

# Géométrie Algorithmique

## Données, Modèles, Programmes

### 4. Génération de maillages

Jean-Daniel Boissonnat

Collège de France

3 mai 2017

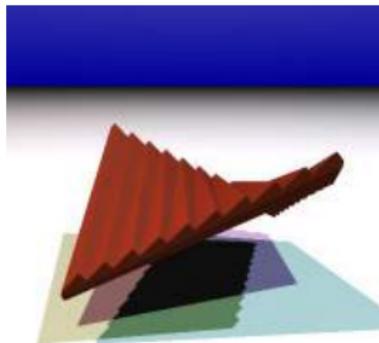
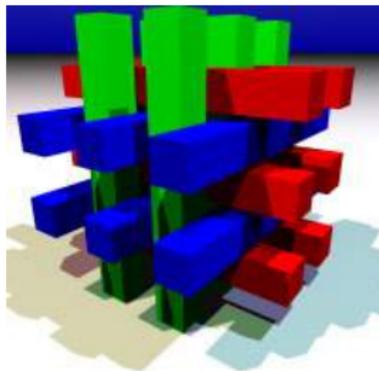
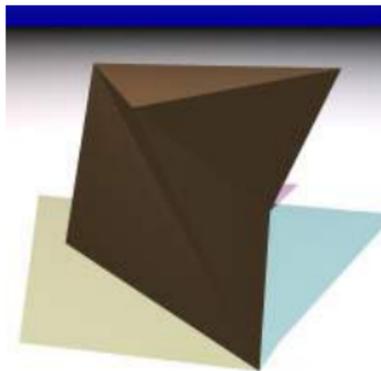
# Géométrie algorithmique

## Données, modèles, programmes

- 1 Modèles géométriques discrets  
F. Cazals : Modèles géométriques pour la prédiction des interactions macro-moléculaires
- 2 La puissance de l'aléa : algorithmes randomisés  
P. Calka : Probabilités géométriques
- 3 Le calcul géométrique  
S. Pion : La bibliothèque logicielle CGAL
- 4 Génération de maillages  
J-M. Mirebeau : Les deux réductions de Voronoï et leur application aux équations aux dérivées partielles
- 5 Courbes et surfaces  
P. Alliez : Reconstruction de surfaces
- 6 Espaces de configurations  
A. de Mesmay : Dessin de graphes
- 7 Structures de données géométriques  
D. Feldman : Core sets
- 8 Géométrie des données  
F. Chazal : Analyse topologique des données

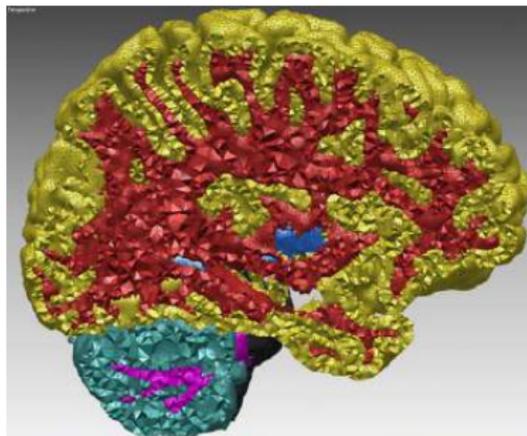
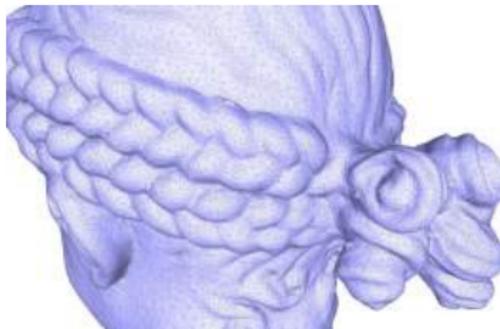
# Découpage d'un domaine en éléments simples

- Adjonction de sommets
- Nature des éléments (simplexes, cubes)
- Nombre et qualité des éléments



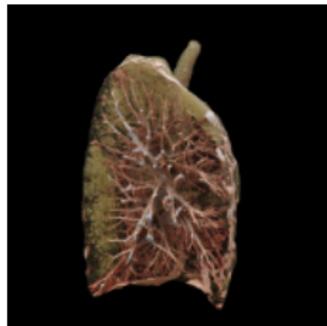
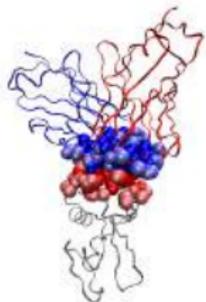
# Approximation de surfaces et de volumes

Visualisation, robotique chirurgicale, simulations numériques

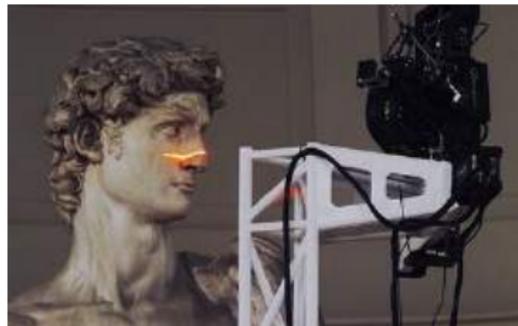


# Reconstruction de formes

De l'échelle atomique à l'échelle astronomique



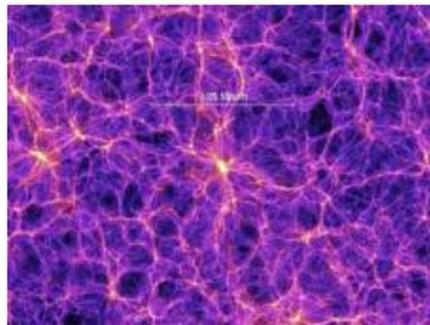
Siemens Healthineers



The Michelangelo Project



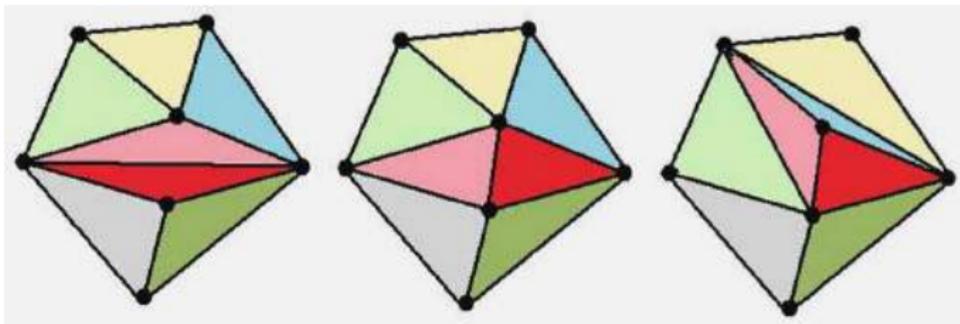
Acute3D/Bentley Systems



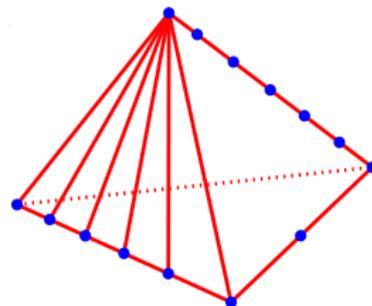
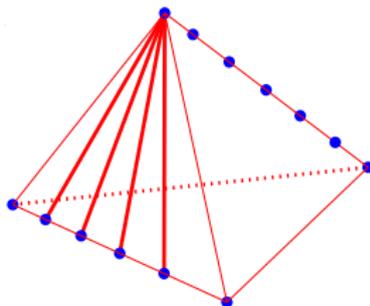
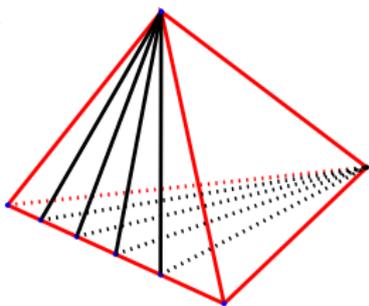
Red shift survey

- 1 Optimalité de la triangulation de Delaunay
- 2 Echantillons réguliers ( $\epsilon$ -nets) et raffinement de Delaunay
- 3 Triangulations épaisses

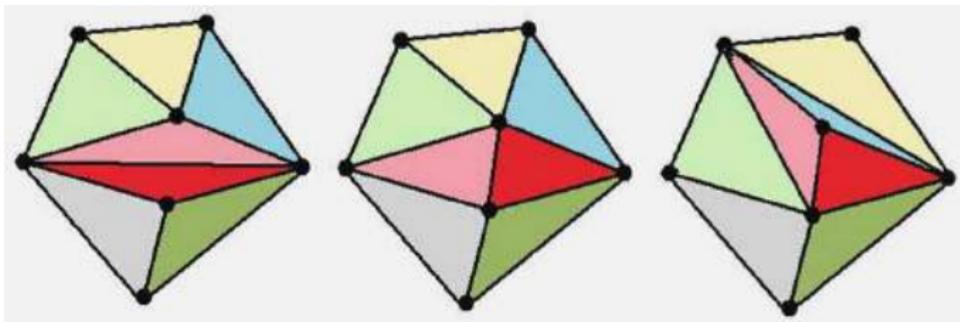
# Un ensemble de points admet plusieurs triangulations



Un même ensemble de points de  $\mathbb{R}^3$  peut avoir des triangulations de tailles **linéaires** et des triangulations de tailles **quadratiques**



## Optimisation du vecteur des angles ( $d = 2$ )



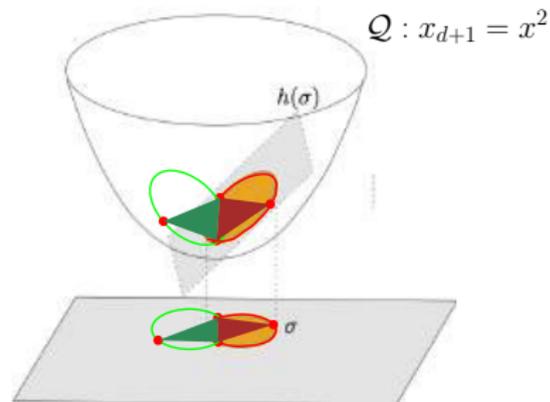
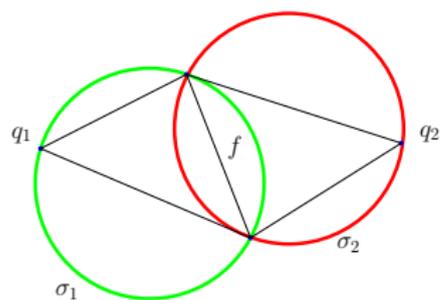
Vecteur des angles d'une triangulation  $T(\mathcal{P})$

$$\text{ang}(T(\mathcal{P})) = (\alpha_1, \dots, \alpha_{3t}), \quad \alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_{3t}$$

**Optimalité** Toute triangulation d'un ensemble donné de points  $\mathcal{P}$  dont le vecteur des angles est maximal (pour d'ordre lexicographique) est une triangulation de Delaunay de  $\mathcal{P}$

# Caractérisation locale des triangulations de Delaunay

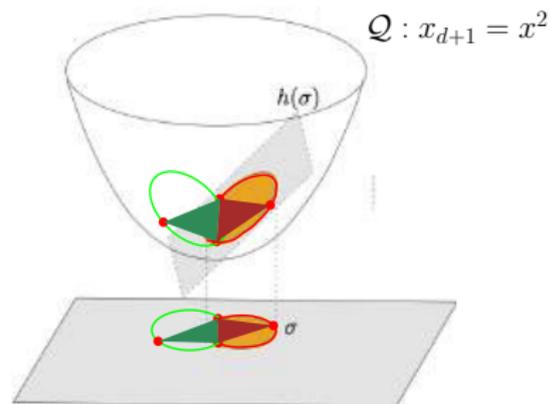
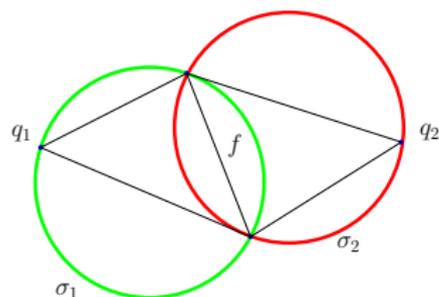
Paire de simplexes réguliers



$$\sigma_2(q_1) \geq 0 \quad \text{and} \quad \sigma_1(q_2) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \hat{c}_1 \in h_{\sigma_2}^+ \quad \text{and} \quad \hat{c}_2 \in h_{\sigma_1}^+$$

# Caractérisation locale des triangulations de Delaunay

Paire de simplexes réguliers

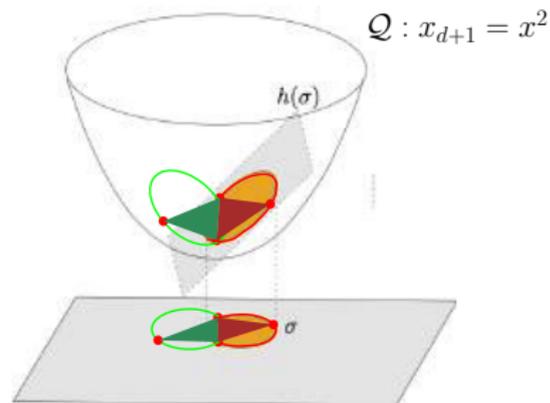
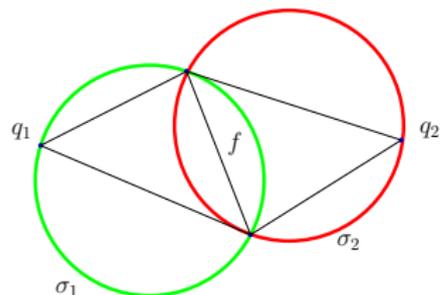


**Théorème** Une triangulation  $T(P)$  telle que toutes les paires de simplexes sont régulières est une Delaunay triangulation  $\text{Del}(P)$

**Démonstration** La fonction affine par morceaux dont le graphe  $G$  est obtenu en relevant les triangles est localement convexe et a un support convexe

# Caractérisation locale des triangulations de Delaunay

## Paire de simplexes réguliers

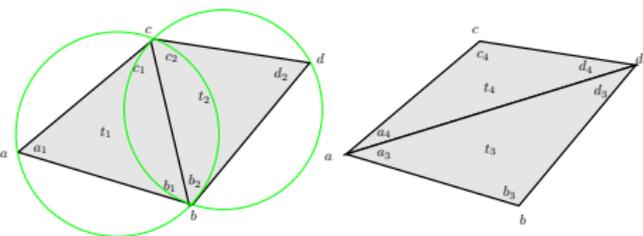


**Théorème** Une triangulation  $T(P)$  telle que toutes les paires de simplexes sont régulières est une Delaunay triangulation  $\text{Del}(P)$

**Démonstration** La fonction affine par morceaux dont le graphe  $G$  est obtenu en relevant les triangles est localement convexe et a un support convexe

# La démonstration de Lawson

## Bascules d'arêtes



Tant que  $\exists$  une paire non régulière  $(t_3, t_4)$

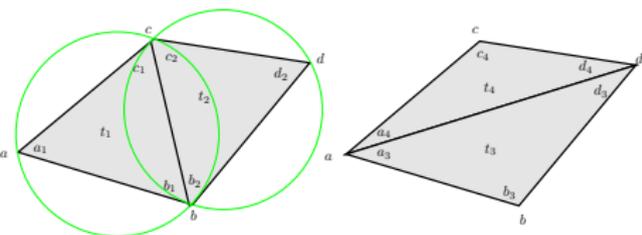
*/\*  $t_3 \cup t_4$  est convexe \*/*

remplacer  $(t_3, t_4)$  par  $(t_1, t_2)$

- Régulariser  $\Leftrightarrow$  augmente  $\text{ang}(T(\mathcal{P}))$   
 $\text{ang}(t_1, t_2) \geq \text{ang}(t_3, t_4)$
- L'algorithme s'arrête puisque le nombre de triangulations de  $\mathcal{P}$  est fini et que  $\text{ang}(T(\mathcal{P}))$  ne peut pas décroître
- La triangulation obtenue est une Delaunay triangulation de  $\mathcal{P}$  puisque toutes les arêtes sont régulières

# La démonstration de Lawson

## Bascules d'arêtes



Tant que  $\exists$  une paire non régulière  
 $(t_3, t_4)$

*/\*  $t_3 \cup t_4$  est convexe \*/*

remplacer  $(t_3, t_4)$  par  $(t_1, t_2)$

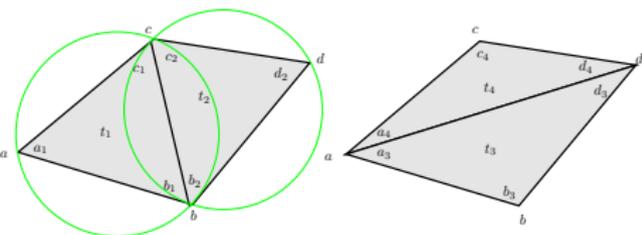
- Régulariser  $\Leftrightarrow$  augmente  $\text{ang}(T(\mathcal{P}))$

$$\text{ang}(t_1, t_2) \geq \text{ang}(t_3, t_4)$$

- L'algorithme s'arrête puisque le nombre de triangulations de  $\mathcal{P}$  est fini et que  $\text{ang}(T(\mathcal{P}))$  ne peut pas décroître
- La triangulation obtenue est une Delaunay triangulation de  $\mathcal{P}$  puisque toutes les arêtes sont régulières

# La démonstration de Lawson

## Bascules d'arêtes



Tant que  $\exists$  une paire non régulière  $(t_3, t_4)$

*/\*  $t_3 \cup t_4$  est convexe \*/*

remplacer  $(t_3, t_4)$  par  $(t_1, t_2)$

- Régulariser  $\Leftrightarrow$  augmente  $\text{ang}(T(\mathcal{P}))$

$$\text{ang}(t_1, t_2) \geq \text{ang}(t_3, t_4)$$

- L'algorithme s'arrête puisque le nombre de triangulations de  $\mathcal{P}$  est fini et que  $\text{ang}(T(\mathcal{P}))$  ne peut pas décroître
- La triangulation obtenue est une Delaunay triangulation de  $\mathcal{P}$  puisque toutes les arêtes sont régulières

# Interpolation linéaire de fonctions multivariées

**Données** : un ensemble  $\mathcal{P}$  de points du plan et la valeur d'une fonction  $f$  en ces points

**Triangulation** :  $T(\mathcal{P})$  de  $\mathcal{P}$

**Interpolation linéaire**  $\hat{f} : \text{conv}(\mathcal{P}) \rightarrow \mathbb{R}$   
 $\forall \sigma \in T(\mathcal{P}) : \hat{f}|_{\sigma}(x) = \sum_{p_i \in \text{vert}(\sigma)} \lambda_i(x) f(p_i)$

**Rugosité** :  $R(T) = \sum_{\sigma \in T(\mathcal{P})} \int_{\sigma} \|\nabla \hat{f}|_{\sigma}\|^2 dx$  (Energie de Dirichlet)

**Théorème (Rippa 1990)**

Parmi toutes les triangulations de  $\mathcal{P}$ ,  $\text{Del}(\mathcal{P})$  est celle qui minimise la rugosité

# Interpolation linéaire de fonctions multivariées

**Données** : un ensemble  $\mathcal{P}$  de points du plan et la valeur d'une fonction  $f$  en ces points

**Triangulation** :  $T(\mathcal{P})$  de  $\mathcal{P}$

**Interpolation linéaire**  $\hat{f} : \text{conv}(\mathcal{P}) \rightarrow \mathbb{R}$   
 $\forall \sigma \in T(\mathcal{P}) : \hat{f}|_{\sigma}(x) = \sum_{p_i \in \text{vert}(\sigma)} \lambda_i(x) f(p_i)$

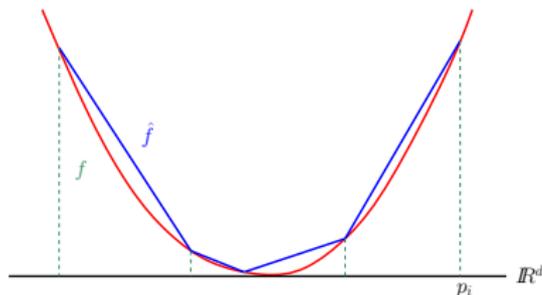
**Rugosité** :  $R(T) = \sum_{\sigma \in T(\mathcal{P})} \int_{\sigma} \|\nabla \hat{f}|_{\sigma}\|^2 dx$  (Energie de Dirichlet)

## Théorème (Rippa 1990)

Parmi toutes les triangulations de  $\mathcal{P}$ ,  $\text{Del}(\mathcal{P})$  est celle qui minimise la rugosité

# Interpolation linéaire de fonctions multivariées

## Fonctions quadratique isotropes



$\mathcal{P}$  un ensemble fini de points de  $\mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned} f : \text{conv}(\mathcal{P}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow f(x) = x^2 \end{aligned}$$

$\mathcal{T}(\mathcal{P})$  une triangulation de  $\mathcal{P}$

Interpolation linéaire  $\hat{f} : \text{conv}(\mathcal{P}) \rightarrow \mathbb{R}$

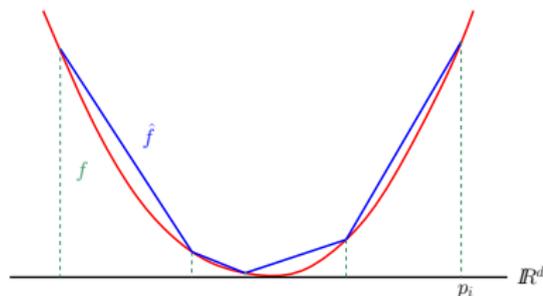
$$x \in \sigma \rightarrow \hat{f}|_{\sigma}(x) = \sum_{p_i \in \text{vert}(\sigma)} \lambda_i(x) f(p_i)$$

## Proposition

Parmi toutes les triangulations de  $\mathcal{P}$ ,  $\text{Del}(\mathcal{P})$  minimise l'erreur d'interpolation  $\hat{f}(x) - f(x)$  en tout point  $x \in \text{conv}(\mathcal{P})$

# Interpolation linéaire de fonctions multivariées

Fonctions quadratique isotropes



$\mathcal{P}$  un ensemble fini de points de  $\mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned} f : \text{conv}(\mathcal{P}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow f(x) = x^2 \end{aligned}$$

$\mathcal{T}(\mathcal{P})$  une triangulation de  $\mathcal{P}$

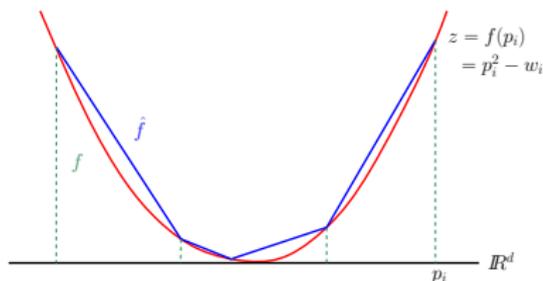
Interpolation linéaire  $\hat{f} : \text{conv}(\mathcal{P}) \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \in \sigma \rightarrow \hat{f}|_{\sigma}(x) = \sum_{p_i \in \text{vert}(\sigma)} \lambda_i(x) f(p_i)$

## Proposition

Parmi toutes les triangulations de  $\mathcal{P}$ ,  $\text{Del}(\mathcal{P})$  minimise l'erreur d'interpolation  $\hat{f}(x) - f(x)$  en tout point  $x \in \text{conv}(\mathcal{P})$

# Interpolation linéaire de fonctions multivariées

## Fonctions convexes



$\mathcal{P}$  un ensemble fini de points de  $\mathbb{R}^d$

$f$  convexe :  $\text{conv}(\mathcal{P}) \rightarrow \mathbb{R}$

$\mathcal{T}(\mathcal{P})$  une triangulation de  $\mathcal{P}$

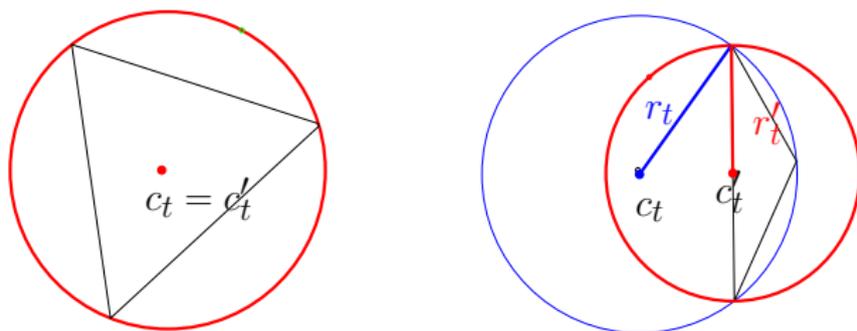
**Élévation** :  $p_i \in \mathbb{R}^d \rightarrow \hat{p}_i = (p_i, f(p_i))$

**Poids** :  $w_i = p_i^2 - f(p_i)$   
 $\mathcal{P}^W = \{(p_i, w_i), i = 1, \dots, n\}$

**Proposition** Parmi toutes les triangulations de  $\mathcal{P}$ ,  $\text{Del}(\mathcal{P}^W)$  minimise l'erreur d'interpolation  $\hat{f}(x) - f(x)$  en tout point  $x \in \text{conv}(\mathcal{P})$

# Minimiser la compacité

Plus petite boule contenant un simplexe :  $B(c'_t, r'_t)$



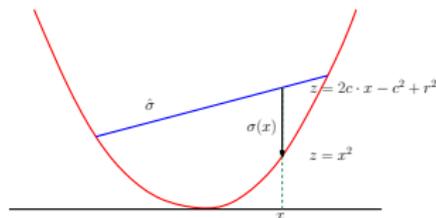
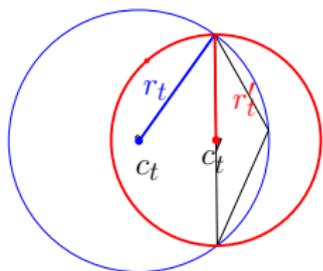
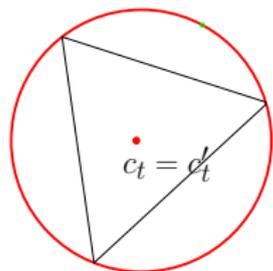
Compacité d'une triangulation  $T$  :  $Q(T) = \max_{t \in T} r'_t$

**Théorème (Rajan 1991)**

Pour un ensemble  $\mathcal{P}$  donné, et pour toute triangulation  $T(\mathcal{P})$  de  $\mathcal{P}$ ,  
 $Q(\text{Del}(\mathcal{P})) \leq Q(T(\mathcal{P}))$

# Minimiser la compacité

## Démonstration du théorème de Rajan



$$D(x, t) := \|x - c_t\|^2 - r_t^2, \quad D_T(x) := D(x, t) \quad \text{où } t \in T, x \in t$$

1  $\forall T$  triangulation de  $\mathcal{P}$  et  $\forall x \in \text{conv}(\mathcal{P}) : 0 > D_{\text{Del}}(x) \geq D_T(x)$

2  $\min_{x \in t} D(x, t) = -r_t'^2$

3 En notant  $x_T = \arg \min D_T(x)$  et  $D_T(x_T) = -r_T'^2$

$$D_T(x_T) = -r_T'^2 \leq D_T(x_{\text{Del}}) \stackrel{(1)}{\leq} D_{\text{Del}}(x_{\text{Del}}) = -r_{\text{Del}}'^2$$

# Interpolation linéaire de fonctions définies sur $\mathbb{R}^d$

Fonctions à dérivée seconde bornée

$\mathcal{F}(c)$  l'ensemble des fonctions définies sur  $\text{conv}(\mathcal{P})$  t.q.  
 $|f''_u(x)| \leq c$  pour tout  $x \in \text{conv}(\mathcal{P})$  et tout vecteur unitaire  $u$

**Lemme** [Waldron 98]

$$\forall f \in \mathcal{F}(c), \quad \forall x \in \sigma, \quad |f(x) - \hat{f}(x)| \leq c \frac{r_\sigma^2}{2}$$

**Corollaire**

Parmi toutes les triangulations de  $\mathcal{P}$ ,  $\text{Del}(\mathcal{P})$  minimise l'erreur d'interpolation

$$\max_{f \in \mathcal{F}(c)} \max_{x \in \text{conv}(\mathcal{P})} |\hat{f}(x) - f(x)|$$

# Triangulation de Delaunay optimale

Approche variationnelle

Energie

[Chen 2004], [Alliez et al. 2005]

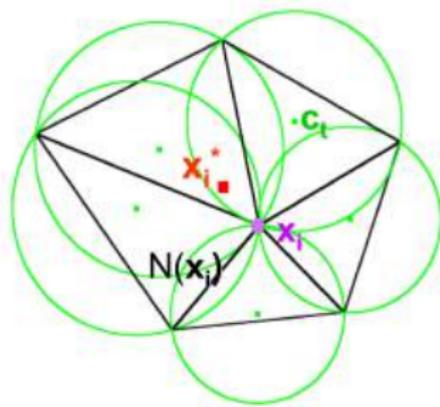
$$E_{ODT} = \|f - \hat{f}\|_{L^1}$$

(volume entre le parabolöide et l'approximation)

Minimiser  $E_{ODT}$  à  $\mathcal{P}$  et  $\text{conv}(\mathcal{P})$  fixés

Position optimale du sommet  $p_i$  (les autres restant fixés)

$$\mathbf{x}_i^* = \frac{\sum_{t \in N(\mathbf{x}_i)} |\mathbf{t}| \mathbf{c}_t}{\sum_{t \in N(\mathbf{x}_i)} |\mathbf{t}|}$$



# Triangulation de Delaunay optimale

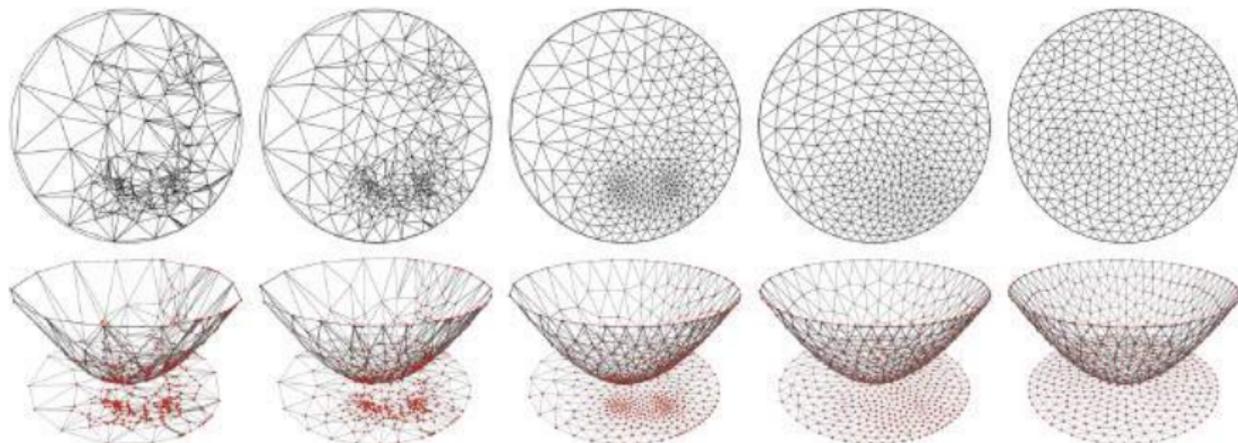
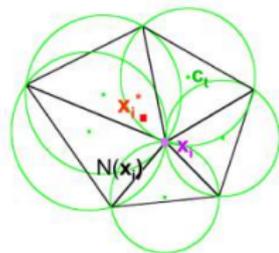
Relaxation de Lloyd

[Chen 2004], [Alliez et al. 2005]

## Algorithme

- 1 Initialiser  $\mathcal{P}$  avec  $n$  points de  $\Omega$
- 2 Calculer  $\text{Del}(\mathcal{P})$
- 3 Pour chaque sommet intérieur  $x_i$ ,  
 $x_i \leftarrow x_i^*$  et mettre à jour  $\text{Del}(\mathcal{P})$
- 4 Si l'erreur est suffisamment petite, stop ; sinon aller en 2

$$x_i^* = \frac{\sum_{t \in N(x_i)} |t| c_t}{\sum_{t \in N(x_i)} |t|}$$

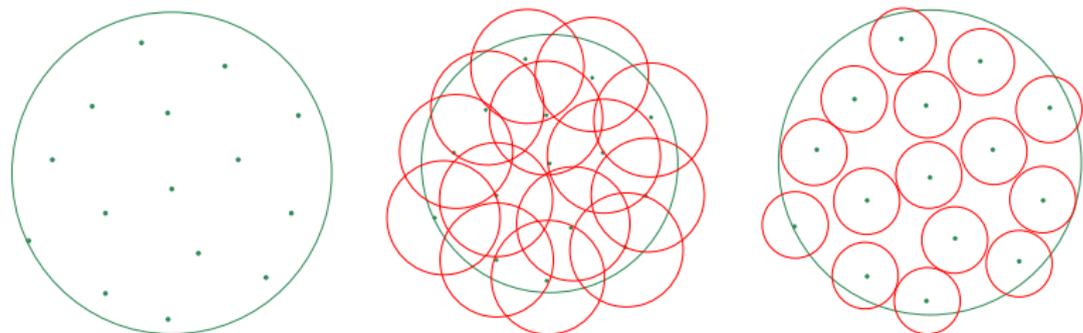


1 Optimalité de la triangulation de Delaunay

2 Echantillons réguliers ( $\epsilon$ -nets) et raffinement de Delaunay

3 Triangulations épaisses

# Définition des $\varepsilon$ -nets



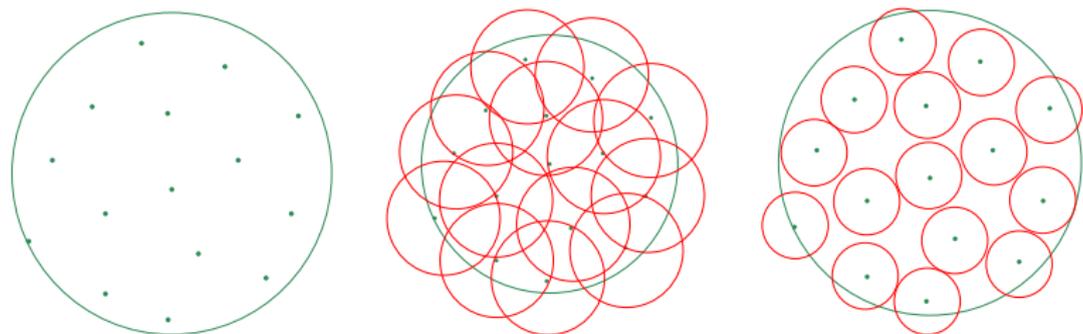
## Définition

Soit  $\Omega$  un sous-ensemble compact de  $\mathbb{R}^d$  et  $\bar{\eta}$  une constante  
Un ensemble fini de points  $P$  est appelé un  $(\varepsilon, \bar{\eta})$ -net de  $\Omega$  ssi

**Densité :**  $\forall x \in \Omega, \exists p \in P : \|x - p\| \leq \varepsilon$

**Séparation :**  $\forall p, q \in P : \|p - q\| \geq \bar{\eta} \varepsilon$

# Existence de nets

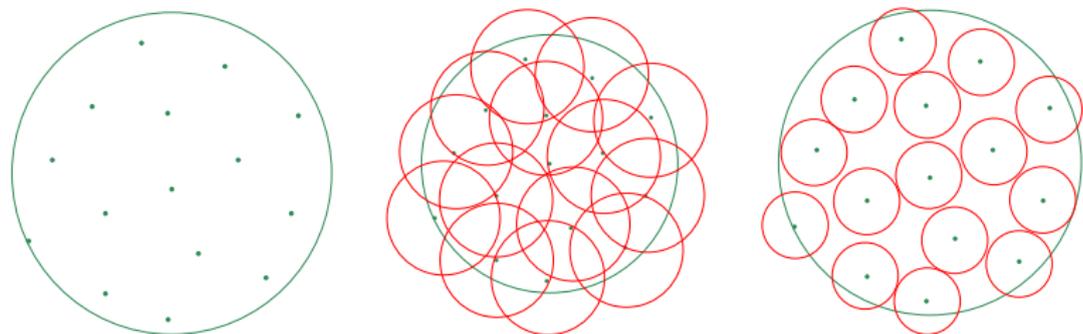


**Lemme** Tout sous-ensemble compact  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  admet un  $(\varepsilon, 1)$ -net.

**Démonstration**

Tant qu'il existe un point  $p \in \Omega$ ,  $d(p, P) \geq \varepsilon$ , insérer  $p$  dans  $P$

## Taille des $\varepsilon$ -nets



**Lemme** Si  $\text{vol}_d(\Omega) = O(1)$ ,  $n(\varepsilon, \bar{\eta}) = \Theta\left(\frac{1}{\varepsilon^d}\right)$

où la constante dans le  $O$  dépend de la géométrie de  $\Omega$  et de  $\bar{\eta}^d$

**Démonstration**

$$n \text{vol}\left(B\left(\frac{\bar{\eta}\varepsilon}{2}\right)\right) \leq \text{vol}\left(\Omega^+_{\frac{\bar{\eta}\varepsilon}{2}}\right) \quad \text{et} \quad \text{vol}(\Omega) \leq n \text{vol}(B(\varepsilon))$$

# Triangulations de Delaunay d' $\varepsilon$ -nets

**Lemme** Soit  $\Omega$  un sous-ensemble borné de  $\mathbb{R}^d$ ,  $P$  un  $(\varepsilon, \bar{\eta})$ -net de  $\Omega$ ,  $d$  et  $\bar{\eta}$  deux constantes positives

Le nombre de  $d$ -simplexes de  $\text{Del}(P)$  qui ont leur CC dans  $\Omega$  (i.e. la restriction de  $\text{Del}(P)$  à  $\Omega$ ) est  $O(n)$  où  $n = |P|$

## Démonstration

1. Observer que le rayon de la boule CC des  $d$ -simplexes est  $\leq \varepsilon$

Il s'ensuit que le nombre de voisins de tout sommet  $p$  est  $n_p = O(2^d)$

2. Le nombre de simplexes incidents à  $p$  est au plus le nombre de faces de l'enveloppe convexe de  $n_p$  points de  $\mathbb{R}^d$

$$n_p^{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor} = O(2^{d^2})$$

## $\varepsilon$ -nets non uniformes

Un ensemble fini de points  $P \subset \Omega$  est un  $\phi$ -net de  $\Omega$  s'il existe deux constantes  $c$  et  $c'$  t. q.

**Densité :**  $\forall x \in \Omega, \exists p \in P : \|x - p\| \leq c \phi(x)$

**Séparation :**  $\forall p, q \in P : \|p - q\| \geq c' \max(\phi(p), \phi(q))$

# Génération de $\phi$ -nets et de maillages

Raffinement de Delaunay

[Chew 1993, Ruppert 1995, Shewchuk 2002]

**Domaine** :  $\Omega = \mathbb{R}^d / \mathbb{Z}^d$  (espace périodique)

**Champ de taille** :  $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  = fonction  $\alpha$ -Lipschitz,  $\alpha < 1$   
 $|\phi(x) - \phi(y)| \leq \alpha \|x - y\|$

$$\forall x \in \Omega, 0 < \phi_0 \leq \phi(x)$$

**Mauvais simplexe**  $\sigma$  :  $\|c_\sigma - p\| > \phi(c_\sigma)$  ( $c_\sigma$  = CC de  $\sigma$ )

## Algorithme

INIT construire un (petit) échantillon initial  $\mathcal{P}_0 \subset \Omega$

TANT QUE  $\exists$  un mauvais simplexe  $\sigma$   
*insert\_in\_Del*( $c_\sigma$ )

RETOURNE un  $\phi$ -net et la triangulation de Delaunay associée

# Génération de $\phi$ -nets et de maillages

Raffinement de Delaunay

[Chew 1993, Ruppert 1995, Shewchuk 2002]

Domaine :  $\Omega = \mathbb{R}^d / \mathbb{Z}^d$  (espace périodique)

Champ de taille :  $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  = fonction  $\alpha$ -Lipschitz,  $\alpha < 1$   
 $|\phi(x) - \phi(y)| \leq \alpha \|x - y\|$

$$\forall x \in \Omega, 0 < \phi_0 \leq \phi(x)$$

Mauvais simplexe  $\sigma$  :  $\|c_\sigma - p\| > \phi(c_\sigma)$  ( $c_\sigma$  = CC de  $\sigma$ )

## Algorithme

**INIT** construire un (petit) échantillon initial  $\mathcal{P}_0 \subset \Omega$

**TANT QUE**  $\exists$  un mauvais simplexe  $\sigma$   
*insert\_in\_Del*( $c_\sigma$ )

**RETOURNE** un  $\phi$ -net et la triangulation de Delaunay associée

# L'algorithme produit un $\varepsilon$ -net de $\Omega$ pour $\phi$

**Séparation** :  $\forall p, q \in \mathcal{P}$

$$\begin{aligned}\forall p \in \mathcal{P}, d(p, \mathcal{P} \setminus \{p\}) &= \|p - q\| \\ &\geq \min(\phi(p), \phi(q)) \\ &\geq \phi_0\end{aligned}$$

$\Rightarrow$  l'algorithme s'arrête

**Densité** :  $\forall x \in \Omega, \exists \sigma, d(x, \mathcal{P}) \leq \|x - c_\sigma\| \leq \phi(c_\sigma) \stackrel{(*)}{\leq} \frac{\phi(x)}{1-\alpha}$

$$(*) \quad \phi(c_\sigma) \leq \phi(x) + \alpha \|x - c_\sigma\| \leq \phi(x) + \alpha \phi(c_\sigma) \Rightarrow \phi(c_\sigma) \leq \frac{\phi(x)}{1-\alpha}$$

$$\text{Taille de l'échantillon} = \Theta \left( \int_{\Omega} \frac{dx}{\phi^d(x)} \right)$$

## Borne supérieure

$$B_p = B(p, r_p), \quad p \in \mathcal{P}, \quad r_p = \frac{\phi(p)}{2(1+\alpha)}$$

$$\int_{\Omega} \frac{dx}{\phi^d(x)} \geq \sum_p \int_{B_p \cap \Omega} \frac{dx}{\phi^d(x)} \quad (\text{les } B_p \text{ sont disjointes})$$

$$\geq \frac{1}{(2+3\alpha)^d} \sum_p \frac{\text{vol}(B_p \cap \Omega)}{r_p^d} \quad (\phi(x) \leq \phi(p) + \alpha \|p - x\|$$
$$\leq 2(1 + \alpha) r_p + \alpha r_p)$$

$$\geq \frac{\text{vol}(B_1)}{(2+3\alpha)^d} |\mathcal{P}|$$

$$= C |\mathcal{P}|$$

## Borne inférieure

- ▶ utiliser les boules  $B'_p(p, \frac{\phi(p)}{1-\alpha})$  qui recouvrent  $\Omega$

$$\text{Taille de l'échantillon} = \Theta \left( \int_{\Omega} \frac{dx}{\phi^d(x)} \right)$$

## Borne supérieure

$$B_p = B(p, r_p), \quad p \in \mathcal{P}, \quad r_p = \frac{\phi(p)}{2(1+\alpha)}$$

$$\int_{\Omega} \frac{dx}{\phi^d(x)} \geq \sum_p \int_{B_p \cap \Omega} \frac{dx}{\phi^d(x)} \quad (\text{les } B_p \text{ sont disjointes})$$

$$\geq \frac{1}{(2+3\alpha)^d} \sum_p \frac{\text{vol}(B_p \cap \Omega)}{r_p^d} \quad (\phi(x) \leq \phi(p) + \alpha \|p - x\|$$
$$\leq 2(1 + \alpha) r_p + \alpha r_p)$$

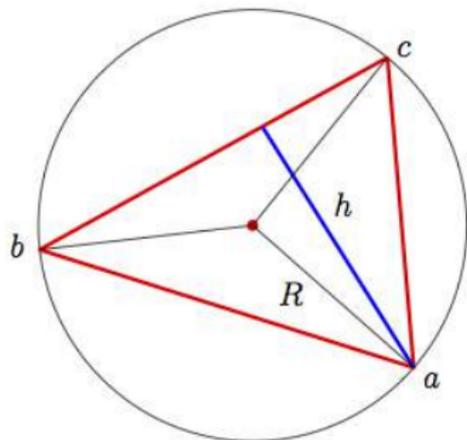
$$\geq \frac{\text{vol}(B_1)}{(2+3\alpha)^d} |\mathcal{P}|$$

$$= C |\mathcal{P}|$$

## Borne inférieure

- ▶ utiliser les boules  $B'_p(p, \frac{\phi(p)}{1-\alpha})$  qui recouvrent  $\Omega$

## Borne sur les angles (cas 2d)



$$\|a - c\| \geq \phi(a) \quad (a \text{ inséré après } c)$$

$$R \leq \phi(c_{abc}) \quad (c_{abc} \text{ non inséré})$$

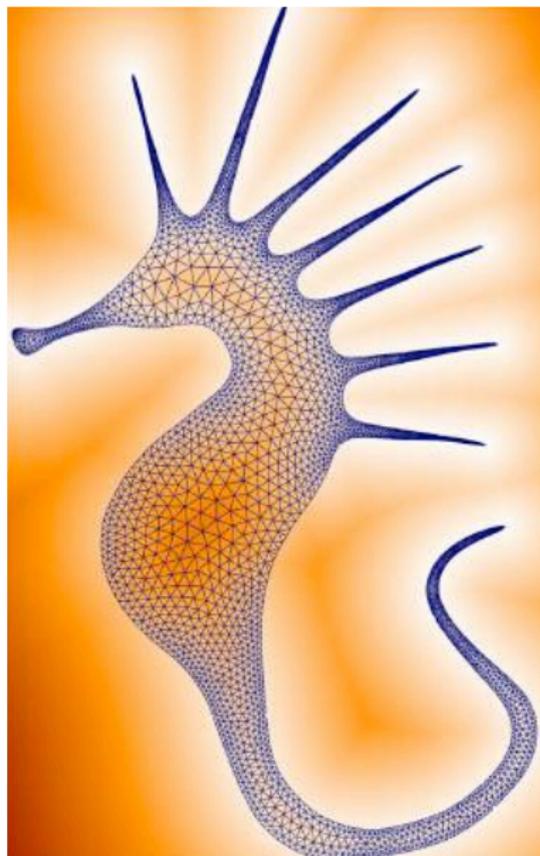
$$\sin b = \frac{\|a-c\|}{2R} \geq \frac{\phi(a)}{2\phi(c_{abc})}$$

$$\forall x \in [abc] : \phi(c_{abc}) \leq \phi(x) + \alpha \|c_{abc} - x\| \leq \phi(x) + \alpha \phi(c_{abc})$$

$$\Rightarrow \phi(c_{abc}) \leq \frac{\phi(x)}{1-\alpha} \quad \Rightarrow \quad \sin b \geq \frac{1-\alpha}{2}$$

# Résultats

$$\phi(x) = \phi_0 + \alpha d(x, \partial\Omega)$$



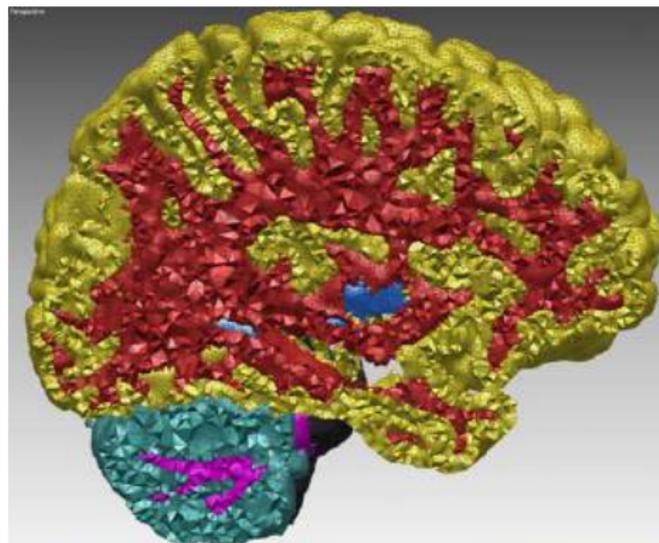
1 Optimalité de la triangulation de Delaunay

2 Echantillons réguliers ( $\epsilon$ -nets) et raffinement de Delaunay

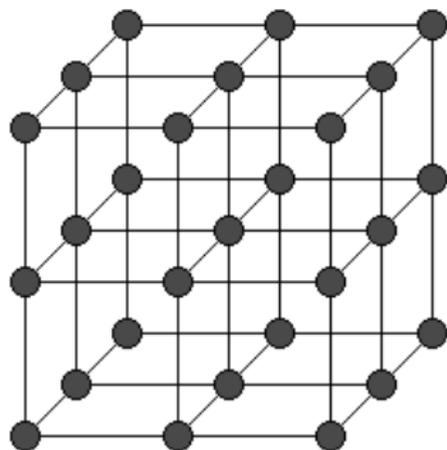
3 **Triangulations épaisses**

# Raffinement de Delaunay en dimensions supérieures

Produit des nets mais pas nécessairement des simplexes épais



## Un net dont la triangulation de Delaunay n'est pas épaisse



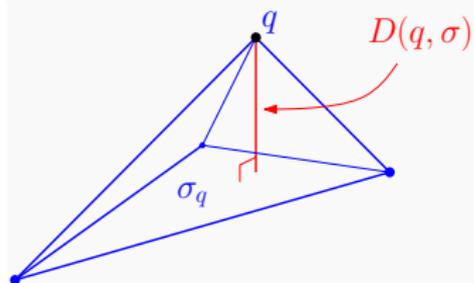
- Chaque face carrée peut être circonscrite par une boule vide
- Ceci reste vrai si on perturbe légèrement les points créant ainsi des simplexes aplatis

# La longue recherche de triangulations épaisses

Topologie Différentielle	[Cairns], [Whitehead], [Whitney], [Munkres]
Géométrie Différentielle	[Cheeger et al.]
Théorie géométrique des fonctions	[Peltonen], [Saucan]

# Qualité des simplexes

## Altitudes



Si  $\sigma_q$  est la face opposée à  $q$  dans  $\sigma$ ,  
l'*altitude* de  $q$  dans  $\sigma$  est

$$D(q, \sigma) = d(q, \text{aff}(\sigma_q)),$$

où  $\sigma_q$  est la face opposée à  $q$

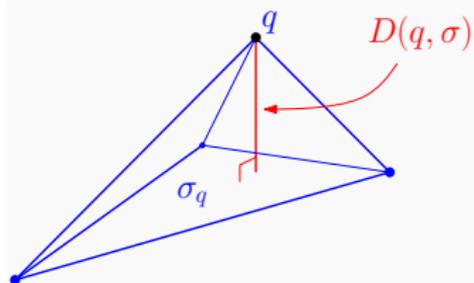
## Definition (Epaisseur)

L'*épaisseur* d'un  $j$ -simplexe  $\sigma$  de diamètre  $\Delta(\sigma)$  est

$$\Theta(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{if } j = 0 \\ \min_{p \in \sigma} \frac{D(p, \sigma)}{j \Delta(\sigma)} & \text{sinon} \end{cases}$$

# Qualité des simplexes

## Altitudes



Si  $\sigma_q$  est la face opposée à  $q$  dans  $\sigma$ ,  
l'*altitude* de  $q$  dans  $\sigma$  est

$$D(q, \sigma) = d(q, \text{aff}(\sigma_q)),$$

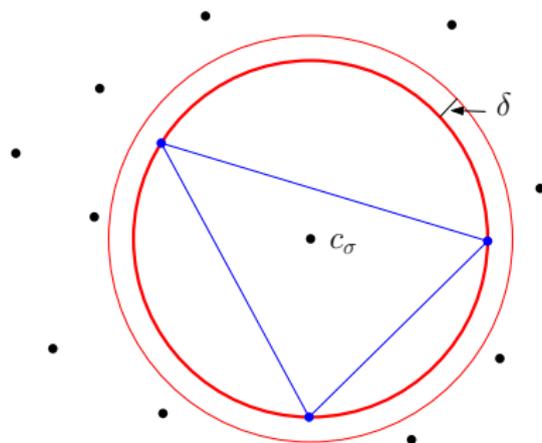
où  $\sigma_q$  est la face opposée à  $q$

## Definition (Epaisseur)

L'*épaisseur* d'un  $j$ -simplexe  $\sigma$  de diamètre  $\Delta(\sigma)$  est

$$\Theta(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{if } j = 0 \\ \min_{p \in \sigma} \frac{D(p, \sigma)}{j \Delta(\sigma)} & \text{sinon} \end{cases}$$

# Protection



## $\delta$ -protection

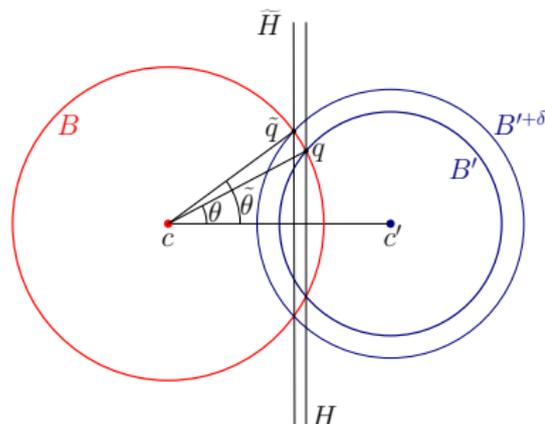
Un simplexe de Delaunay  $\sigma \subset L$  est dit  $\delta$ -protégé si

$$\|c_\sigma - q\| > \|c_\sigma - p\| + \delta \quad \forall p \in \sigma \text{ et } \forall q \in L \setminus \sigma.$$

# Protection implique séparation et épaisseur

Soit  $P$  un  $(\varepsilon, \bar{\eta})$ -net, i.e.

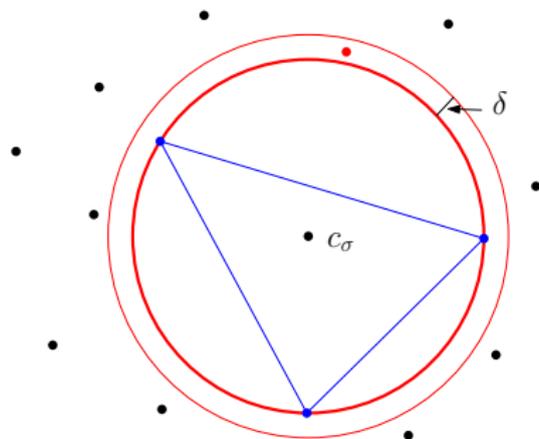
- $\forall x \in \Omega, \quad d(x, P) \leq \varepsilon$
- $\forall p, q \in P, \quad \|p - q\| \geq \bar{\eta}\varepsilon$



si tous les  $d$ -simplexes de  $\text{Del}(P)$  sont  $\bar{\delta}\varepsilon$ -protégés, alors

- **Séparation** of  $P$  :  $\bar{\eta} \geq \bar{\delta}$
- **Épaisseur** :  $\forall \sigma \in \text{Del}(P), \quad \Theta(\sigma) \geq \frac{\bar{\delta}^2}{8d}$

# Mauvaises configurations

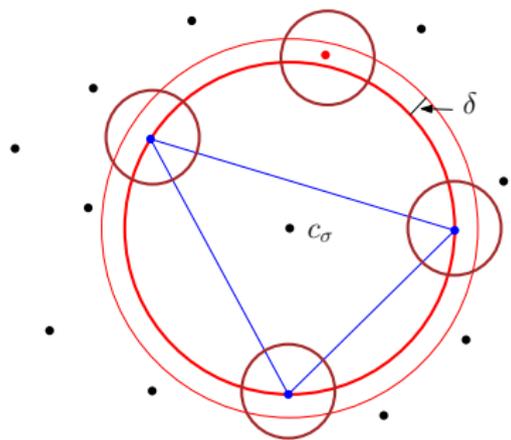


**Mauvaise configuration**  $\phi = (\sigma, p)$

- $\sigma$  est un  $d$ -simplexe avec  $R_\sigma \leq \varepsilon$
- $p \in Z_\delta(\sigma)$  où  $Z_\delta(\sigma) = B(c_\sigma, R_\sigma + \delta) \setminus B(c_\sigma, R_\sigma)$

# Protéger les simplexes de Delaunay par des perturbations aléatoires

**Variables aléatoires :**  $P'$  un ensemble de points aléatoires  $\{p'_1, \dots, p'_n\}$   
où  $p'_i \in B(p_i, \rho), p_i \in P$



## Algorithme

**Entrée :**  $P, \rho, \delta$

**while**  $\exists$  mauvaise configuration  
 $\phi' = (\sigma', p')$  **do**

    rééchantillonner les points de  $\phi'$

    mettre à jour  $\text{Del}(P')$

**Sortie :**  $P'$  et  $\text{Del}(P')$

# Analyse de l'algorithme

## Le lemme local de Lovász

Soit un ensemble de (mauvais) évènements  $A_1, \dots, A_N$ ,  
chacun se produit avec  $\text{proba}(A_i) \leq p < 1$

**Question** : quelle est la probabilité qu'aucun des évènements ne se produise ?

Le cas des évènements indépendants

$$\text{proba}(\neg A_1 \wedge \dots \wedge \neg A_N) \geq (1 - p)^N > 0$$

Que se passe-t-il si les évènements sont faiblement dépendants ?

# Analyse de l'algorithme

## Le lemme local de Lovász

Soit un ensemble de (mauvais) évènements  $A_1, \dots, A_N$ ,  
chacun se produit avec  $\text{proba}(A_i) \leq p < 1$

**Question** : quelle est la probabilité qu'aucun des évènements ne se produise ?

**Le cas des évènements indépendants**

$$\text{proba}(\neg A_1 \wedge \dots \wedge \neg A_N) \geq (1 - p)^N > 0$$

Que se passe-t-il si les évènements sont faiblement dépendants ?

# Analyse de l'algorithme

## Le lemme local de Lovász

Soit un ensemble de (mauvais) évènements  $A_1, \dots, A_N$ ,  
chacun se produit avec  $\text{proba}(A_i) \leq p < 1$

**Question** : quelle est la probabilité qu'aucun des évènements ne se produise ?

Le cas des évènements indépendants

$$\text{proba}(\neg A_1 \wedge \dots \wedge \neg A_N) \geq (1 - p)^N > 0$$

Que se passe-t-il si les évènements sont faiblement dépendants ?

# Lemme Local de Lovász

[Lovász & Erdős 1975]

Si, pour  $i = 1, \dots, N$ ,

- 1  $A_i$  est indépendant de tous les autres évènements excepté  $\leq \Gamma$  d'entre eux
- 2  $\text{proba}(A_i) \leq \frac{1}{e^{(\Gamma+1)}}$        $e = 2.718\dots$

alors

$$\text{proba}(\neg A_1 \wedge \dots \wedge \neg A_N) > 0$$

# Une version constructive du LLL

$\mathcal{P}$  un ensemble fini de variables aléatoires indépendantes

$\mathcal{A}$  un ensemble fini d'évènements qui sont déterminés par les valeurs de certaines variables de  $\mathcal{P}$

Deux évènements sont indépendants ssi ils ne partagent aucune variable

## Algorithme [Moser et Tardos 2010]

pour tout  $p \in \mathcal{P}$  faire

$v_p \leftarrow$  une évaluation aléatoire de  $p$  ;

tant que certains évènements de  $\mathcal{A}$  se produisent pour  $(p = v_p, p \in \mathcal{P})$   
faire

    choisir aléatoirement un tel évènement  $A$  ;

    pour tout  $p \in \mathcal{P}$  faire

        si  $A$  implique  $p = v_p$  alors  $v_p \leftarrow$  une nouvelle évaluation aléatoire de  $p$  ;

retourner  $(v_p)_{p \in \mathcal{P}}$  ;

# Une version constructive du LLL

$\mathcal{P}$  un ensemble fini de variables aléatoires indépendantes

$\mathcal{A}$  un ensemble fini d'évènements qui sont déterminés par les valeurs de certaines variables de  $\mathcal{P}$

Deux évènements sont indépendants ssi ils ne partagent aucune variable

## Algorithme [Moser et Tardos 2010]

**pour tout**  $p \in \mathcal{P}$  **faire**

$v_p \leftarrow$  une évaluation aléatoire de  $p$  ;

**tant que** certains évènements de  $\mathcal{A}$  se produisent pour  $(p = v_p, p \in \mathcal{P})$   
**faire**

choisir (arbitrairement) un tel évènement  $A \in \mathcal{A}$  ;

**pour tout**  $p \in \text{variables}(A)$  **faire**

$v_p \leftarrow$  une nouvelle évaluation aléatoire de  $p$  ;

**retourner**  $(v_p)_{p \in \mathcal{P}}$  ;

# Théorème de Moser et Tardos

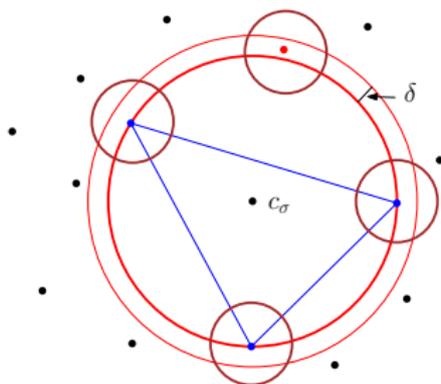
**Hypothèse** : pour tout évènement  $A_i$ ,  $i \in [1, N]$

- 1  $A_i$  est indépendant de tous les autres évènements excepté  $\leq \Gamma$  d'entre eux
- 2  $\text{proba}(A_i) \leq \frac{1}{e^{(\Gamma+1)}}$        $e = 2.718\dots$

## Théorème

- L'algorithme trouve un assignement de valeurs aux variables  $\mathcal{P}$  tel qu'aucun évènement de  $\mathcal{A}$  ne se produise
- L'algorithme rééchantillonne un évènement  $A \in \mathcal{A}$  au plus  $\boxed{\frac{1}{\Gamma}}$  fois en moyenne avant de trouver une telle évaluation
- L'espérance du nombre total de rééchantillonnages est au plus  $\boxed{\frac{N}{\Gamma}}$

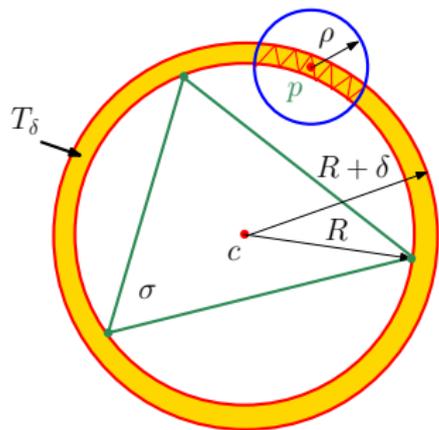
# Application à l'algorithme de protection par perturbation



On a besoin

- de borner la probabilité  $p$  qu'un évènement (mauvaise configuration) se produise
- de borner le nombre maximal  $\Gamma$  d'évènements qui ne sont pas indépendants d'un évènement donné
- de satisfaire la condition :  $p \leq \frac{1}{e^{(\Gamma+1)}}$

# Probabilité que $(\sigma, p)$ soit une mauvaise configuration



$B(c, R)$  la boule circonscrite de  $\sigma$

Zone de protection de  $\sigma$

$T_\delta = B(c, R + \delta) \setminus B(c, R)$

Région de sélection de  $p$  :  $B(p, \rho)$

$$\text{proba}((\sigma, p) \text{ soit une mauvaise configuration}) = \frac{\text{vol}(T_\delta \cap B(p, \rho))}{\text{vol}(B(p, \rho))}$$

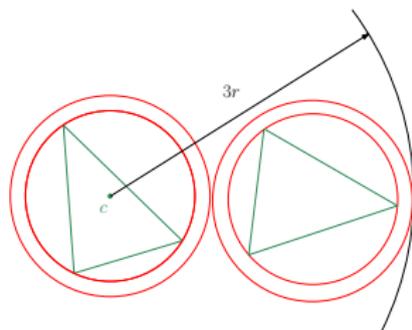
$$\leq C \frac{\delta \rho^{d-1}}{\rho^d}$$

$$\leq C \frac{\delta}{\rho}$$

## Borne sur $\Gamma$

**Lemme** : Un évènement est indépendant de tous les évènements sauf au plus  $\Gamma$ , où  $\Gamma$  est une constante dépendant de  $\bar{\eta}$ ,  $\bar{\rho}$ ,  $\bar{\delta}$  et  $d$

**Démonstration** :



- **Localité** : si 2 configurations  $(\sigma, p)$  et  $(\sigma', p')$  ont un sommet commun, tous les sommets de  $\sigma'$  appartiennent à la boule  $B(c, 3r)$  où  $r = \varepsilon + \rho + \delta$
- **Packing** : Puisque  $P$  est  $(\eta - 2\rho)$ -séparé,

$$\Gamma = \left( \frac{3r + \frac{\eta - 2\rho}{2}}{\frac{\eta - 2\rho}{2}} \right)^{d(d+2)} = \left( 1 + 6 \frac{(1 + \bar{\rho} + \bar{\delta})(1 + \bar{\rho})}{\bar{\eta} - 2\bar{\rho}} \right)^{d(d+2)}$$

# Résultat principal

Sous la condition

$$\frac{eC}{\sqrt{d}} (\Gamma + 1) \delta \leq \rho \leq \frac{\eta}{4}$$

l'algorithme s'arrête

## Garanties sur la sortie

- ▶  $d_H(P, P') \leq \rho$
- ▶ les  $d$ -simplexes de  $\text{Del}(P')$  sont  $\delta$ -protégés
- ▶ et ont donc une épaisseur positive

# Résultat principal

Sous la condition

$$\frac{eC}{\sqrt{d}} (\Gamma + 1) \delta \leq \rho \leq \frac{\eta}{4}$$

l'algorithme s'arrête

## Garanties sur la sortie

- ▶  $d_H(P, P') \leq \rho$
- ▶ les  $d$ -simplexes de  $\text{Del}(P')$  sont  $\delta$ -protégés
- ▶ et ont donc une épaisseur positive

# Complexité de l'algorithme

- Le nombre de rééchantillonnages exécutés par l'algorithme est au plus

$$\frac{C'n}{\Gamma} \leq C'' n$$

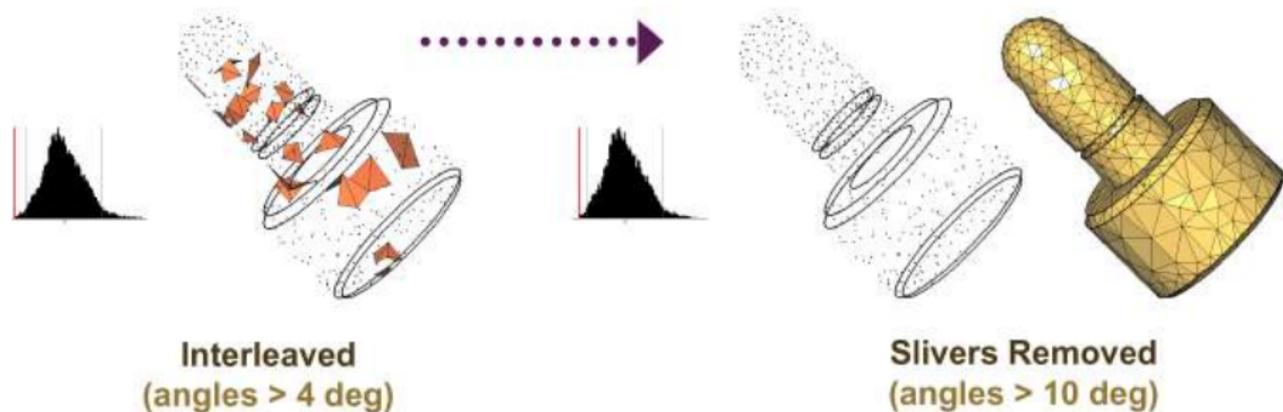
où  $C''$  dépend de  $\bar{\eta}$ ,  $\bar{\rho}$ ,  $\bar{\delta}$  et (exponentiellement)  $d$

- Chaque rééchantillonnage consiste à perturber  $O(1)$  points
- Mettre à jour la triangulation de Delaunay après chaque rééchantillonnage prend un temps  $O(1)$
- La complexité moyenne est **linéaire dans le nombre de points**

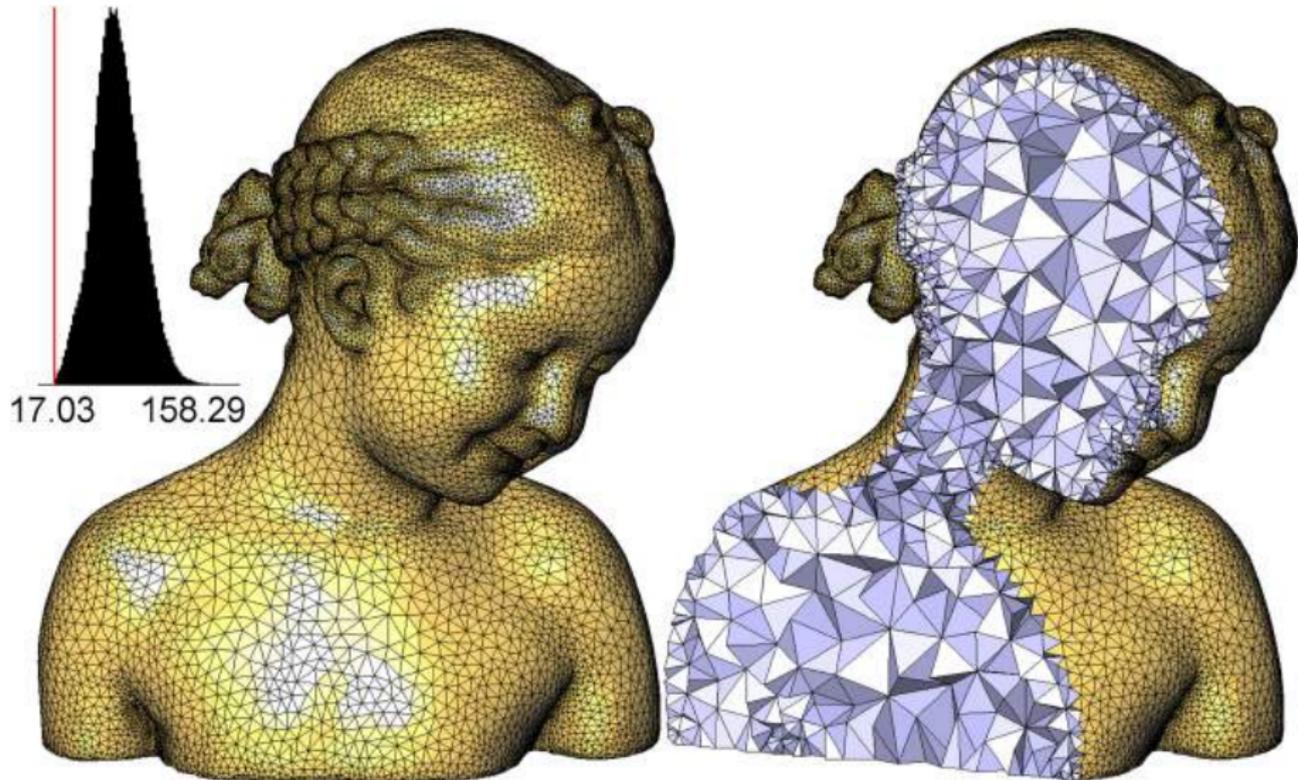
## De la théorie à la pratique

- La borne sur  $\Gamma$  est minuscule, ce qui conduit à des garanties faibles sur la protection et l'épaisseur
- Le comportement observé en pratique est meilleur que prédit par la théorie
- Des heuristiques utiles ont été proposées

# Combiner perturbation des sommets et optimisation de maillages



[Tournois, Srinivasan, Alliez, 2009]



13% fewer points than DR

