

# Le magnétisme artificiel pour les gaz d'atomes froids

Les phénomènes magnétiques jouent un rôle essentiel en physique quantique. Des notions ou des phénomènes aussi variés que l'invariance de jauge, l'effet Hall quantique, le couplage spin-orbite, l'effet Aharonov-Bohm, les isolants topologiques, trouvent leur origine dans l'interaction entre des charges en mouvement et un champ magnétique  $\mathbf{B}$ .

Pour une particule de masse  $M$ , de charge  $q$  et de vitesse  $\mathbf{v}$ , cette interaction se décrit en terme de force de Lorentz  $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  ou alors, de manière équivalente, par l'hamiltonien

$$\hat{H} = \frac{(\hat{\mathbf{p}} - q\mathbf{A}(\hat{\mathbf{r}}))^2}{2M},$$

où  $\mathbf{A}$  est le potentiel vecteur dont dérive le champ magnétique  $\mathbf{B}$ . L'étude du magnétisme avec des atomes froids constitue un volet important du programme général de simulation quantique basé sur ces nouveaux gaz. Mais la neutralité électrique des atomes ( $q = 0$ ) nécessite de recourir à des « artifices » - par exemple des faisceaux lumineux de fréquences et de directions bien choisies - pour atteindre des situations équivalentes à celles rencontrées pour les fluides d'électrons de la matière ordinaire.

Le cours et les séminaires de cette année feront le point sur cette recherche très active, tant sur le plan théorique qu'expérimental. Le déroulement du cours, composé de sept séances, sera le suivant :

- Le premier cours sera consacré aux bases de la description du mouvement d'une particule dans un champ magnétique. Partant de la force de Lorentz, nous en déduisons l'approche hamiltonienne à ce problème ainsi que la notion d'invariance de jauge, à la fois sur le plan de l'électrodynamique et sur celui de la mécanique quantique. Nous illustrerons ces concepts en discutant l'effet Aharonov-Bohm ainsi que les conséquences de l'existence possible de monopoles magnétiques.

- Le deuxième cours sera consacré à l'étude du mouvement quantique d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme. Nous discuterons en particulier la forme du spectre d'énergie, quantifié sous forme de niveaux de Landau. Nous en déduisons la notion d'états de bord, qui joue un rôle crucial pour interpréter l'effet Hall quantique.
- Le cours 3 sera consacré à la notion de phase de Berry et de potentiels de jauge géométriques. Nous partirons de l'approximation adiabatique pour montrer comment la phase de Berry apparaît, et nous ferons ensuite le lien avec la notion de transport parallèle. Nous terminerons par une approche à la Born-Oppenheimer pour une particule à plusieurs états internes, pour laquelle les potentiels de jauge géométriques, vectoriels et scalaires, apparaissent explicitement dans une équation de Schrödinger réduite à un seul de ces états internes.
- Les cours 4 et 5 décriront deux approches possibles à la simulation du magnétisme avec des gaz d'atomes froids : mise en rotation du gaz ou utilisation de phases géométriques induite par la lumière. Nous décrirons plusieurs expériences récentes sur ce domaine et nous discuterons les limites issues du chauffage par l'émission spontanée de photons quand le champ de jauge est induit par un faisceau lumineux. Nous aborderons également la réalisation d'un couplage spin-orbite, à la fois à une et deux dimensions.
- Le cours 6 sera consacré à la simulation du magnétisme sur réseau. Nous discuterons d'abord ses caractéristiques principales, comme la structure fractale du spectre connue sous le nom de papillon de Hofstadter. Nous passerons ensuite en revue différentes techniques, comme les réseaux « secoués » ou l'effet tunnel assisté par laser entre états internes différents, permettant de simuler ce magnétisme pour des atomes piégés dans un réseau optique.

– Pour finir, le cours 7 abordera l'effet simultané du magnétisme orbital et des interactions entre atomes. Nous nous intéresserons essentiellement aux systèmes décrits par une fonction d'onde macroscopique, dans lesquels des vortex peuvent être nucléés. Nous montrerons comment ces vortex s'arrangent en réseaux réguliers (*réseaux d'Abrikosov*) et nous terminerons par quelques éléments sur la physique susceptible d'apparaître à très grand champ, avec l'émergence d'états fortement corrélés rappelant ceux de l'effet Hall quantique.

# Chapitre 1

## Le magnétisme d'une particule ponctuelle

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Quelques éléments de magnétostatique . . . . .</b>	<b>4</b>
1-1	Équations de la magnétostatique . . . . .	4
1-2	Le potentiel vecteur . . . . .	4
1-3	Exemples . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Particule classique dans un champ magnétique . . . . .</b>	<b>7</b>
2-1	Force de Lorentz et mouvement cyclotron . . . . .	7
2-2	Equations de Euler–Lagrange . . . . .	7
2-3	Lagrangien dans un champ magnétique . . . . .	8
2-4	Le principe d'une théorie de jauge . . . . .	8
2-5	Hamiltonien dans un champ magnétique . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Particule quantique dans un champ magnétique . . . . .</b>	<b>9</b>
3-1	Quantification canonique . . . . .	9
3-2	Transformation de jauge pour la mécanique quantique . . . . .	10
3-3	Hamiltonien quantique . . . . .	10
3-4	Invariance de jauge quantique + électromagnétique . . . . .	10
<b>4</b>	<b>L'effet Aharonov–Bohm . . . . .</b>	<b>11</b>
4-1	L'argument de Aharonov et Bohm . . . . .	12
4-2	Argument fondé sur l'intégrale de chemin . . . . .	13
4-3	Mise en évidence expérimentale . . . . .	14
<b>5</b>	<b>Monopole magnétique et physique quantique . . . . .</b>	<b>14</b>

---

5-1	Quantification de la charge électrique . . . . .	15
5-2	Simulation d'un monopole dans un condensat . . . . .	16

---

Dans ce premier chapitre, nous allons d'abord rappeler les éléments clés du magnétisme, d'abord du point des champs magnétiques eux-mêmes via les équations de Maxwell, puis du point de vue du mouvement de particules chargées. Nous aborderons successivement le formalisme classique (dynamique newtonienne), puis le formalisme quantique. Dans ce dernier cas, nous insisterons sur la notion de changement de jauge, à la fois du point de vue du champ électromagnétique et du point de vue de la formulation quantique du mouvement des particules.

Dans la deuxième partie de ce chapitre, nous présenterons deux illustrations de ce formalisme : nous analyserons l'effet Aharonov–Bohm, qui donne un nouvel éclairage sur la notion de potentiel vecteur et qui permet d'introduire le concept de phase géométrique, qui jouera un rôle essentiel dans le suite de ce cours. Nous discuterons également brièvement la notion de monopole magnétique, en reprenant un argument fameux de Dirac sur le lien entre l'éventuelle existence de ces monopoles et la quantification de la charge électrique (Dirac 1931; Dirac 1948). Nous terminerons par la présentation très brève d'une expérience récente simulant un tel monopole au sein d'un condensat de Bose–Einstein.

Nous n'allons pas aborder dans ce premier chapitre le problème important du mouvement quantique d'une particule chargée dans un champ magnétique, avec la structure en niveaux de Landau qui joue un rôle crucial dans les phénomènes liés au magnétisme orbital, comme l'effet Hall quantique. Ce développement fera l'objet du chapitre 2.

## 1 Quelques éléments de magnétostatique

Nous commencerons ce chapitre par des rappels de magnétostatique : partant des équations de base vérifiées par le champ magnétique  $\mathbf{B}$  dans le cas indépendant du temps, notre but est d'introduire la notion de potentiel vecteur  $\mathbf{A}$  et de discuter quelques exemples de géométries pertinentes pour la suite.

### 1-1 Équations de la magnétostatique

Nous nous intéressons ici au cas d'un champ magnétique  $\mathbf{B}$  indépendant du temps, mais dépendant de la position  $\mathbf{r}$ . Ce champ se calcule en fonction des courants imposés de l'extérieur à partir des deux équations de la magnétostatique. Ces équations peuvent être vues comme un cas particulier des équations de Maxwell pour un champ électromagnétique indépendant du temps.

La première équation de la magnétostatique s'écrit

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.1)$$

et traduit l'absence de charge (monopole) magnétique : le flux de  $\mathbf{B}$  à travers une surface fermée est toujours nul<sup>1</sup>.

La seconde équation relie le champ  $\mathbf{B}$  aux courants créant ce champ

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}, \quad (1.2)$$

1. Nous reviendrons sur les conséquences de l'existence éventuelle de monopoles magnétiques. Sur le plan formel, notons par ailleurs qu'une manière plus correcte de décrire les particules connues consiste à dire qu'elles ont toutes le même rapport *charge électrique/charge magnétique*. Une rotation dans les espaces abstraits  $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}$  et  $\{\mathbf{D}, \mathbf{B}\}$  permet alors de se ramener à la formulation courante, que nous utilisons ici [Jackson (1998), Chap. 6, § 6.11]

où on a (éventuellement) inclus dans  $\mathbf{j}$  les « courants microscopiques » résultant du magnétisme des milieux matériels.

**Remarque :** Ces deux équations sont à mettre en regard de celles déterminant le champ électrique en électrostatique,

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_{\text{elec.}}(\mathbf{r})}{\epsilon_0}, \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0, \quad (1.3)$$

où  $\rho_{\text{elec.}}(\mathbf{r})$  est la densité de charge électrique au point  $\mathbf{r}$ .

### 1-2 Le potentiel vecteur

La première équation de la magnétostatique,  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ , vient mettre une contrainte forte sur la forme possible des champs de vecteurs  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  que l'on peut réaliser. Pour rendre compte de manière simple de cette contrainte, on peut montrer (lemme de Poincaré) que le champ  $\mathbf{B}$  peut toujours se mettre sous la forme

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}). \quad (1.4)$$

Il est clair que la relation (1.4) ne définit pas le potentiel vecteur  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  de manière unique. Plus précisément, deux potentiels vecteurs  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{A}'$  tels que  $\nabla \times (\mathbf{A}' - \mathbf{A}) = 0$  conduiront au même champ magnétique. Examinons les conséquences de cette équation dans un volume simplement connexe, l'espace entier par exemple ; l'équation  $\nabla \times \mathbf{X}(\mathbf{r}) = 0$  peut se résoudre en  $\mathbf{X}(\mathbf{r}) = \nabla \chi(\mathbf{r})$ , où  $\chi(\mathbf{r})$  est une fonction scalaire de  $\mathbf{r}$ . On en déduit que l'ensemble des potentiels vecteurs associés à un même champ magnétique  $\mathbf{B}$  forme une classe d'équivalence, dont les différents membres sont reliés par une relation du type

$$\mathbf{A}'(\mathbf{r}) = \mathbf{A}(\mathbf{r}) + \nabla \chi(\mathbf{r}). \quad (1.5)$$

Le passage de  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  à  $\mathbf{A}'(\mathbf{r})$  est appelé *changement de jauge* et la fonction  $\chi(\mathbf{r})$  est la *fonction de jauge* associée à ce changement.

### 1-3 Exemples

Nous présentons ci-dessous quelques exemples qui seront utiles pour la suite de ce cours. Nous prendrons la notation  $\{\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y, \mathbf{u}_z\}$  pour désigner un trièdre orthonormé direct de l'espace, avec  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ . Nous utiliserons également les coordonnées cylindriques  $(\rho, \varphi, z)$  et les coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varphi)$  avec dans les deux cas le vecteur unitaire azimuthal  $\mathbf{u}_\varphi = \mathbf{u}_x \cos \varphi + \mathbf{u}_y \sin \varphi$ .

**Exemple 1 : champ  $B$  uniforme.** Considérons un champ magnétique  $B$  uniforme dans l'espace, orienté par convention selon l'axe  $z$ . Un choix possible de potentiel vecteur (jauge symétrique) est

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} -By/2 \\ +Bx/2 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.6)$$

Ce potentiel vecteur peut également s'écrire sous forme vectorielle

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \mathbf{B} \times \mathbf{r}. \quad (1.7)$$

Ce choix de jauge fait jouer des rôles (presque) symétriques aux variables  $x$  et  $y$ , ce qui est satisfaisant compte tenu de la symétrie du problème. En revanche, il brise l'invariance par translation du problème en particulierisant un point de l'espace, l'origine  $O$ , où le potentiel vecteur s'annule.

On utilise souvent le changement de jauge associé à la fonction

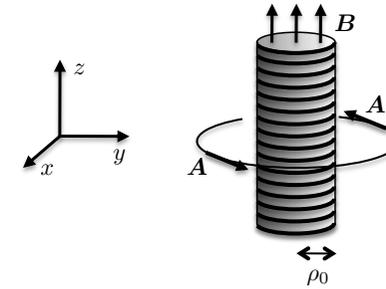
$$\chi(\mathbf{r}) = \frac{B}{2} xy, \quad \nabla \chi = \frac{B}{2} (y \mathbf{u}_x + x \mathbf{u}_y) \quad (1.8)$$

pour obtenir le potentiel vecteur en jauge de Landau<sup>2</sup>

$$\mathbf{A}'(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} 0 \\ +Bx \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.9)$$

Cette forme brise la symétrie entre les axes  $x$  et  $y$ , mais elle est souvent commode pour les calculs en physique quantique, nous y reviendrons dans le prochain chapitre.

2. On peut également prendre la fonction de jauge  $-\chi(\mathbf{r})$  qui conduit à  $\mathbf{A}''(\mathbf{r}) = -By \mathbf{u}_x$ .



**FIGURE 1.1.** Solénoïde infini d'axe  $z$ , conduisant à une champ uniforme à l'intérieur du solénoïde et nul à l'extérieur. Le courant dans ce solénoïde est supposé être orthoradial, parcourant une nappe uniforme de rayon  $r_0$ . Le choix de jauge (1.10) conduit au potentiel vecteur orthoradial indiqué sur la figure.

**Exemple 2 : solénoïde infini.** Considérons maintenant le solénoïde idéal et infini de rayon  $\rho_0$  et d'axe  $z$  représenté sur la figure 1.1. Les deux équations de la magnétostatique, associées à l'invariance par translation le long de l'axe  $z$  et à l'hypothèse que le champ est nul quand  $\rho \rightarrow \infty$  conduisent aux conclusions suivantes :

- À l'intérieur du solénoïde, le champ  $B$  est parallèle à l'axe  $z$  et uniforme (d'amplitude notée ci-dessous  $B_0$ ).
- Le champ  $B$  est nul à l'extérieur du solénoïde.

On peut vérifier que ce champ  $B(\mathbf{r})$  peut être obtenu à partir d'un potentiel vecteur orthoradial  $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = A(\rho) \mathbf{u}_\varphi$  avec, toujours en coordonnées cylindriques :

$$A(\rho) = B_0 \frac{\rho_0^2}{2\rho} \quad \text{si } \rho > \rho_0, \quad A(\rho) = B_0 \frac{\rho}{2} \quad \text{si } \rho < \rho_0. \quad (1.10)$$

On utilise souvent la limite d'un rayon  $\rho_0$  tendant vers 0, la valeur du champ  $B_0$  tendant vers l'infini de manière à garder constant le flux  $\Phi = \pi \rho_0^2 B_0$  du champ magnétique à travers un plan perpendiculaire à l'axe  $z$ . On parle alors d'une *ligne de flux*, correspondant à

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\Phi}{2\pi\rho} \mathbf{u}_\varphi, \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \Phi \delta(x)\delta(y) \mathbf{u}_z. \quad (1.11)$$

On vérifie immédiatement que la circulation de  $\mathbf{A}$  sur n'importe quel cercle centré sur l'axe  $z$  et parallèle au plan  $xy$  vaut  $\Phi$ , tout comme le flux de  $\mathbf{B}$  à travers le disque correspondant. On note également que le potentiel vecteur devient singulier sur l'axe  $z$  pour cette limite d'un solénoïde infiniment fin. Dans ce qui suit, il sera utile d'écrire ce même potentiel vecteur en coordonnées sphériques :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\Phi}{2\pi} \frac{1}{r \sin \theta} \mathbf{u}_\varphi. \quad (1.12)$$

**Exemple 3 : monopole magnétique!** Le potentiel vecteur a été introduit pour rendre compte de la contrainte  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ , traduisant l'absence de charges magnétiques. Si l'on accepte de travailler avec un potentiel vecteur présentant des singularités similaires à celle qui apparaît dans le cas du solénoïde infiniment étroit [eq. (1.12)], on peut malgré tout (presque) décrire un monopole magnétique isolé à l'aide de ce potentiel vecteur.

Considérons le potentiel vecteur en coordonnées sphériques

$$\mathbf{A}_m^{(1)}(\mathbf{r}) = \frac{q_m}{4\pi} \frac{1 - \cos \theta}{r \sin \theta} \mathbf{u}_\varphi. \quad (1.13)$$

Ce potentiel est défini en tout point de l'espace sauf sur la partie négative de l'axe  $z$ , pour laquelle  $\theta = \pi$ . Si on applique les formules standard de dérivation pour calculer  $\nabla \times \mathbf{A}_{m,1}$ , valables *a priori* en dehors de la singularité du demi-axe  $z < 0$ , on trouve

$$B_r = (\nabla \times \mathbf{A})_r = \frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial(A_\varphi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right) = \frac{q_m}{4\pi r^2} \quad (1.14)$$

$$B_\theta = (\nabla \times \mathbf{A})_\theta = \frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \sin \theta \frac{\partial(r A_\varphi)}{\partial r} \right) = 0 \quad (1.15)$$

$$B_\varphi = (\nabla \times \mathbf{A})_\varphi = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (1.16)$$

Il semble donc que nous ayons réussi à générer le champ magnétique d'un monopole

$$\mathbf{B}_m = \frac{q_m}{4\pi r^2} \mathbf{u}_r \quad (1.17)$$

à partir de l'équation  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ , ce qui semble paradoxal! La solution de ce paradoxe apparaît quand on calcule la circulation de  $\mathbf{A}$  sur un petit

cercle d'axe  $z$ , de rayon  $r \sin \theta$ ; on trouve

$$\oint (\mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_\varphi) d\varphi = \frac{q_m}{2} (1 - \cos \theta). \quad (1.18)$$

Quand on fait tendre le rayon du cercle vers 0, on trouve une circulation nulle pour un cercle situé sur le demi-axe  $z > 0$  ( $\theta \rightarrow 0$ ) et une circulation égale à  $q_m$  pour un cercle situé sur le demi-axe  $z < 0$  ( $\theta \rightarrow \pi$ ). Ceci signifie qu'en plus du champ monopolaire (1.17), le potentiel vecteur (1.13) engendre un champ parallèle à l'axe  $z$  et localisé sur le demi-axe  $z < 0$ , comme celui du solénoïde considéré précédemment. Le champ magnétique total associé au potentiel vecteur (1.13) est donc

$$\mathbf{B}^{(1)}(\mathbf{r}) = \frac{q_m}{4\pi r^2} \mathbf{u}_r + q_m \Theta(-z) \delta(x) \delta(y) \mathbf{u}_z, \quad (1.19)$$

où  $\Theta(z)$  est la fonction de Heaviside<sup>3</sup>. On dit qu'au monopole de charge  $q_m$  est attachée une *corde de Dirac*, partant du point où se trouve le monopole ( $r = 0$ ) et s'étendant jusqu'en  $z = -\infty$ .

On peut également considérer le potentiel vecteur

$$\mathbf{A}_m^{(2)}(\mathbf{r}) = -\frac{q_m}{4\pi} \frac{1 + \cos \theta}{r \sin \theta} \mathbf{u}_\varphi. \quad (1.20)$$

qui présente une singularité sur le demi-axe  $z > 0$ . Le champ magnétique correspondant contient le même monopole que (1.19), mais la ligne de singularité est inversée :

$$\mathbf{B}^{(2)}(\mathbf{r}) = \frac{q_m}{4\pi r^2} \mathbf{u}_r - q_m \Theta(z) \delta(x) \delta(y) \mathbf{u}_z. \quad (1.21)$$

Notons que le potentiel vecteur (1.13) peut être obtenu en pratique en considérant une chaîne de dipôles magnétiques alignés le long du demi-axe  $z < 0$  (figure 1.1b) ou encore un solénoïde semi-infini et de rayon arbitrairement petit (figure 1.1c) (Jackson 1998). Pour (1.20), la chaîne de dipôle s'étend le long du demi-axe  $z > 0$ , depuis  $z = 0$  jusqu'à  $z = +\infty$ .

Remarquons également que la différence entre les deux potentiels vecteurs  $\mathbf{A}_m^{(1)}$  et  $\mathbf{A}_m^{(2)}$  est exactement égale au potentiel vecteur proposé en

3.  $\Theta(z) = 1$  si  $z > 0$ ,  $\Theta(z) = 0$  si  $z < 0$ ,  $\Theta(0) = 1/2$ .

(1.12) pour rendre compte d'un solénoïde infini, avec  $\Phi = q_m$ , ce qui est accord avec le fait que ces potentiels vecteurs correspondent chacun à un solénoïde semi-infini, l'un selon  $z > 0$ , l'autre selon  $z < 0$ , avec des courants tournant dans des sens opposés. Ceci montre que  $\mathbf{A}_m^{(1)}$  et  $\mathbf{A}_m^{(2)}$  ne sont pas reliés par une transformation de jauge, au moins sur tout l'espace  $R^3$ , puisque  $\mathbf{A}_m^{(1)} - \mathbf{A}_m^{(2)} \neq \nabla\chi$ . Nous verrons un peu plus loin comment Dirac a exploité ce point pour déduire la quantification de la charge électrique à partir de l'éventuelle existence d'un monopole magnétique.

## 2 Particule classique dans un champ magnétique

Nous passons maintenant à la description du mouvement d'une particule ponctuelle chargée, décrite par la mécanique classique, dans un champ magnétique  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ . Dans tout ce qui suit, nous nous limiterons au cas non relativiste, la vitesse des particules matérielles étant supposée très petite devant la vitesse de la lumière.

### 2-1 Force de Lorentz et mouvement cyclotron

Notons  $M$  la masse de la particule et  $q$  sa charge. Notre point de départ sera la force de Lorentz qui agit sur la particule de vitesse  $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}$  :

$$\mathbf{F}_L = q \mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad (1.22)$$

conduisant à l'équation du mouvement

$$M\ddot{\mathbf{r}} = q \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}. \quad (1.23)$$

**Cas particulier.** Si le champ  $\mathbf{B}$  est uniforme, c'est-à-dire indépendant du point de l'espace considéré, le mouvement de la particule dans le plan perpendiculaire à  $\mathbf{B}$  est circulaire uniforme (mouvement cyclotron), de pulsation

$$\omega_c = qB/M. \quad (1.24)$$

Le mouvement est rectiligne uniforme le long de l'axe du champ  $\mathbf{B}$ .

Pour préparer le terrain pour la description quantique, nous allons maintenant exprimer la loi fondamentale de la dynamique (1.23) dans le cadre des formalismes lagrangien et hamiltonien.

### 2-2 Equations de Euler-Lagrange

Pour une particule ponctuelle, le formalisme lagrangien revient à se donner une fonction  $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$  pour décrire la dynamique de la particule. À partir de cette fonction de Lagrange (ou *lagrangien*), on calcule pour toute trajectoire continue dans l'espace  $(\mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t))$  l'action

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L[\mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t), t] dt. \quad (1.25)$$

On pose que la trajectoire effectivement suivie par la particule pour aller du point de départ  $\mathbf{r}(t_1)$  au point d'arrivée  $\mathbf{r}(t_2)$  est celle qui minimise l'action. Ce principe variationnel conduit aux équations d'Euler-Lagrange :

$$\frac{\partial L}{\partial r_i} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} \right), \quad r_i = x, y, z. \quad (1.26)$$

Une remarque importante pour ce qui va suivre est la constatation suivante : si on ajoute à un lagrangien donné une dérivée totale par rapport au temps

$$L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) \longrightarrow L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) + \frac{d}{dt}\Omega(\mathbf{r}, t), \quad (1.27)$$

les équations de Euler-Lagrange correspondantes ne sont pas modifiées. En effet

$$\frac{d}{dt}\Omega(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial \Omega}{\partial t} + \sum_{j=x,y,z} \dot{r}_j \frac{\partial \Omega}{\partial r_j} \quad (1.28)$$

ce qui conduit à ajouter la même quantité

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial t \partial r_i} + \sum_{j=x,y,z} \dot{r}_j \frac{\partial^2 \Omega}{\partial r_i \partial r_j} \quad (1.29)$$

aux deux membres de l'équation (1.26).

### 2-3 Lagrangien dans un champ magnétique

Pour une particule libre, en absence de champ magnétique, le mouvement est rectiligne uniforme et correspond au choix

$$L_{\text{libre}}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = \frac{1}{2}M\dot{\mathbf{r}}^2. \quad (1.30)$$

En présence d'un champ magnétique  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ , y a-t-il un lagrangien qui permet de retrouver l'équation du mouvement (1.23)? La réponse est (multiplement) positive : pour tout potentiel vecteur  $\mathbf{A}$  associé au champ magnétique  $\mathbf{B}$ , on peut considérer

$$L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = \frac{1}{2}M\dot{\mathbf{r}}^2 + q\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) \quad (1.31)$$

et vérifier que les équations de Euler-Lagrange sont bien identiques à (1.23).

Le fait de retrouver l'équation du mouvement (1.23) garantit que le choix (1.31), bien que faisant intervenir explicitement de la jauge, ne conduit pas à des prédictions qui dépendraient de ce choix de jauge. C'est bien sûr essentiel et on peut chercher à prouver ce résultat sans passer par l'écriture explicite des équations de Euler-Lagrange. Considérons un changement de jauge

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) \longrightarrow \mathbf{A}'(\mathbf{r}) = \mathbf{A}(\mathbf{r}) + \nabla\chi(\mathbf{r}), \quad (1.32)$$

correspondant au changement de lagrangien

$$L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) \longrightarrow L_{\chi}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) + q\dot{\mathbf{r}} \cdot \nabla\chi(\mathbf{r}). \quad (1.33)$$

On constate immédiatement que les deux lagrangiens  $L$  et  $L_{\chi}$  diffèrent d'une dérivée totale par rapport au temps

$$L_{\chi}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) + \frac{d}{dt}\Omega(\mathbf{r}) \quad \text{avec} \quad \Omega(\mathbf{r}) = q\chi(\mathbf{r}), \quad (1.34)$$

et ils doivent conduire effectivement aux mêmes équations du mouvement.

### 2-4 Le principe d'une théorie de jauge

On peut inverser le fil du raisonnement précédent, en se mettant à la place d'un physicien n'ayant jamais entendu parler de force de Lorentz, mais très imaginaire. Partant du lagrangien d'une particule libre (1.30),  $L = M\dot{\mathbf{r}}^2/2$ , ce physicien peut tirer parti de l'invariance des équations du mouvement par ajout d'une dérivée totale par rapport au temps. Cette invariance lui garantit que tous les lagrangiens du type

$$L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = \frac{1}{2}M\dot{\mathbf{r}}^2 + q\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) \quad (1.35)$$

avec le champ de vecteurs  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  tel que

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \nabla\chi(\mathbf{r}), \quad (1.36)$$

décriront également le mouvement d'une particule libre. À ce stade, il s'est contenté de compliquer un peu gratuitement le formalisme dont il dispose, mais il peut alors se poser la question suivante : quel type de système physique obtiendra-t-il s'il généralise le problème en considérant des lagrangiens du type (1.35), mais en ignorant la contrainte (1.36)? La réponse est immédiate compte tenu de ce qui précède : il inventera/découvrira le magnétisme orbital, c'est-à-dire le mouvement d'une particule de charge  $q$  dans un champ magnétique, avec  $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})$ .

### 2-5 Hamiltonien dans un champ magnétique

Le passage du formalisme lagrangien au formalisme hamiltonien se fait en définissant d'abord les moments canoniques

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i}, \quad (1.37)$$

puis en considérant la transformation de Legendre

$$H(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{r}} - L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t), \quad (1.38)$$

où la vitesse  $\dot{\mathbf{r}}$  est supposée être exprimée en fonction du moment  $\mathbf{p}$  par inversion de (1.37). Le mouvement de la (ou les) particule(s) est alors déterminé par les équations de Hamilton

$$\dot{r}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial r_i}. \quad (1.39)$$

Pour le lagrangien d'une particule chargée dans un champ magnétique proposé en (1.31), le moment conjugué vaut

$$\mathbf{p} = \nabla_{\dot{\mathbf{r}}} L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = M\dot{\mathbf{r}} + q\mathbf{A}(\mathbf{r}) \quad (1.40)$$

et l'hamiltonien s'écrit donc, après réarrangement des termes :

$$H(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \frac{(\mathbf{p} - q\mathbf{A}(\mathbf{r}))^2}{2M}. \quad (1.41)$$

On pourra vérifier que les équations de Hamilton (1.39) redonnent alors bien l'équation fondamentale de la dynamique (1.23) dont nous sommes partis.

On constate immédiatement que le *moment canonique*  $\mathbf{p}$  donné en (1.40), encore appelé *impulsion* ou *impulsion généralisée*, n'est pas une quantité physique indépendante de la jauge. Ce moment est notamment différent de la *quantité de mouvement*

$$\boldsymbol{\pi} = M\dot{\mathbf{r}}, \quad (1.42)$$

puisque

$$\mathbf{p} = \boldsymbol{\pi} + q\mathbf{A}(\mathbf{r}). \quad (1.43)$$

Cette distinction est le prix à payer pour obtenir une force dépendant de la vitesse dans le formalisme hamiltonien.

### 3 Particule quantique dans un chp. magnétique

#### 3-1 Quantification canonique

L'intérêt du formalisme hamiltonien classique est qu'il se prête bien au passage à la mécanique quantique, par l'intermédiaire de la règle de quantification canonique dans laquelle la position  $\mathbf{r}$  et l'impulsion  $\mathbf{p}$  deviennent des opérateurs  $\hat{\mathbf{r}}$  et  $\hat{\mathbf{p}}$  obéissant à

$$[\hat{r}_j, \hat{r}_k] = 0, \quad [\hat{r}_j, \hat{p}_k] = i\hbar \delta_{j,k}, \quad [\hat{p}_j, \hat{p}_k] = 0. \quad (1.44)$$

Commençons par rappeler comment ces relations de quantification viennent imposer une forme bien particulière de l'action des opérateurs

position  $\hat{\mathbf{r}}$  et impulsion  $\hat{\mathbf{p}}$  sur les fonctions d'onde (Dirac 1958). À ce stade, nous ne supposons rien sur la présence ou l'absence d'un champ magnétique.

Considérons une particule ponctuelle dont l'état est décrit par une fonction d'onde complexe  $\psi(\mathbf{r})$ , donnant la densité de probabilité de présence  $\mathcal{P}(\mathbf{r})$  au point  $\mathbf{r}$  :

$$\mathcal{P}(\mathbf{r}) = |\psi(\mathbf{r})|^2. \quad (1.45)$$

Il s'agit de déterminer l'action des opérateurs  $\hat{\mathbf{r}}$  et  $\hat{\mathbf{p}}$  sur cette fonction d'onde, compte tenu des relations (1.44).

On pose par convention que l'action de l'opérateur position  $\hat{\mathbf{r}}$  sur  $\psi(\mathbf{r})$  est la multiplication par la variable  $\mathbf{r}$  elle-même :

$$\hat{\mathbf{r}}[\psi(\mathbf{r})] = \mathbf{r} \psi(\mathbf{r}), \quad (1.46)$$

ce qui satisfait bien sûr la première relation de commutation  $[\hat{r}_j, \hat{r}_k] = 0$  de (1.44). La deuxième relation de commutation, qui relie les composantes de  $\hat{\mathbf{r}}$  et  $\hat{\mathbf{p}}$ , entraîne alors que

$$\hat{r}_j \hat{p}_k [\psi(\mathbf{r})] = \hat{p}_k [r_j \psi(\mathbf{r})] + i\hbar \delta_{j,k} \psi(\mathbf{r}), \quad (1.47)$$

dont la solution est

$$\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar \nabla + \mathbf{X}(\mathbf{r}), \quad (1.48)$$

où  $\mathbf{X}(\mathbf{r})$  est à ce stade un champ de vecteur quelconque. Enfin la troisième relation de commutation  $[\hat{p}_j, \hat{p}_k] = 0$  vient imposer une contrainte sur le champ de vecteur  $\mathbf{X}$  avec

$$\frac{\partial X_j}{\partial x_k} = \frac{\partial X_k}{\partial x_j} \Rightarrow \nabla \times \mathbf{X} = 0 \Rightarrow \mathbf{X} = \nabla \Omega(\mathbf{r}), \quad (1.49)$$

où  $\Omega$  est une fonction scalaire quelconque de  $\mathbf{r}$ . La règle de quantification canonique revient donc à imposer l'action des opérateurs  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{p}$  sur une fonction d'onde :

$$\hat{\mathbf{r}}[\psi(\mathbf{r})] = \mathbf{r} \psi(\mathbf{r}), \quad (1.50)$$

$$\hat{\mathbf{p}}[\psi(\mathbf{r})] = -i\hbar \nabla \psi(\mathbf{r}) + (\nabla \Omega(\mathbf{r})) \psi(\mathbf{r}). \quad (1.51)$$

### 3-2 Transformation de jauge pour la mécanique quantique

Le choix de la fonction  $\Omega$  dans (1.51) est arbitraire, mais sans conséquence physique (Dirac 1958). En effet, pour un choix donné de  $\Omega$ , on peut introduire la transformation unitaire, appelée *transformation de jauge* (et non reliée à ce stade à un changement de jauge électromagnétique)

$$\psi(\mathbf{r}) \longrightarrow \hat{T}\psi(\mathbf{r}), \quad \text{avec} \quad \hat{T} = \exp[i\Omega(\hat{\mathbf{r}})/\hbar], \quad (1.52)$$

qui ne modifie pas la densité de probabilité  $\mathcal{P}(\mathbf{r})$ . Dans cette transformation, les opérateurs  $\hat{\mathbf{r}}$  et  $\hat{\mathbf{p}}$  deviennent

$$\hat{\mathbf{r}} \longrightarrow \hat{\mathbf{r}} = \hat{T}\hat{\mathbf{r}}\hat{T}^\dagger = \hat{\mathbf{r}}, \quad (1.53)$$

$$\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\nabla + \nabla\Omega(\mathbf{r}) \longrightarrow \hat{\mathbf{p}} = \hat{T}\hat{\mathbf{p}}\hat{T}^\dagger = -i\hbar\nabla, \quad (1.54)$$

ce qui élimine la fonction  $\Omega$ . Dans toute la suite (qu'un champ magnétique soit présent ou non), on supposera cette transformation effectuée et on prendra donc la convention habituelle

$$\hat{\mathbf{r}}[\psi(\mathbf{r})] = \mathbf{r}\psi(\mathbf{r}), \quad \hat{\mathbf{p}}[\psi(\mathbf{r})] = -i\hbar\nabla\psi(\mathbf{r}). \quad (1.55)$$

### 3-3 Hamiltonien quantique

Une fois construits les opérateurs  $\hat{\mathbf{r}}$  et  $\hat{\mathbf{p}}$ , on peut en déduire l'opérateur associé à toute quantité physique dépendant de la position et de l'impulsion, en particulier l'hamiltonien d'une particule de charge électrique  $q$  en présence d'un champ magnétique statique

$$\hat{H} = \frac{(\hat{\mathbf{p}} - q\mathbf{A}(\hat{\mathbf{r}}))^2}{2M} = \frac{(-i\hbar\nabla - q\mathbf{A}(\mathbf{r}))^2}{2M}. \quad (1.56)$$

C'est la forme que nous utiliserons dans tout ce cours et que nous allons en particulier chercher à simuler pour des particules non chargées électriquement.

Comme son équivalent classique, cette écriture dépend explicitement de la jauge choisie pour déterminer le potentiel vecteur. Considérons une fonction d'onde  $\psi(\mathbf{r}, t)$  solution de l'équation de Schrödinger

$$i\hbar\frac{\partial\psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \frac{(-i\hbar\nabla - q\mathbf{A}(\mathbf{r}))^2}{2M}\psi(\mathbf{r}, t). \quad (1.57)$$

Un changement de jauge électromagnétique

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) \longrightarrow \mathbf{A}'(\mathbf{r}) = \mathbf{A}(\mathbf{r}) + \nabla\chi(\mathbf{r}), \quad (1.58)$$

va modifier l'hamiltonien et  $\psi(\mathbf{r}, t)$  ne sera plus solution de l'équation de Schrödinger écrite avec le potentiel vecteur  $\mathbf{A}'$ . En revanche, si on accompagne ce changement de jauge électromagnétique de la transformation de jauge quantique similaire à (1.52)

$$\psi(\mathbf{r}, t) \longrightarrow \psi'(\mathbf{r}, t) = \hat{T}\psi(\mathbf{r}, t), \quad \text{avec} \quad \hat{T} = \exp[iq\chi(\hat{\mathbf{r}})/\hbar], \quad (1.59)$$

alors la fonction d'onde  $\psi'(\mathbf{r}, t)$  que l'on obtient est bien solution de l'équation de Schrödinger pour le potentiel vecteur  $\mathbf{A}'$  :

$$i\hbar\frac{\partial\psi'}{\partial t} = \frac{(-i\hbar\nabla - q\mathbf{A}'(\mathbf{r}))^2}{2M}\psi'(\mathbf{r}, t). \quad (1.60)$$

Ceci montre le lien profond entre la symétrie de jauge de l'équation de Schrödinger, exprimée par la transformation unitaire (1.52), et l'invariance de jauge des équations de Maxwell considérées ici sur le plan de la magnétostatique (Cohen-Tannoudji et al. (1973), chapitre 3, complément H<sub>III</sub>).

### 3-4 Invariance de jauge quantique + électromagnétique

On peut inverser la démarche précédente pour arriver à une formulation de la mécanique quantique dans laquelle le magnétisme (ou l'électromagnétisme) apparaît naturellement via l'ajout d'une condition de symétrie de jauge locale. Nous avons déjà esquissé ce raisonnement dans le cadre classique (§ 2-4) et nous le transposons ici au cadre quantique.

Considérons une particule libre, de masse  $M$ , de charge  $q$  et de fonction d'onde  $\psi(\mathbf{r}, t)$  solution de l'équation de Schrödinger

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \hat{H}\psi \quad (1.61)$$

sans donner la forme de  $\hat{H}$  à ce stade. Imposons uniquement la condition supplémentaire suivante, correspondant à la symétrie de jauge locale<sup>4</sup> :

4. Nous ne faisons pas ici de transformation équivalente sur les observables, sinon l'unitarité de la mécanique quantique rendrait cette transformation triviale.

La physique doit rester la même si on fait la transformation de jauge

$$\psi \rightarrow \tilde{\psi} = \hat{T}\psi \quad \text{avec} \quad \hat{T} = \exp[iq\chi(\hat{\mathbf{r}})/\hbar]. \quad (1.62)$$

Clairement, le choix

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\hat{\mathbf{r}}) \quad (1.63)$$

ne convient car l'équation satisfaite par  $\tilde{\psi}$  ne fera pas intervenir un hamiltonien gardant la même structure. En revanche, il est clair d'après ce qui précède que le choix générique

$$\hat{H} = \frac{(-i\hbar\nabla - q\mathbf{A}(\mathbf{r}))^2}{2m} + V(\mathbf{r}) \quad (1.64)$$

associé à la modification de  $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{r}) + \nabla\chi(\mathbf{r}) \quad (1.65)$$

convient.

Pour assurer cette symétrie de jauge locale, il est suffisant de se limiter à des potentiels vecteurs  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  égaux au gradient d'une fonction scalaire  $\Omega(\mathbf{r})$ . Mais le physicien imaginatif évoqué plus haut peut s'interroger sur ce qui se produit si on étend ce choix d'hamiltonien « généralisé » à un potentiel vecteur  $\mathbf{A}$  quelconque (pas nécessairement de rotationnel nul). La réponse est là encore simple : notre physicien découvrira le magnétisme orbital quantique !

## 4 L'effet Aharonov-Bohm

Dans leur célèbre article de 1959, intitulé *Significance of Electromagnetic Potentials in the Quantum Theory*<sup>5</sup>, Aharonov et Bohm ont proposé une ex-

5. Le point qui nous intéresse ici est le fait que les champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  sont tous deux nuls dans la région accessible aux particules, révélant ainsi l'importance des potentiels de jauge. Des variantes de cet effet relâchent une partie de ces contraintes, comme l'effet Aharonov-Casher où la présence d'un champ électrostatique modifie par une phase géométrique la fonction d'onde d'un dipôle magnétique (Aharonov & Casher 1984).

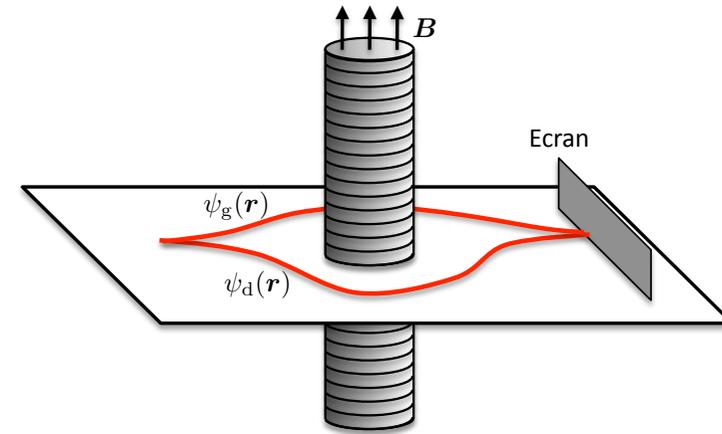


FIGURE 1.2. Géométrie envisagée par Aharonov et Bohm.

périence de pensée qui met en évidence un fait remarquable<sup>6</sup> : on peut détecter la présence d'un champ magnétique par des mesures faites sur des particules quantiques, même si ces particules ne sont jamais trouvées dans des régions où  $\mathbf{B}(\mathbf{r}) \neq 0$  (Aharonov & Bohm 1959).

La géométrie proposée par Aharonov et Bohm utilise le solénoïde infini déjà considéré en (1-3), que l'on place au milieu d'un interféromètre à deux voies situé dans le plan  $xy$ . Le solénoïde lui-même est entouré d'une barrière de potentiel de sorte que les particules n'y pénètrent pas ; l'interférence observée sur l'écran de détection résulte donc de la superposition des deux ondes  $\psi_g(\mathbf{r})$  et  $\psi_d(\mathbf{r})$ , passées respectivement à gauche et à droite du solénoïde. Le résultat crucial est que la figure d'interférence n'est pas la même selon qu'un courant circule ou non dans le solénoïde, bien que le champ magnétique dans la région accessible aux particules (l'extérieur du solénoïde) soit nul dans les deux cas.

6. Nous prenons ici la terminologie standard d'« effet Aharonov-Bohm », bien qu'Ehrenberg et Siday, dans un article de 1949, aient proposé une expérience de pensée similaire et aient abouti à la même conclusion : *The irremovable anisotropy of the field-free region as a whole emphasizes the fact that the electron-optical refractive index contains the vector potential and not the magnetic field strength.* (Ehrenberg & Siday 1949)

#### 4-1 L'argument de Aharonov et Bohm

Notons  $\psi_g^{(0)}(\mathbf{r})$  et  $\psi_d^{(0)}(\mathbf{r})$  les deux ondes de matière en absence de courant dans le solénoïde, correspondant au choix de jauge  $\mathbf{A} = 0$  dans tout l'espace. Quand un courant circule dans le solénoïde, le potentiel vecteur  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  n'est plus nul à l'extérieur du solénoïde, mais le champ magnétique  $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})$  reste nul sur la région accessible aux particules. On a donc dans cette région

$$\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0. \quad (1.66)$$

Comment intégrer cette équation différentielle ? Dans une région « sans trou » (simplement connexe), la solution est simple. Il existe une fonction scalaire  $\chi(\mathbf{r})$  telle que

$$\mathbf{A}(\vec{r}) = \nabla \chi(\mathbf{r}). \quad (1.67)$$

En effet, dans une région sans trou, on a pour tout circuit  $\mathcal{C}$  fermé

$$\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = 0, \quad (1.68)$$

ce qui permet de poser de manière non ambiguë

$$\chi(\mathbf{r}) = \chi(\mathbf{0}) + \int_0^r \mathbf{A}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}', \quad (1.69)$$

où on s'est donné une origine notée  $\mathbf{0}$  et où on a fixé la valeur  $\chi(\mathbf{0})$  de  $\chi$  en ce point.

En revanche, ce raisonnement n'est pas valable pour la géométrie de Aharonov–Bohm car la zone accessible aux particules n'est pas simplement connexe ; on a en effet ôté du plan  $xy$  la région occupée par le solénoïde. Toutefois, on peut considérer deux régions de l'espace notées I et II sur la figure 1.3, correspondant aux « trajectoires » passant à gauche et à droite du solénoïde. Pour chacune de ces régions, on peut résoudre (1.66) sous la forme (1.67) et écrire :

$$\text{zone I : } \mathbf{A}_I(\vec{r}) = \nabla \chi_I(\mathbf{r}), \quad \text{zone II : } \mathbf{A}_{II}(\vec{r}) = \nabla \chi_{II}(\mathbf{r}). \quad (1.70)$$

Considérons alors l'onde  $\psi_g$  qui se propage uniquement dans la région I. Pour cette onde, le branchement du courant dans le solénoïde revient à

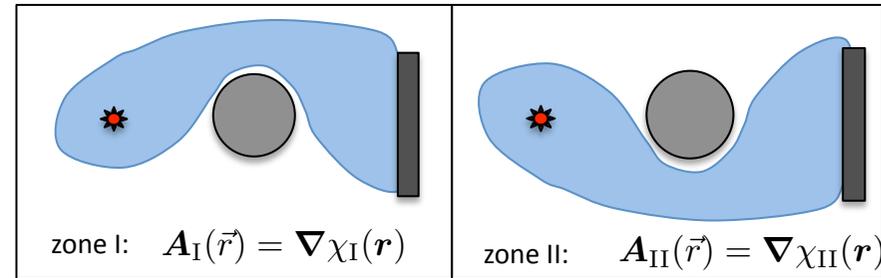


FIGURE 1.3. Deux zones (patch) sur lesquelles le potentiel vecteur en présence de courant peut s'écrire comme  $\mathbf{A}(\vec{r}) = \nabla \chi(\mathbf{r})$ . Attention, la fonction  $\chi$  n'est pas la même pour les deux zones !

faire le changement

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0 \longrightarrow \mathbf{A}_I(\mathbf{r}) = \nabla \chi_I(\mathbf{r}), \quad (1.71)$$

ce qui correspond à un simple changement de jauge. Ce dernier doit s'accompagner d'une modification de la fonction d'onde [c.f. Eq. (1.65)]

$$\psi_g^{(0)}(\mathbf{r}) \longrightarrow \psi_g(\mathbf{r}) = \exp[iq\chi_I(\mathbf{r})/\hbar] \psi_g^{(0)}(\mathbf{r}). \quad (1.72)$$

De la même façon, le branchement du courant dans le solénoïde revient à changer l'onde  $\psi_d$  de la manière suivante :

$$\psi_d^{(0)}(\mathbf{r}) \longrightarrow \psi_d(\mathbf{r}) = \exp[iq\chi_{II}(\mathbf{r})/\hbar] \psi_d^{(0)}(\mathbf{r}). \quad (1.73)$$

Prenons la convention  $\chi_I(\mathbf{0}) = \chi_{II}(\mathbf{0}) = 0$ . L'interférence des ondes de matière en un point de l'écran  $\mathbf{r}$  fait intervenir

$$\psi_d^*(\mathbf{r}) \psi_g(\mathbf{r}) = \exp([iq(\chi_I(\mathbf{r}) - \chi_{II}(\mathbf{r}))/\hbar]) \psi_d^{(0)*}(\mathbf{r}) \psi_g^{(0)}(\mathbf{r}), \quad (1.74)$$

et l'argument du préfacteur peut se réécrire

$$\Phi = \chi_I(\mathbf{r}) - \chi_{II}(\mathbf{r}) = \int_{0, \mathcal{C}_I}^r \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} - \int_{0, \mathcal{C}_{II}}^r \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}, \quad (1.75)$$

où  $\mathcal{C}_I$  et  $\mathcal{C}_{II}$  sont deux chemins quelconques allant de 0 à  $\mathbf{r}$  et respectivement situés à l'intérieur des régions I et II. Introduisons un chemin fermé  $\mathcal{C}$  allant

de 0 à  $\mathbf{r}$  par la région I et revenant de  $\mathbf{r}$  à 0 par la région II ; ce chemin fait donc un tour du solénoïde et on a

$$\Phi = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \iint \mathbf{u}_z \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}') d^2r' \quad (1.76)$$

ce qui montre que  $\Phi$  n'est autre que le flux de  $\mathbf{B}$  à travers le solénoïde. La phase relative des deux ondes de matière arrivant sur l'écran fait donc intervenir ce flux, alors même que les particules ne pénètrent pas dans la région où règne le champ ! Notons que la phase  $q\Phi/\hbar$  peut être qualifiée de *topologique* car elle reste la même quand on déforme continûment le contour  $\mathcal{C}$ , pourvu que celui-ci ne traverse pas le solénoïde.

## 4-2 Argument fondé sur l'intégrale de chemin

Dans ce paragraphe, nous allons retrouver le résultat de Aharonov et Bohm par une méthode légèrement différente, ne faisant pas appel aux deux potentiels vecteurs  $\mathbf{A}_I$  et  $\mathbf{A}_{II}$ , mais utilisant le lagrangien d'interaction entre la particule chargée et le champ via le formalisme de l'intégrale de chemin (Feynman & Hibbs 1965).

Dans ce formalisme, on calcule le propagateur donnant l'amplitude de probabilité pour qu'une particule issue de  $\mathbf{0}$  à l'instant  $t_1$  atteigne le point  $\mathbf{r}$  de l'écran à l'instant  $t_2$ . Ce propagateur est donné par la somme des  $e^{iS_{\Gamma}/\hbar}$ , où  $S_{\Gamma}$  est l'action associée à un chemin donné  $\Gamma$  allant de  $(\mathbf{0}, t_1)$  à  $(\mathbf{r}, t_2)$

$$K(\mathbf{0}, t_1; \mathbf{r}, t_2) \propto \sum_{\text{chemins } \Gamma} \exp(iS_{\Gamma}/\hbar), \quad S_{\Gamma} = \int_{t_1}^{t_2} L[\mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t), t] dt. \quad (1.77)$$

Les lagrangiens en absence et en présence de champ magnétique sont respectivement

$$L^{(0)}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) \quad \text{et} \quad L^{(0)}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) + q\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}), \quad (1.78)$$

où l'on a inclus dans  $L^{(0)}$  le potentiel  $V(\mathbf{r})$  servant à guider la particule de part et d'autre du solénoïde. On remarque alors que le terme additionnel dans l'action d'un chemin donné

$$q \int_{t_1}^{t_2} \dot{\mathbf{r}}(t) \cdot \mathbf{A}[\mathbf{r}(t)] dt = q \int_{\mathbf{0}, \Gamma}^{\mathbf{r}} \mathbf{A}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' \quad (1.79)$$

prend la même valeur  $\delta S_I(\mathbf{r})$  pour tous les chemins  $\Gamma_I$  restreints à la zone I, et une autre valeur  $\delta S_{II}(\mathbf{r})$  pour tous les chemins  $\Gamma_{II}$  restreints à la zone II [c.f. (1.68) et (1.69)].

Ce résultat remarquable permet d'évaluer la modification du signal d'interférence lié au branchement du courant dans le solénoïde, même s'il est *a priori* très difficile de calculer le propagateur  $K$  en absence de courant. Pour cela, négligeons la contribution des chemins « exotiques » faisant un ou plusieurs tours complets du solénoïde en allant de la source à l'écran. En absence de courant, on peut alors écrire le propagateur de  $(\mathbf{0}, t_1)$  à  $(\mathbf{r}, t_2)$  comme la somme  $K(\mathbf{r}) \approx K_I(\mathbf{r}) + K_{II}(\mathbf{r})$  des contributions passant à gauche ou à droite du solénoïde. En présence du courant, ce propagateur est modifié et devient

$$K(\mathbf{r}) \approx K_I(\mathbf{r}) + K_{II}(\mathbf{r}) \quad \longrightarrow \quad K_I(\mathbf{r}) e^{i\delta S_I(\mathbf{r})/\hbar} + K_{II}(\mathbf{r}) e^{i\delta S_{II}(\mathbf{r})/\hbar} \quad (1.80)$$

La modification de la phase relative entre  $K_I$  et  $K_{II}$  due au courant est donc

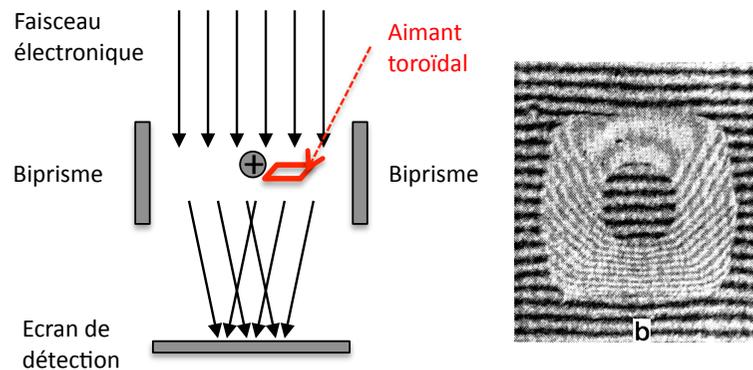
$$\begin{aligned} \frac{1}{\hbar} (\delta S_I(\mathbf{r}) - \delta S_{II}(\mathbf{r})) &= \frac{q}{\hbar} \left( \int_{0,I}^{\mathbf{r}} \mathbf{A}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' - \int_{0,II}^{\mathbf{r}} \mathbf{A}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' \right) \\ &= \frac{q}{\hbar} \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{A}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' = q\Phi/\hbar, \end{aligned} \quad (1.81)$$

où  $\mathcal{C}$  est un circuit fermé encerclant le solénoïde. On retrouve bien le résultat du paragraphe précédent.

Nous avons donc développé deux lignes de raisonnement pour trouver le déphasage dans une expérience de type Aharonov–Bohm :

1. On peut considérer des domaines de l'espace (*patches*) sur lesquels on définit des potentiels vecteurs  $A_I(\mathbf{r})$ ,  $A_{II}(\mathbf{r})$ , ..., et on recolle ces morceaux (i) au point  $\mathbf{0}$  en posant  $\chi_I(\mathbf{0}) = \chi_{II}(\mathbf{0}) = 0$  et (ii) au point  $\mathbf{r}$ , le déphasage recherché apparaissant lors de ce deuxième recollement.
2. On peut tirer parti du fait que l'on connaît pour cette géométrie le potentiel vecteur dans tout l'espace et on utilise alors le lagrangien d'interaction particule-champ pour calculer le déphasage.

Nous verrons un peu plus loin, dans le paragraphe consacré aux monopoles magnétiques, que l'on n'a pas toujours le choix entre ces deux possibilités et que la première méthode, celle du recollement entre deux ou plusieurs zones, est parfois incontournable.



**FIGURE 1.4.** Gauche : expérience de biprisme (électrostatique) de Fresnel mène avec un faisceau d'électrons. Un aimant torique est placé dans une des voies de l'interféromètre. Droite : figure d'interférence obtenue avec l'aimant torique. Le déplacement des franges entre les particules passées à l'intérieur du tore et celles passées à l'extérieur est la signature de l'effet Aharonov-Bohm (figure tirée de Tonomura et al. 1982).

### 4-3 Mise en évidence expérimentale

Dès la publication de l'article de Aharonov et Bohm, des vérifications expérimentales de cet effet ont été mises en œuvre [voir par exemple Chambers (1960)]. Les résultats de ces expériences ont fait l'objet de débats, issus de la difficulté d'estimer quantitativement les effets de bords : il faut s'assurer que la force de Lorentz due aux champs magnétiques de fuite joue effectivement un rôle négligeable. Dans une série d'expériences menées dans les laboratoires d'Hitachi entre 1982 et 1986, A. Tonomura et son équipe ont adopté une géométrie permettant de bien maîtriser ces effets de bords (Tonomura et al. 1982; Tonomura et al. 1986). Leur solénoïde n'est pas rectiligne comme dans l'expérience de pensée de Aharonov et Bohm, mais toroïdal, ce qui permet de minimiser les champs de fuite.

Les expériences de Tonomura utilisent un faisceau collimaté d'électrons, qui est dirigé sur un écran de détection après être passé à travers un bi-prisme de Fresnel (Tonomura 1987). Une version très schématisée est représentée sur la figure 1.4. En absence de perturbation, ceci conduit à des

franges d'interférences rectilignes. Dans l'expérience de 1982, Tonomura *et al.* ont disposé sur un des deux chemins un aimant toroïdal de Permalloy, de forme carrée, avec des côtés extérieurs de 3 microns et intérieurs de 1 micron. Compte tenu des propriétés magnétiques du Permalloy, le déphasage attendu entre une trajectoire passant à l'extérieur du tore et une autre passant à l'intérieur correspond à une différence de chemin de  $6\lambda$ , où la longueur d'onde  $\lambda$  des électrons vaut  $\lambda = 0.03$  Angströms pour une tension d'accélération des électrons de 150 kV. L'expérience confirme quantitativement ce déphasage, avec une différence de phase mesurée de  $5.5\lambda$  (figure 1.4).

Cette expérience a été raffinée en 1985, en déposant un autre matériau (niobium) à la surface du tore en Permalloy. Quand on abaisse suffisamment la température, le niobium devient supraconducteur, ce qui a pour effet d'écranter le champ magnétique du permalloy. La quantification du flux dans une boucle de supraconducteur entraîne que le déphasage entre trajectoires intérieures ou extérieures au tore ne peut plus prendre que les valeurs 0 ou  $\pi$  (modulo  $2\pi$ ). Cet effet de quantification du flux magnétique a bien été mis en évidence dans les interférogrammes produits par ce biprisme de Fresnel (Tonomura et al. 1986).

## 5 Monopole magnétique et physique quantique

Nous terminons ce chapitre avec une question soulevée par Dirac, portant sur la conséquence de l'existence éventuelle de monopoles magnétiques. Rappelons qu'à ce jour, aucun monopole n'a été observé; toutefois, Dirac a remarqué qu'il suffirait qu'un seul monopole existe pour que, dans le formalisme quantique, la charge électrique soit quantifiée (ce qui semble être le cas expérimentalement) (Dirac 1931; Dirac 1948). Dans ce qui suit, nous allons esquisser brièvement le raisonnement de Dirac, en suivant d'assez près le traitement de Sakurai & Napolitano (2011). Nous terminerons par la description d'une expérience récente, simulant la création d'un monopole magnétique dans un condensat de Bose-Einstein spinoriel.

### 5-1 Quantification de la charge électrique

Supposons qu'un monopole magnétique de charge magnétique  $q_m$  soit présent et positionné à l'origine des coordonnées, créant le champ

$$\mathbf{B}_m = \frac{q_m}{4\pi r^2} \mathbf{u}_r. \quad (1.82)$$

On va s'intéresser à la fonction d'onde d'une autre particule de charge électrique  $q_e$  en mouvement autour du monopole, un électron par exemple.

Remarquons pour commencer qu'il n'y a pas de potentiel vecteur  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  défini sur tout l'espace sauf au point du monopole, qui permettrait de retrouver  $\mathbf{B}_m$  via  $\mathbf{B}_m = \nabla \times \mathbf{A}$ . En effet, on trouve pour une sphère  $S$  centrée sur l'origine

$$\iint_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{B} \, d^2r = q_m, \quad (1.83)$$

alors que le flux d'un rotationnel à travers une surface fermée est nul.

On pourrait légitimement craindre que notre formalisme lagrangien ou hamiltonien, fondé sur l'existence du potentiel vecteur, devienne inopérant. Toutefois, on peut « sauver » ce formalisme en tirant parti du fait que l'on n'a pas vraiment besoin de disposer d'une version unique du potentiel vecteur sur l'ensemble de l'espace. On pourra continuer à utiliser ce formalisme si on arrive (i) à paver l'espace de zones où un type de potentiel vecteur est bien défini et (ii) à recoller ces zones entre elles. C'est en fait une technique que nous avons déjà présentée pour étudier l'effet Aharonov-Bohm. Ici, nous allons découper l'espace en deux zones notées I et II, et définir un potentiel vecteur  $A_I(\mathbf{r})$  et  $A_{II}(\mathbf{r})$  sur chaque zone. C'est du recollage des fonctions d'onde associées à  $A_I(\mathbf{r})$  et  $A_{II}(\mathbf{r})$  que viendra la condition de quantification de la charge  $q_e$ .

Un choix possible pour les potentiels vecteurs  $A_I(\mathbf{r})$  et  $A_{II}(\mathbf{r})$  a déjà été donné plus haut. Rappelons-le ici :

$$\mathbf{A}_I(\mathbf{r}) = \frac{q_m}{4\pi} \frac{1 - \cos \theta}{r \sin \theta} \mathbf{u}_\varphi, \quad \mathbf{A}_{II}(\mathbf{r}) = -\frac{q_m}{4\pi} \frac{1 + \cos \theta}{r \sin \theta} \mathbf{u}_\varphi. \quad (1.84)$$

On sait que  $A_I$  ne doit pas être utilisé au voisinage du demi-axe  $z < 0$ , car il donne naissance à cet endroit à une corde de Dirac allant de  $z = 0$  à  $z = -\infty$ . De même  $A_{II}$  ne doit pas être utilisé au voisinage du demi-axe

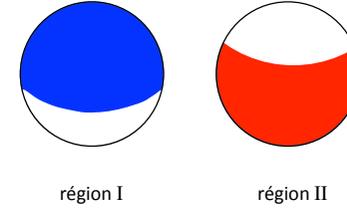


FIGURE 1.5. Représentation graphique des régions I et II, définies ici par leurs angles polaires en coordonnées sphériques.

$z > 0$ , pour la même raison (corde s'étendant de  $z = 0$  à  $z = +\infty$ ). Pour fixer les idées, prenons donc les régions suivantes (voir figure 1.5)

- La région I est définie comme l'ensemble des points  $\mathbf{r}$  de l'espace, de coordonnées sphériques  $0 \leq \theta < 3\pi/4$  et  $r \neq 0$ .
- La région II est définie comme l'ensemble des points  $\mathbf{r}$  de l'espace, de coordonnées sphériques  $\pi/4 < \theta \leq \pi$  et  $r \neq 0$ .

Dans la zone de recouvrement  $I \cap II$ , c'est-à-dire la zone autour de l'équateur correspondant à  $\pi/4 < \theta < 3\pi/4$ , les deux potentiels vecteurs décrivent le même champ magnétique et sont donc reliés par une transformation de jauge<sup>7</sup>. En l'occurrence, la transformation de jauge faisant passer de  $A_I(\mathbf{r})$  à  $A_{II}(\mathbf{r})$  est simple :

$$\mathbf{A}_{II}(\mathbf{r}) - \mathbf{A}_I(\mathbf{r}) = -\frac{q_m}{2\pi} \frac{1}{r \sin \theta} \mathbf{u}_\varphi = \nabla \chi(\mathbf{r}) \quad (1.85)$$

$$\text{avec } \chi(\mathbf{r}) = \chi_0 - \frac{q_m}{2\pi} \varphi, \quad \mathbf{r} \in I \cap II, \quad (1.86)$$

Considérons maintenant une particule quantique et notons respectivement  $\psi_I$  et  $\psi_{II}$  les fonctions d'ondes correspondant au choix de jauge  $A_I(\mathbf{r})$  et  $A_{II}(\mathbf{r})$ . Dans la zone  $I \cap II$ , où l'on passe d'une jauge à l'autre par l'intermédiaire de (1.86), les deux fonctions d'onde  $\psi_I$  et  $\psi_{II}$  doivent elles aussi être reliées par cette transformation de jauge

$$\psi_{II}(\mathbf{r}) = e^{iq_e \chi(\mathbf{r})/\hbar} \psi_I(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in I \cap II, \quad (1.87)$$

7. Ce n'est pas vrai pour l'espace entier, car  $A_I(\mathbf{r})$  et  $A_{II}(\mathbf{r})$  correspondent à des champs différents sur l'axe  $z$ .

Il est alors simple de conclure : il faut d'après les postulats de la mécanique quantique que les fonctions d'onde  $\psi_I(\mathbf{r})$  et  $\psi_{II}(\mathbf{r})$  soient monovaluées<sup>8</sup>. Ceci impose en particulier qu'elles ne changent pas de valeur quand on fait le changement de coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varphi) \rightarrow (r, \theta, \varphi + 2\pi)$  :

$$\psi_{I,II}(r, \theta, \varphi + 2\pi) = \psi_{I,II}(r, \theta, \varphi) \quad (1.88)$$

Ceci impose que  $e^{iq_e\chi(\mathbf{r})/\hbar}$  ne change pas non plus quand  $\varphi \rightarrow \varphi + 2\pi$ , soit

$$\exp\left(i\frac{q_e q_m}{\hbar}\right) = 1 \quad \Rightarrow \quad q_e q_m = n\hbar, \quad (1.89)$$

où  $n$  est un entier quelconque et  $\hbar = 2\pi\hbar$ . C'est la quantification annoncée<sup>9</sup> !

On pourra trouver dans le livre *Classical Electrodynamics* de Jackson une approche différente du problème<sup>10</sup>, où on calcule d'abord le moment cinétique du champ électromagnétique créé par la superposition de la charge électrique  $q_e$  et de la charge magnétique  $q_m$ , puis on pose que ce moment cinétique doit être quantifié en multiples de  $\hbar/2$ .

## 5-2 Simulation d'un monopole dans un condensat

Au cours de ces dernières années, on a mis en évidence dans plusieurs systèmes de matière condensée des structures du paramètre d'ordre qui rappellent celle d'un monopole magnétique. Il ne s'agit bien sûr que d'une analogie : ces monopoles ne génèrent pas de champ magnétique réel et n'impliquent en rien la quantification de la charge électrique pressentie par Dirac. Néanmoins, leur étude est intéressante car elle révèle la topologie caractéristique des monopoles, avec la corde de Dirac qui leur est attachée. Les premières de ces expériences ont été menées dans des matériaux de type *glace de spin* (*spin ice*) (Castelnovo et al. 2008; Morris et al. 2009; Fennell et al. 2009). Nous allons décrire ici une expérience très récente menée aux USA (Amherst College) par D. S. Hall et son équipe sur

8. Rappelons que c'est ce postulat qui permet de prouver que les moments cinétiques orbitaux sont entiers, et pas demi-entiers comme la théorie générale du moment cinétique aurait pu le laisser supposer.

9. Il est intéressant d'étudier l'effet Aharonov-Bohm pour les demi-solénoïdes susceptibles de créer les potentiels vecteur  $\mathbf{A}_I$  et  $\mathbf{A}_{II}$ , si la quantification (1.89) est vérifiée.

10. Nos notations se raccordent à celles de Jackson en posant  $q_m = 4\pi g$ ,  $q_e = e/c$ .

des atomes froids. Ces chercheurs ont mis en évidence une « texture de spin » dans un condensat de Bose-Einstein, qui conduit pour la fonction d'onde de ce condensat à une équation d'évolution de type Schrödinger en présence d'un monopole (Ray et al. 2014).

Nous n'allons pas développer ici tout le formalisme nécessaire pour analyser quantitativement l'expérience de Ray et al. (2014), mais nous en indiquons les quelques éléments indispensables pour comprendre comment un champ magnétique artificiel monopolaire peut émerger dans le contexte d'un condensat spineur. Ces éléments sont d'ailleurs voisins des développements que nous rencontrerons plus tard dans ce cours, quand nous étudierons la génération de champs artificiels à partir de la phase de Berry.

Pour présenter le contexte théorique, nous allons nous inspirer d'un article pionnier de Ho & Shenoy (1996), qui ont montré comment le spin non nul des atomes alcalins utilisés dans les expériences de condensats gazeux permettait d'envisager une physique plus riche que celle d'un condensat scalaire, comme l'hélium superfluide. Considérons un condensat atomique formé d'atomes de spin 1. Nous supposons que tous les atomes sont dans le même état qui s'écrit sous forme d'une fonction d'onde macroscopique

$$\Psi(\mathbf{r}) = \psi(\mathbf{r}) \begin{pmatrix} \zeta_{+1}(\mathbf{r}) \\ \zeta_0(\mathbf{r}) \\ \zeta_{-1}(\mathbf{r}) \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \sum_{m=-1}^{+1} |\zeta_m(\mathbf{r})|^2 = 1. \quad (1.90)$$

La fonction d'onde scalaire  $\psi(\mathbf{r})$  représente l'amplitude de probabilité pour trouver un atome au point  $\mathbf{r}$ , indépendamment de son état de spin ; le spin normalisé<sup>11</sup>  $|\zeta\rangle$  donne la répartition de la population entre les trois états de spin. Notons que l'écriture (1.90) n'est pas unique, car on peut multiplier  $\psi$  par  $e^{+i\chi(\mathbf{r})}$  et  $|\zeta\rangle$  par  $e^{-i\chi(\mathbf{r})}$ , l'état total  $\Psi$  restant inchangé.

Considérons l'équation d'évolution de  $\Psi(\mathbf{r}, t)$ , en nous limitant à l'énergie cinétique, qui est le terme pertinent pour faire émerger le champ de jauge requis. Partons de

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2M} \Delta \Psi + \dots \quad (1.91)$$

11. On note ici avec un ket les vecteur de l'espace de Hilbert du spin et en caractère gras les vecteurs de l'espace euclidien  $R^3$ .

La dérivée par rapport au temps du membre de gauche de (1.91) et le laplacien du membre de droite donnent respectivement

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} &= i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} |\zeta\rangle + i\hbar \psi \frac{\partial |\zeta\rangle}{\partial t} \\ \Delta \Psi &= \Delta(\psi |\zeta\rangle) = (\Delta \psi) |\zeta\rangle + 2(\nabla \psi) \cdot (\nabla |\zeta\rangle) + \psi (\Delta |\zeta\rangle). \end{aligned}$$

Multiplions maintenant (1.91) par le bra (vecteur ligne)

$$\langle \zeta | = (\zeta_{+1}^*(\mathbf{r}), \zeta_0^*(\mathbf{r}), \zeta_{-1}^*(\mathbf{r})). \quad (1.92)$$

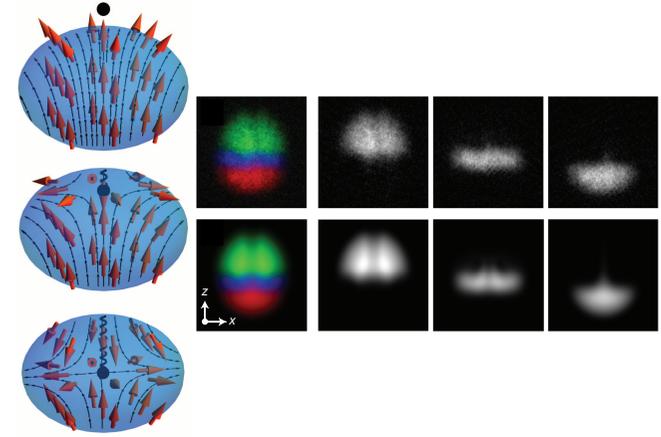
En utilisant  $\langle \zeta | \zeta \rangle = 1$  [cf. (1.90)], on arrive à une équation d'évolution pour  $\psi$  qui se met sous la forme

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2M} \Delta \psi + i\frac{\hbar}{M} \nabla \psi \cdot \mathcal{A} + \dots \quad \text{avec} \quad \mathcal{A}(\mathbf{r}) = i\hbar \langle \zeta | (\nabla |\zeta\rangle), \quad (1.93)$$

où on a omis les termes proportionnels à  $\psi$  elle-même. On voit donc apparaître dans l'équation d'évolution de  $\psi$  un terme en  $\hat{\mathbf{p}} \cdot \mathcal{A}$ , caractéristique d'un potentiel vecteur : c'est exactement ce type de terme qu'il s'agit de créer si on veut générer un champ de jauge artificiel. Ce terme s'accompagne d'autres contributions que nous n'avons pas écrites, plus standards, correspondant à un potentiel scalaire agissant sur les particules. Nous reviendrons sur ces contributions dans les prochains cours via un formalisme plus général.

À ce stade, l'écriture d'une équation du mouvement pour  $\psi$  peut apparaître comme quelque peu artificielle, puisqu'elle ne représente qu'une partie de l'évolution des degrés de liberté de l'état  $\Psi$ . Il faut donc en principe la compléter par une équation d'évolution pour  $|\zeta\rangle$  et la dynamique est alors complexe à analyser. Il existe toutefois une classe de problèmes où cette deuxième étape n'est pas nécessaire : il suffit pour cela de « geler » le degré de liberté de spin, en préparant le système dans un état de spin donné et en s'assurant que les atomes vont suivre adiabatiquement cet état si on varie le champ magnétique extérieur appliqué au système.

C'est ce qui a été fait dans l'expérience de Ray et al. (2014). Les auteurs sont partis d'un condensat initialement dans l'état  $|F=1, m_z=+1\rangle$  dans un champ magnétique homogène et parallèle à l'axe  $z$ . Ils ont ensuite ajouté une composante non homogène à ce champ, correspondant à un champ

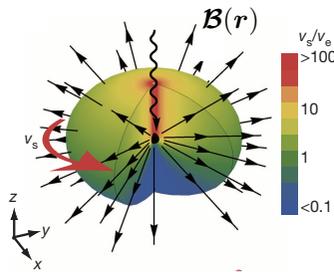


**FIGURE 1.6.** À gauche : entrée du zéro de champ magnétique (le point noir) dans un condensat, obtenu en variant le champ  $B_0$  dans l'équation (1.94). À droite : texture de spin mesurée (haut) et calculée (bas) quand le zéro du champ est amené jusqu'au centre du condensat. Vert :  $m_z = -1$ , bleu :  $m_z = 0$ , rouge :  $m_z = +1$ . On distingue le sillon créé par le passage du zéro du champ dans les composantes  $m_z = -1$  et  $m_z = 0$  (Ray et al. 2014).

quadrupolaire, pour obtenir un champ total de la forme

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \begin{pmatrix} b'x \\ b'y \\ -2b'z + B_0(t) \end{pmatrix}. \quad (1.94)$$

Ce champ s'annule au point  $x = y = 0, z = B_0/2b'$ . En diminuant lentement  $B_0(t)$ , les auteurs ont fait bouger ce zéro du champ magnétique le long d'une ligne verticale, arrivant par le dessus du condensat pour l'amener jusqu'en son centre (figure 1.6, à gauche). Ceci provoque un basculement adiabatique des spins dans la partie supérieure du condensat, où les atomes se retrouvent finalement dans l'état  $|F=1, m_z=-1\rangle$ . Dans la partie centrale, les atomes sont majoritairement dans l'état  $|F=1, m_z=0\rangle$  et ils sont restés essentiellement dans l'état  $|F=1, m_z=+1\rangle$  dans la partie inférieure. Nous avons reproduit sur la droite de la figure 1.6 quelques résultats de Ray et al. (2014), montrant cette répartition spatiale des compo-



**FIGURE 1.7.** Structure du champ magnétique artificiel  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ , où le potentiel vecteur artificiel  $\mathbf{A}$  se déduit de la texture de spin par l'intermédiaire de (1.93) (Ray et al. 2014).

santes de spin dans le condensat une fois le zéro du champ placé au centre du condensat. On y voit notamment le sillon créé par le passage du zéro du champ dans la partie supérieure du condensat, au sein des composantes de spin  $m_z = -1$  et  $m_z = 0$ .

Une fois le zéro du champ arrivé au centre du condensat, on peut montrer que la texture de spin  $|\zeta\rangle$  du condensat conduit à un potentiel vecteur artificiel  $i\hbar \langle \zeta | (\nabla | \zeta \rangle)$  identique<sup>12</sup> à celui envisagé pour créer un monopole :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) \propto \frac{1 + \cos \theta}{r \sin \theta} \mathbf{u}_\varphi. \quad (1.95)$$

On trouve donc une structure de champ monopolaire pour  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  (figure 1.7). Physiquement, ces champs de vecteurs  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  et  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  sont reliés au champ de vitesse superfluide et à sa vorticité (Ho & Shenoy 1996). L'évolution de la fonction scalaire  $\psi$  est en principe la même que celle d'une charge électrique quantique placée dans le champ d'un monopole magnétique. En pratique, la dynamique à long terme est compliquée par le fait que le spin des atomes risque de ne pas suivre adiabatement le mouvement de leur centre de masse dans les régions de très faible champ.

12. après homothétie sur la coordonnée  $z$ .

## Références

- Aharonov, Y. & D. Bohm (1959), « Significance of Electromagnetic Potentials in the Quantum Theory », in *Phys. Rev.* 115.3, pp. 485–491.
- Aharonov, Y. & A. Casher (1984), « Topological Quantum Effects for Neutral Particles », in *Phys. Rev. Lett.* 53.4, pp. 319–321.
- Castelnovo, C., R. Moessner & S. L. Sondhi (2008), « Magnetic monopoles in spin ice », in *Nature* 451, p. 42.
- Chambers, R. G. (1960), « Shift of an Electron Interference Pattern by Enclosed Magnetic Flux », in *Phys. Rev. Lett.* 5 (1), pp. 3–5.
- Cohen-Tannoudji, C., B. Diu & F. Lalo  (1973), *Mécanique Quantique*, Hermann.
- Dirac, P. A. M. (1931), « Quantised singularities in the electromagnetic field. », in *Proc. Roy. Soc. London A*133, p. 60.
- (1948), « The Theory of Magnetic Poles », in *Physical Review* 74.817.
- (1958), *The Principles of Quantum Mechanics*, Oxford University Press.
- Ehrenberg, W. & R. E. Siday (1949), « The Refractive Index in Electron Optics and the Principles of Dynamics », in *Proceedings of the Physical Society Series B* 62, pp. 8–21.
- Fennell, T., P. P. Deen, A. R. Wildes, K. Schmalzl, D. Prabhakaran, A. T. Boothroyd, R. J. Aldus, D. F. McMorrow & S. T. Bramwell (2009), « Magnetic Coulomb Phase in the Spin Ice  $\text{Ho}_2\text{Ti}_2\text{O}_7$  », in *Science* 326, p. 415.
- Feynman, R.P. & A.R. Hibbs (1965), *Quantum Mechanics and Path Integrals*, McGraw Hill.
- Ho, T. L. & V. B. Shenoy (1996), « Local Spin-Gauge Symmetry of the Bose-Einstein Condensates in Atomic Gases », in *Phys. Rev. Lett.* 77, p. 2595.
- Jackson, J. D. (1998), *Classical Electrodynamics*, New York: John Wiley.
- Morris, D. J. P., D. A. Tennant, et al. (2009), « Dirac Strings and Magnetic Monopoles in the Spin Ice  $\text{Dy}_2\text{Ti}_2\text{O}_7$  », in *Science* 326, p. 411.
- Ray, M. W., E. Ruokokoski, S. Kandel, M. M tt nen & D. S. Hall (2014), « Observation of Dirac monopoles in a synthetic magnetic field », in *Nature* 505, p. 657.
- Sakurai, J. J. & J. Napolitano (2011), *Modern Quantum Mechanics, Second Edition*, Addison-Wesley.
- Tonomura, Akira (1987), « Applications of electron holography », in *Rev. Mod. Phys.* 59 (3), pp. 639–669.
- Tonomura, Akira, Tsuyoshi Matsuda, Ryo Suzuki, Akira Fukuhara, Nobuyuki Osakabe, Hiroshi Umezaki, Junji Endo, Kohsei Shinagawa, Yu-

taka Sugita & Hideo Fujiwara (1982), « Observation of Aharonov-Bohm Effect by Electron Holography », in *Phys. Rev. Lett.* 48.21, pp. 1443–1446.  
Tonomura, Akira, Nobuyuki Osakabe, Tsuyoshi Matsuda, Takeshi Kawasaki, Junji Endo, Shinichiro Yano & Hiroji Yamada (1986), « Evidence for Aharonov-Bohm effect with magnetic field completely shielded from electron wave », in *Phys. Rev. Lett.* 56 (8), pp. 792–795.