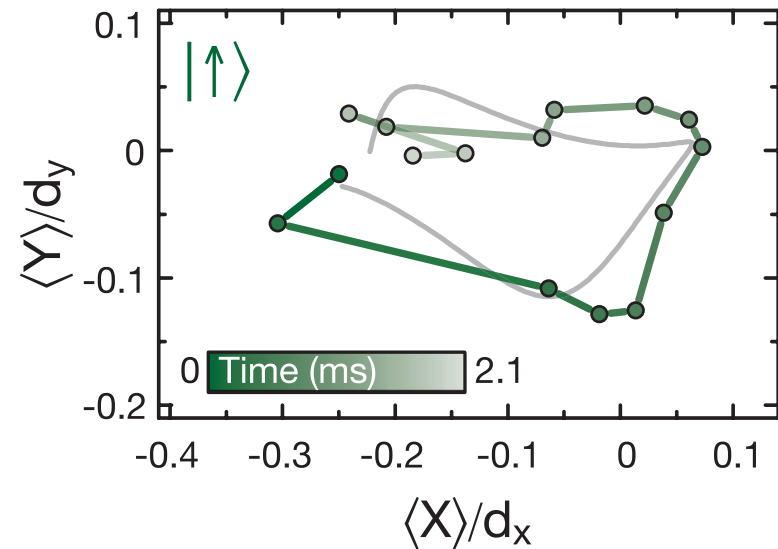
Munich 2013, MIT 2013

# Exemple de résultat à deux dimensions

Munich, 2013, utilisation d'un réseau secoué + résonance



Utilisation d'un super-réseau pour isoler des plaquettes comprenant 2 x 2 sites



Trajectoire cyclotron à l'intérieur d'une plaquette

# Plan du cours

## 1. Champs de jauge sur réseau

*Modèle des liaisons fortes, choix de jauge*

## 2. Le papillon de Hofstadter

*Séparation en sous-bandes, nombre de Chern*

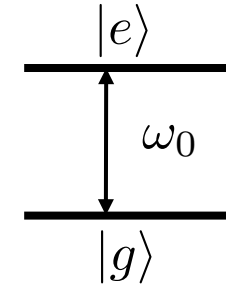
## 3. Les réseaux optiques secoués

*Comment obtenir des coefficients tunnels non réels*

## 4. Réseaux combinant plusieurs états internes

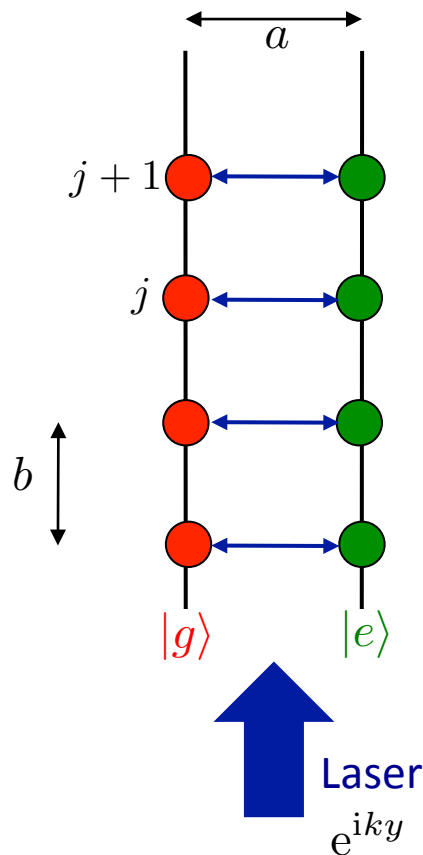
*Effet tunnel assisté par laser*

# Effet tunnel assisté par laser



Atome à deux états internes  $|g\rangle, |e\rangle$

Géométrie en forme d'« échelle », avec deux réseaux 1D parallèles



Le couplage avec le laser permet à l'atome de « sauter » d'un montant de l'échelle à l'autre

$$|g, w_j\rangle \rightarrow |e, w_j\rangle$$

Élément de matrice de l'effet tunnel sur la ligne  $j$  :

$$\underbrace{e^{ijkb}}_{\text{phase du laser sur la ligne } j} \frac{\hbar\kappa}{2} \int \underbrace{w_0(x-a, y) \cos(ky) w_0(x, y) d^2r}_{\text{recouvrement des fonctions de Wannier pour } |g\rangle \text{ et } |e\rangle}$$

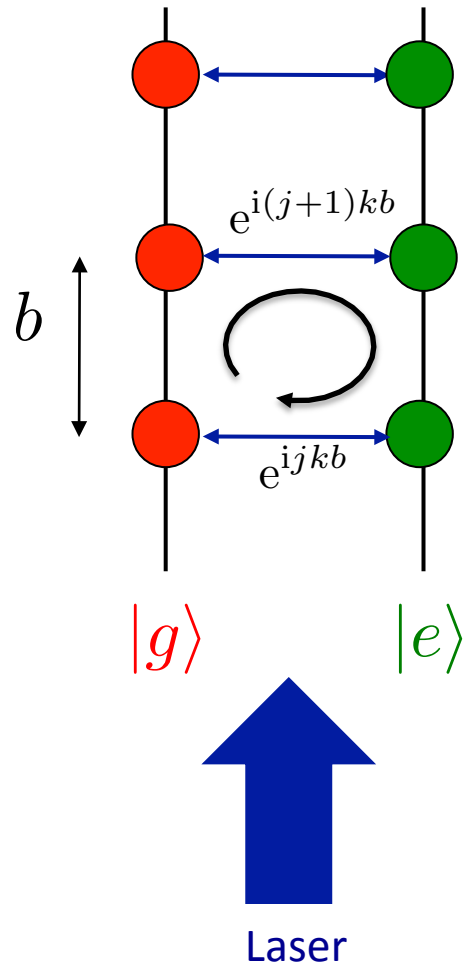
phase du laser sur la ligne  $j$

recouvrement des fonctions de Wannier pour  $|g\rangle$  et  $|e\rangle$





## Effet tunnel assisté par laser (suite)



Phase accumulée sur une plaquette

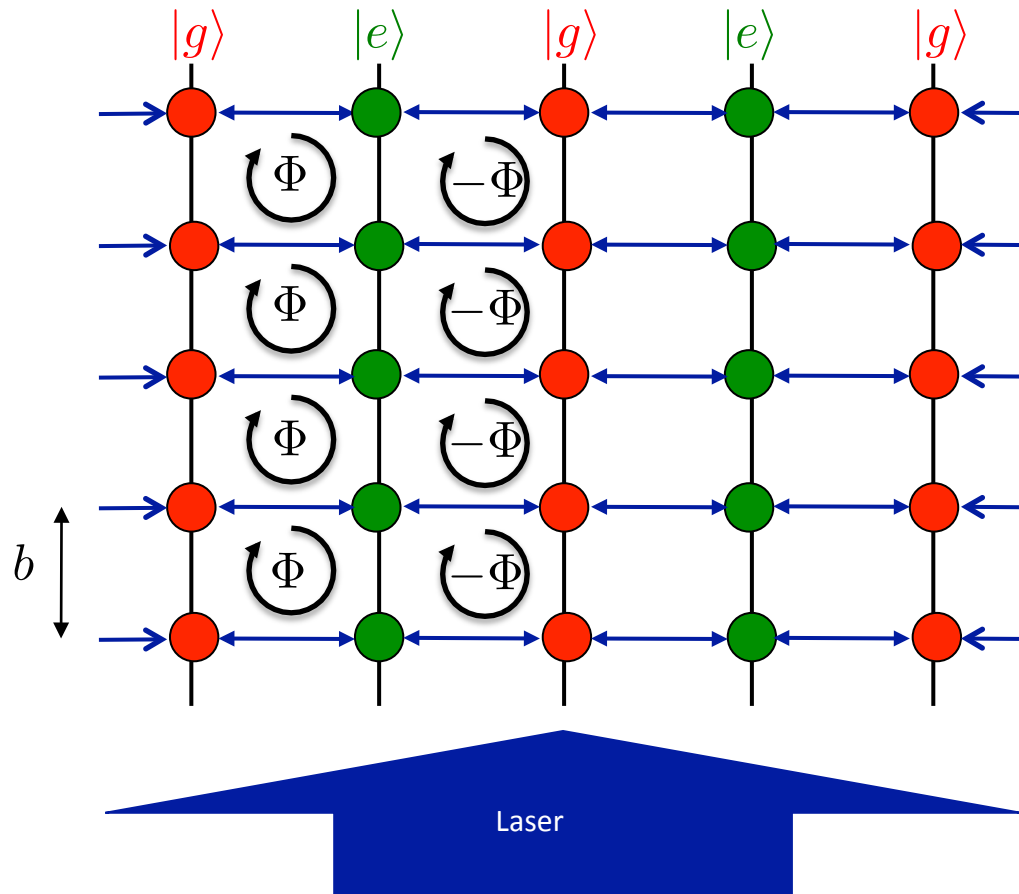
$$\begin{aligned}\Theta &= 0 + (j + 1)kb + 0 - jkb \\ &= kb\end{aligned}$$

$$k = 2\pi/\lambda$$

$$b \sim \lambda$$

$\Theta$  peut prendre des valeurs ajustables entre  $0$  et  $2\pi$ , en contrôlant l'angle du faisceau laser avec l'axe  $y$ .

## Extension à deux dimensions



Flux alterné : sur une ligne donnée, parcourue de gauche à droite, la phase du coefficient tunnel oscille entre

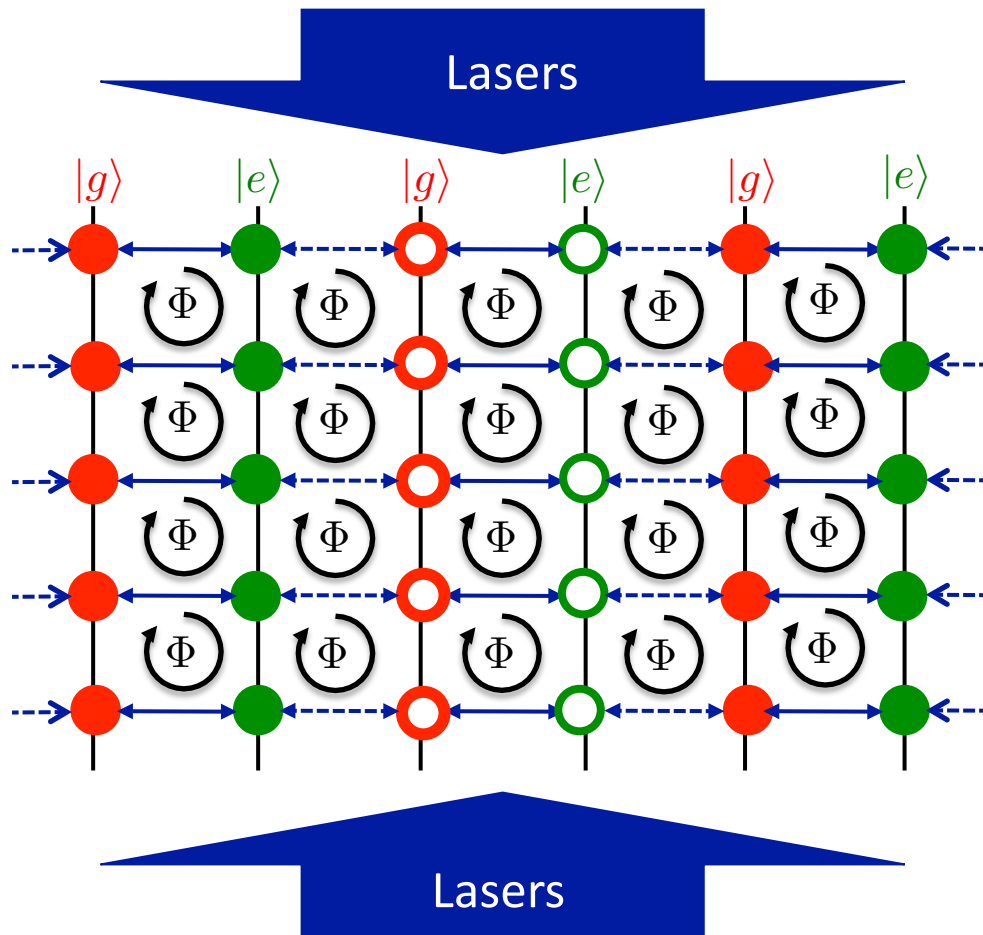
$$+j kb \text{ pour } |g\rangle \rightarrow |e\rangle$$

et

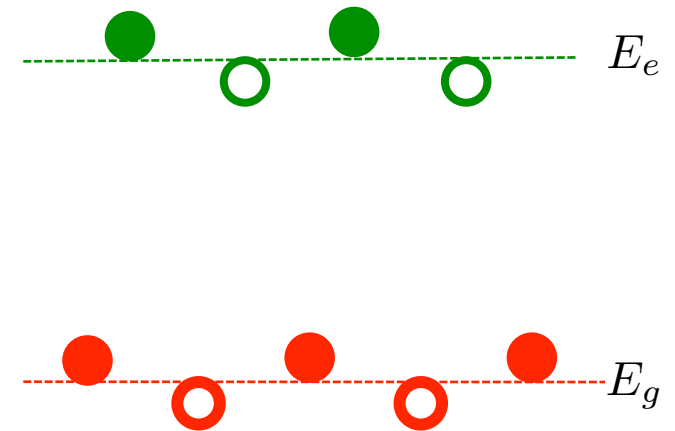
$$-j kb \text{ pour } |e\rangle \rightarrow |g\rangle$$

On peut rectifier ce flux avec des schémas un peu plus compliqués

# Une méthode possible de rectification



Utilisation d'un super-réseau qui décale périodiquement l'énergie des états internes  $|g\rangle$  et  $|e\rangle$



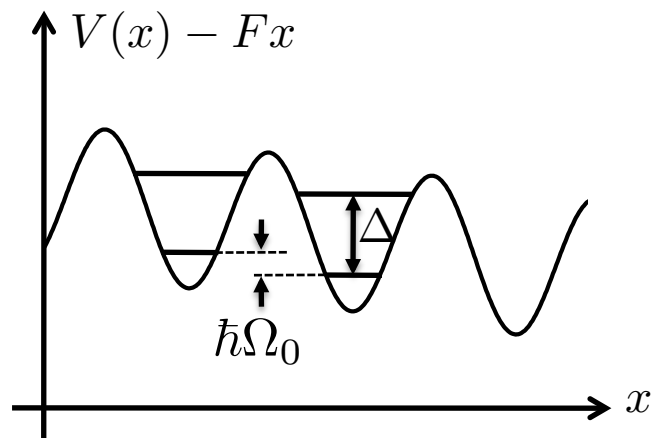
La raie de résonance est clivée en 4 composantes

# Est-ce intéressant de tirer parti des états internes atomiques ?

Les écueils à éviter pour cette simulation du magnétisme sur réseau :

- les transitions vers les bandes supérieures (non prises en compte dans le modèle)
- le chauffage dû aux vibrations

## Pour un réseau tilté + secoué



- pour éviter les transitions interbandes:  $\Omega_0 \ll \Delta$
- pour éviter le chauffage, bonne séparation des échelles de temps :  $\bar{J} \sim J \ll \Omega$

La condition de résonance  $\Omega = \Omega_0$  impose donc  
 $\bar{J} \ll \Omega \ll \Delta$  : très faibles coefficients tunnels...

## Pour un effet tunnel entre états internes différents :

une seule inégalité à satisfaire :  $\bar{J} \sim \kappa \ll \Delta$  , ce qui semble plus favorable...  
*mais les collisions inélastiques entre états internes différents peuvent être problématiques*

# Bilan sur les méthodes pour simuler un magnétisme orbital

But : atteindre une fréquence cyclotron  $\omega_c$  donnée ou un couplage spin-orbite

	Hamiltoniens indépendant du temps	Hamiltoniens dépendant du temps pulsation $\Omega$
Pas d'utilisation d'états internes	Rotation à moment cinétique conservé	$\Omega \sim \omega_c$ : rotation forcée avec agitateur tournant  $\Omega \gg \omega_c$ : réseaux secoués
Utilisation d'états internes	Phase de Berry Réseaux de flux Effet tunnel assisté par laser Couplage spin-orbite	Couplage spin-orbite