DE LA PHYSIQUE STATISTIQUE
AUX SCIENCES SOCIALES

VIII. INCERTITUDE RADICALE, COMPLEXITE, STABILITE MARGINALE

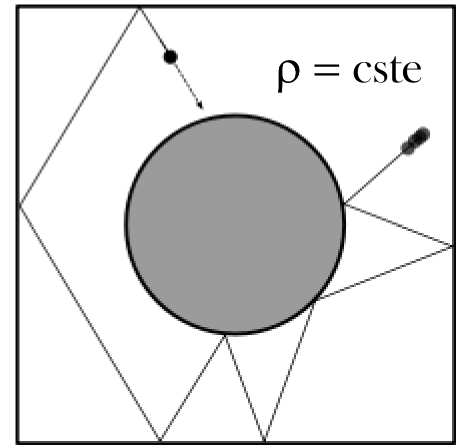
Chaire de l'Innovation L. Bettencourt

Jean-Philippe Bouchaud

1. Introduction

- Comment peut-on être « rationnel » dans un monde fondamentalement incertain et complexe ? Une approche scientifique est-elle possible, et sous quelle forme ?
- F. Knight, J. M. Keynes, H. Simon, N. Taleb, ...: « radical uncertainty », « black swans », « unknown unknowns », etc.
- Quel éclairage apporte la modélisation et la compréhension récente des systèmes « complexes » ?

Les détails d'une tornade (temps de formation, trajectoire) dependent de perturbations mineures telles le battement des ailes d'un papillon lointain, plusieurs semaines auparavant



Le billard de Sinai

1. Le proverbial « effet papillon »

- La physique du XIXème siècle: systèmes simples, trajectoires déterministes
- Mais en réalité (presque) tous les systèmes sont « chaotiques »

→ Croissance exponentielle des erreurs (paramètres, conditions initiales) – l'effet papillon

- Les trajectoires individuelles sont *inconnaissables* mais la <u>statistique</u> de ces trajectoires peut être déterminée et est souvent très simple

$$\pi_t = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi^{-k-1} A\mathbb{E}_t[\xi_{t+k+1} - \xi_{t+k}]$$

Inflation — Espérance — Chocs futurs de productivité

Cf. cours 5

There are known knowns;
These are things we know that we know.
There are known unknowns;
That is to say,
There are things that we now know we don't know.
But there are also unknown unknowns;
There are things we do not know we don't know.

D. Rumsfeld (2002)

1. « Unknown unknowns » et cygnes noirs

- La physique statistique (d'équilibre) et la théorie économique classique s'appuient sur des processus stochastiques stationnaires et ergodiques
- Peut-on vraiment connaitre tous les états futurs <u>et</u> leurs probabilités ? (e.g. le smart phone en 1980 ?) – <u>Risque</u> vs. <u>Incertitude</u> (Knight, Keynes, Taleb)
- Certains marchés dérivés (e.g. options, CDS) renseignent *partiellement* sur les probabilités d'évènements futurs (→ incitation à plus de marchés dérivés)
- Mais peut-on croire à l'agrégation des marchés quand l'information est <u>fondamentalement</u> inconnaissable? (*unknown unknowns* ou « cygnes noirs »)

The “Wilderness” of Bounded Rationality (Sims, Sargent):

There are infinitely many ways to be boundedly rational and only one way to be rational.

Hence, the rational choice model disciplines researchers in their modelling of economic phenomena (→ “As If”)

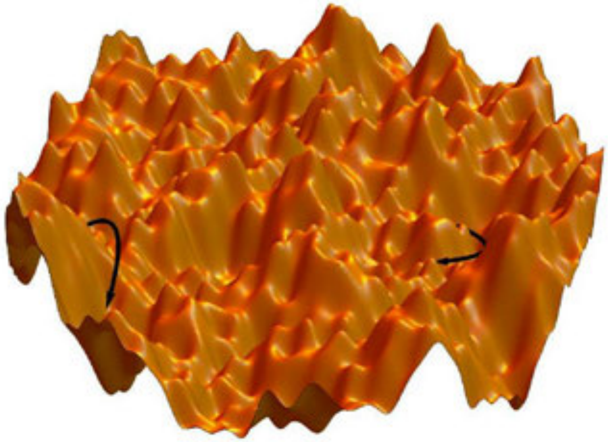
Est-il vraiment raisonnable de décrire cette foule comme un fluide d’agents optimisateurs auto-cohérents, comme supposé par le MFG?

1. La « jungle » de rationalité limitée

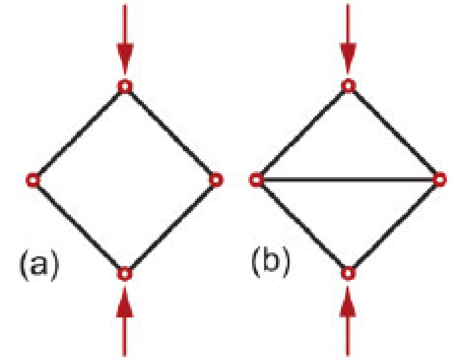
- L’hypothèse d’agents optimisateurs rationnels suppose une connaissance partagée du monde (je sais ce que tu sais et que tu sais ce que je sais…) et une capacité de calcul irréaliste dès que le problème est un peu complexe, cf. infra

→ Cf. Echecs : complexité combinatoire, ou « jeux à champ moyen » (MFG) : connaissance partagée et complexité analytique

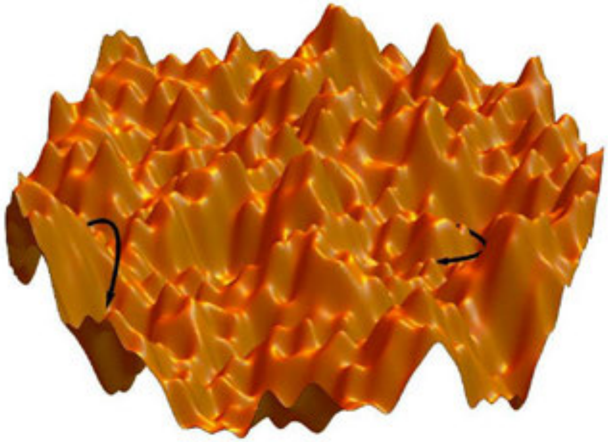
- Herbert Simon : « Rationalité limitée » et « satisficing solutions » (solutions sous-optimales « sati-suffisantes »)
- *As If* (agrégation/apprentissage) préférable à la jungle de la rationalité limitée ?



© C. Cammarotta



2. Systèmes « complexes »

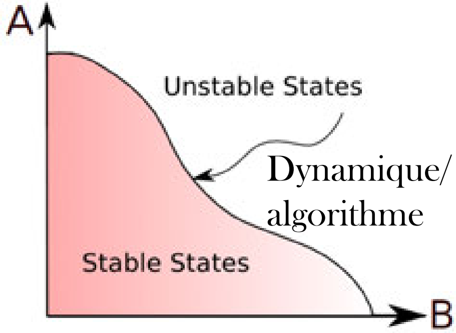


© C. Cammarotta

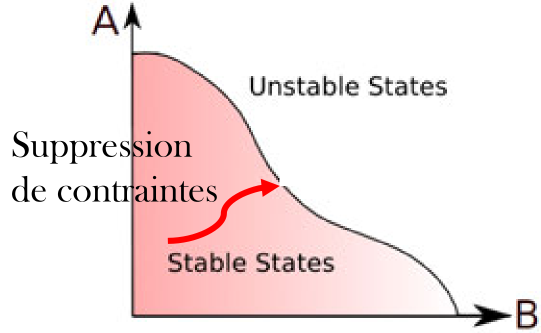
* Parisi : Physics, Complexity and Biology (2007).

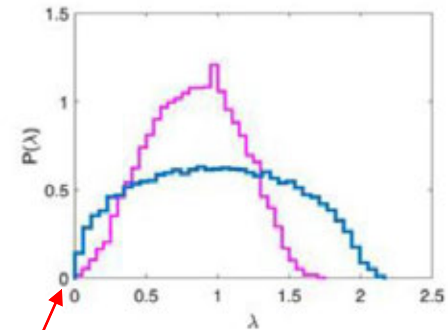
2. Systèmes « complexes » : un double effet papillon

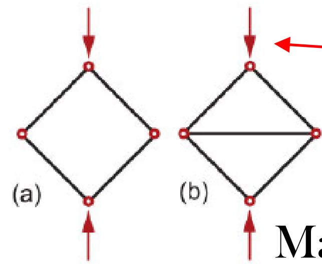
- De nombreux systèmes complexes sont tels que les probabilités elles-mêmes dépendent de manière critique des paramètres/ conditions initiales/du temps (une définition de la complexité?*)
- Les *probabilités* sont inconnaissables (même quand tous les états du monde sont connus) et changent aléatoirement au cours du temps (non-ergodicité) → Probabilité des probabilités
- Les états typiques de ces systèmes sont « fragiles »



© Muller & Wyart





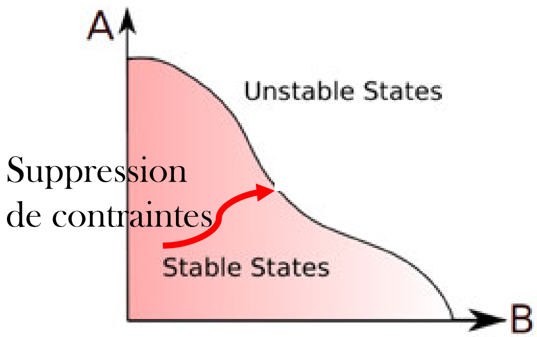


Modes marginalement stables

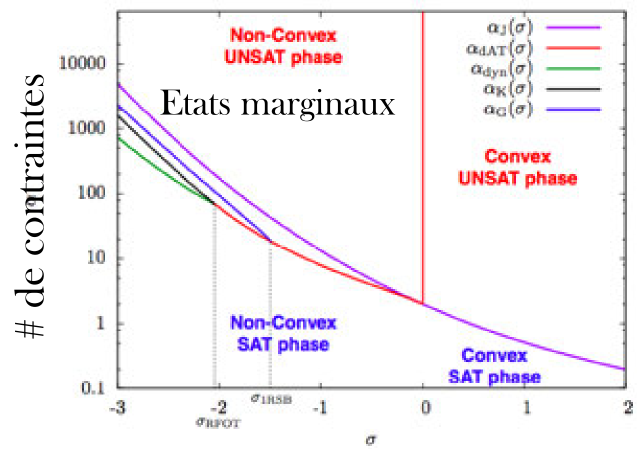
Maxwell (1864)

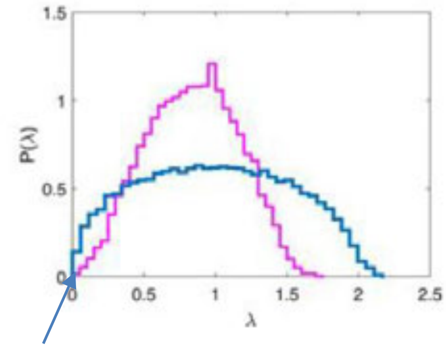
2. Systèmes complexes : stabilité marginale

- Scenario générique : la dynamique (réelle ou algorithmique) s'arrête sur des états « marginalement stables »
- De même, la suppression progressive de contraintes conduit à un état limite marginalement stable (« isostaticité »)
- <u>Stabilité marginale</u> : le spectre de valeurs propres λ de la matrice de stabilité linéaire « touche » zéro
- (Pour de nombreux systèmes <u>simples</u>, l'équilibre atteint est <u>stable</u>)



© Muller & Wyart

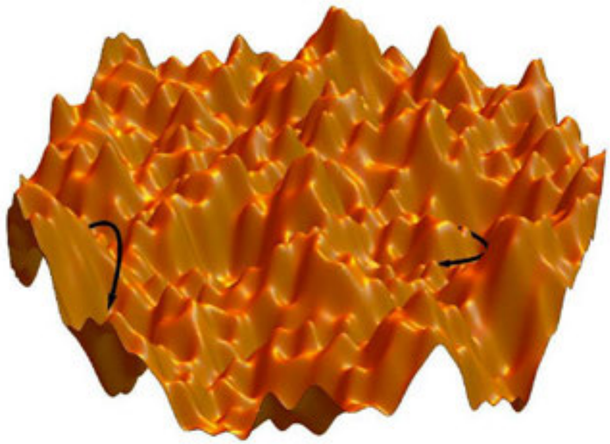




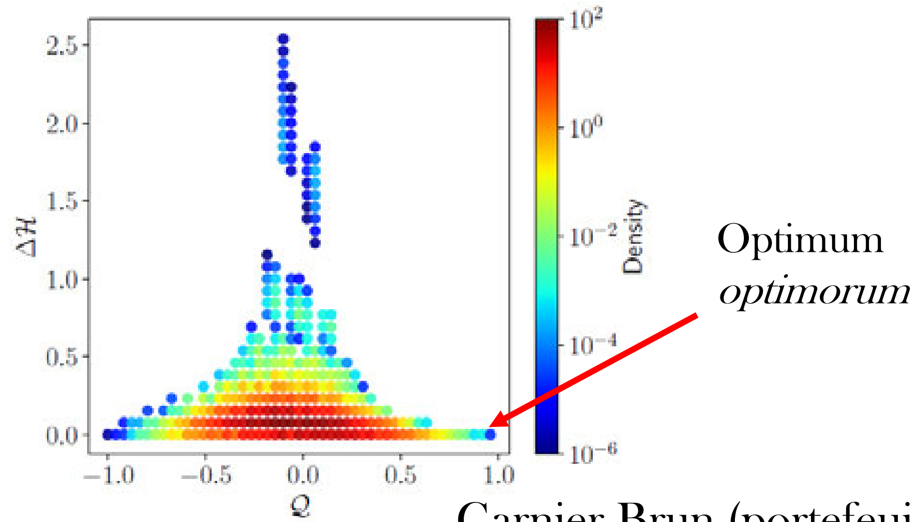
Modes
marginalement
stables

2. Systèmes complexes : stabilité marginale

- <u>Exemples :</u>
- Matière granulaire : transition de « Jamming » → réorganisations, avalanches
- Ecologie : # d'espèces sature la borne de May → extinctions de masse (cf. 7)
- Economie : # firmes sature la condition de Hawkins-Simon → crises (cf. 7)
- Finance : si # de marchés dérivés = # états du monde → instabilité systémique (Hommes et al., Marsili et al.)
- CSP dans la phase UNSAT non convexe (cf. 7, F. Zamponi)
- Verres de spin (cf. infra)



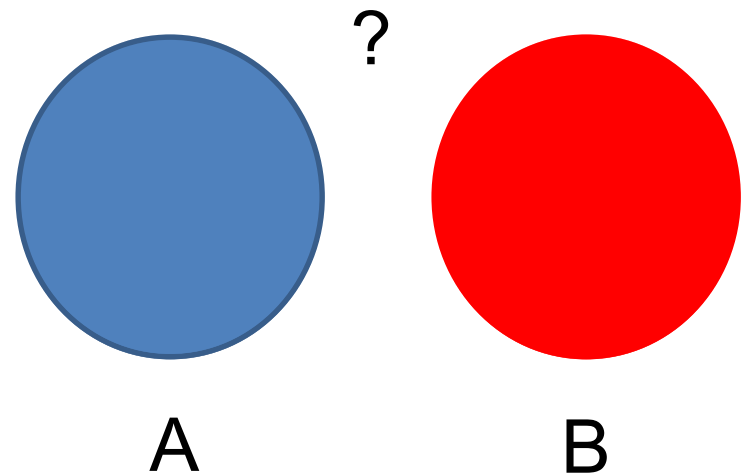
© C. Cammarotta



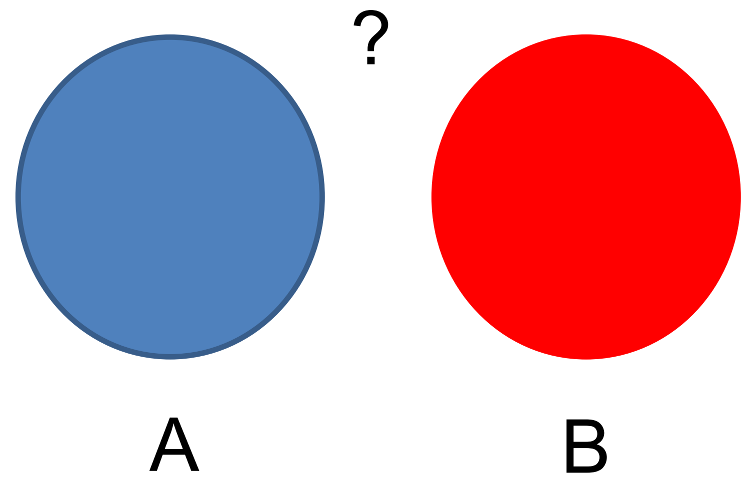
Garnier-Brun (portefeuilles)

2. Systèmes complexes : Prolifération de solutions, « chaos »

- Scenario générique : le nombre d'optimums locaux est exponentiellement grand, et très différents les uns des autres
- L'optimum *optimorum* est exponentiellement difficile à trouver, <u>mais</u> de performance très proche de celle d'optimums secondaires → « satisficing »
- Ces optimums sont hyper-sensibles à la valeur des paramètres du modèle (« chaos », cf. infra) → l'hypothèse de connaissance partagée est intenable
- La dynamique explore de nombreux optimums de manière lente et intermittente → non-ergodicité, équilibres « ponctués »



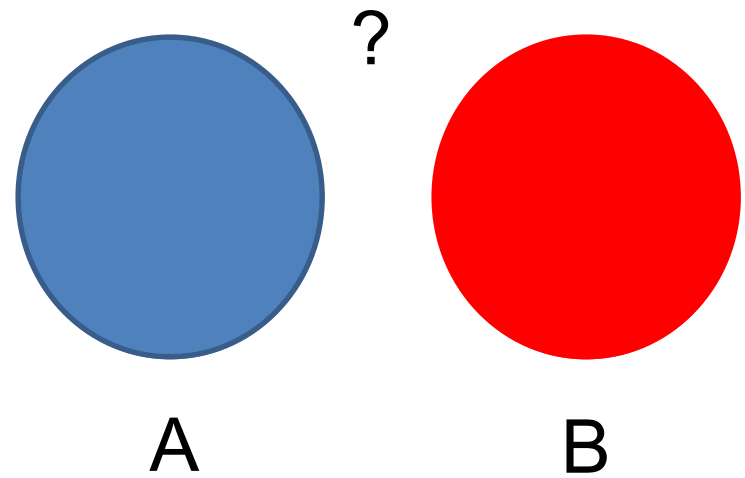
3. Un exemple canonique : les « verres de spin »



3. Un exemple canonique : les « verres de spin »

- Un modèle d'optimisation « métaphorique » : répartition de N firmes dans 2 régions A et B
- Les firmes sont soit en symbiose ($J>0$) soit en concurrence ($J<0$)
- Elles peuvent s'établir soit dans la région A ($S=1$), soit dans la région B ($S=-1$)
- Production totale : $Y = Y_0 + \sum_{ij} J_{ij} S_i S_j$
- J_{ij} aléatoires : modèle « SK » (champ moyen) des verres de spin

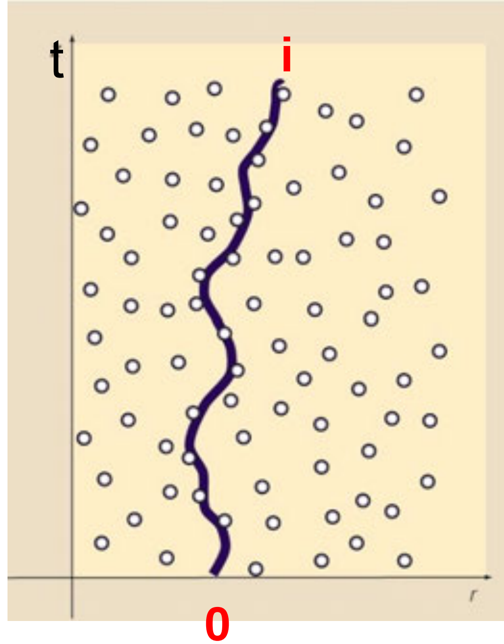
$$Y = Y_0 + \sum_{ij} J_{ij} S_i S_j$$

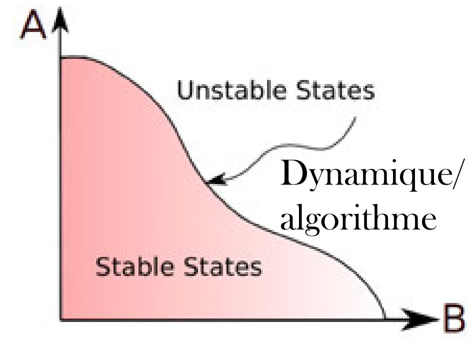


3. Un exemple canonique : les « verres de spin »

- L'optimisation de Y p/r aux variables S_i est un problème « NP-hard » : les meilleurs algorithmes connus nécessitent un temps exp(aN) pour trouver la configuration optimale
- Même un planificateur social bienveillant ne peut trouver la configuration optimale quand N est (un peu) grand
- Celui-ci *tâtonne,* mais son algorithme est piégé dans un optimum local, qui peut néanmoins être « sati-suffisant »

$$Y = Y_0 + \sum_{ij} J_{ij} S_i S_j$$





© Muller & Wyart

3. Optimisation fragile

- Quand bien même on pourrait trouver les S_i optimaux, une petite modification des J_{ij} (d'ordre $N^{-1/6}$) change complètement la configuration optimale (« chaos ») – cf. polymères dirigés, cours 4
- Non seulement le problème est difficile, mais il doit être parfaitement spécifié – toute rationalité est *de facto* limitée
- Les algorithmes de type « descente de gradient » conduisent à des configurations marginalement stables + dynamique d'avalanches

In standard macroeconomic models rational expectations can emerge ***in the long run****, provided the agents' environment remains stationary for a sufficiently long period.*

Evans & Honkapohja, 2013; cf. Marcet & Sargent, 1989

4. Apprentissage dans un monde complexe

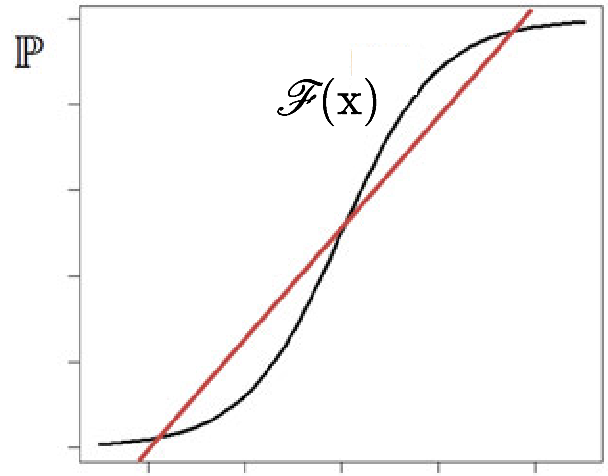
In standard macroeconomic models rational expectations can emerge ***in the long run****, provided the agents' environment remains stationary for a sufficiently long period.*

Evans & Honkapohja, 2013; cf. Marcet & Sargent, 1989

In the long run, we are all dead (Keynes)

4. Apprentissage dans un monde complexe

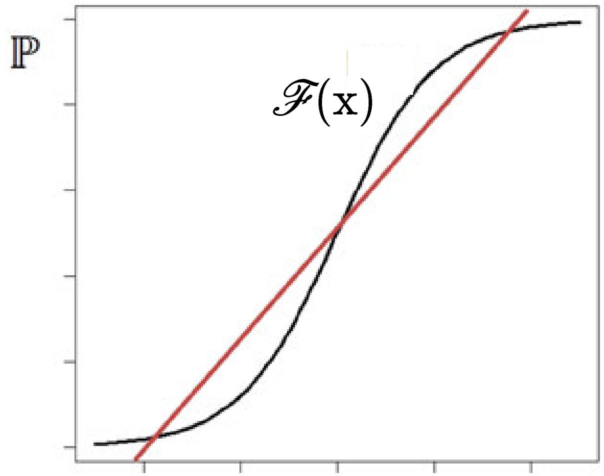
- <u>L'apprentissage</u> : Une réponse à la rationalité limitée ?
- Sous certaines hypothèses restrictives (e.g. stationnarité, unicité, simplicité), l'équilibre en anticipations rationnelles peut être atteint par apprentissage (mais en combien de temps? Le monde change…)
- A. Un monde « simple » mais autoréférentiel; non-ergodicité
- B. Jeux complexes à deux joueurs → equilibres multiples, chaos
- C. Jeux complexes à N joueurs (jeu de la minorité, jeu type SK)



R. Farmer, JPB

4 – A. Apprentissage autoréférentiel

- Chaque agent **i** cherche à apprendre la probabilité d'un évènement binaire : $\mathbb{P} = \mathbb{P}(+)$, $\mathbb{P}(-) = 1 - \mathbb{P}(+)$
- L'apprentissage oublie le passé lointain $P_{i,t+1} = (1 - \alpha)\, P_{i,t} + \alpha\, \Theta_t$ (avec $\Theta = 1$ si + est réalisé), avec $P_{i,0}$ aléatoire
- La probabilité « vraie » est auto-réalisatrice et fonction de la moyenne des croyances : $\mathbb{P} = \mathscr{F}(\mathbb{E}_i[P_i])$ avec $\mathscr{F}(x)$ croissante
- Les agents meurent avec prob. δ et renaissent avec un *prior* $\in [0,1]$

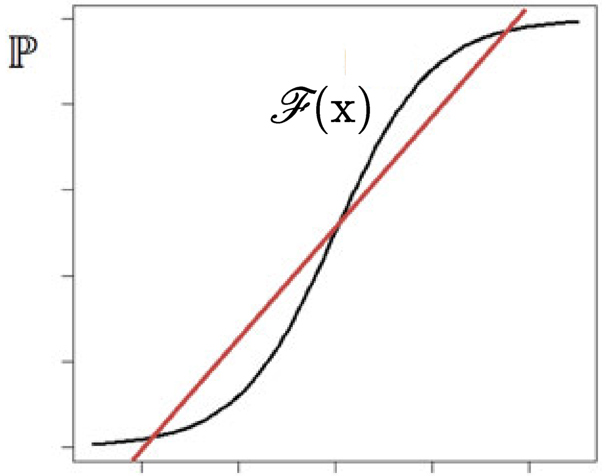


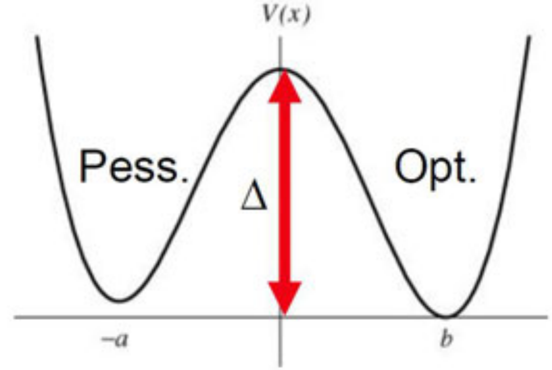
4 – A. Apprentissage autoréférentiel

- Le cas $\mathscr{F}(x)=x$: les fourmis recruteuses d'Alan Kirman
- $\mathbb{P}$ reste distribué à temps longs (probabilité de la probabilité)
- La distribution stationnaire de $\mathbb{P}$ est donnée par une loi beta:

$$\mathscr{P}(\mathbb{P})=A(\kappa)\ \mathbb{P}^{\kappa-1}\ (1-\mathbb{P})^{\kappa-1} \qquad \kappa=\delta/\alpha^2$$

- Probabilité piquée en 0,1 qd $\kappa \rightarrow 0$, avec un temps de bascule δ^{-1}
- Quasi non-ergodicité et désaccords persistants → marché actif et apparition d'inégalités fortes (cf. R. Farmer, JPB)





4 – A. Apprentissage autoréférentiel

- Le cas $\mathscr{F}(x)$ sigmoidal : 2 points fixes stables
- Longues périodes d'optimisme puis de pessimisme avec un temps de bascule qui dépend de manière exponentielle des paramètres :

$$\tau \sim \exp(\Delta/\alpha^2)$$

- La probabilité de « krach » est <u>inconnaissable</u> à α faible, et ne peut pas être correctement estimée par les marchés (cf. 5, DSGE «+»)
- Quasi non-ergodicité (forte séparation des échelles de temps)

4 – B. Apprentissage : Jeux complexes (2 joueurs)

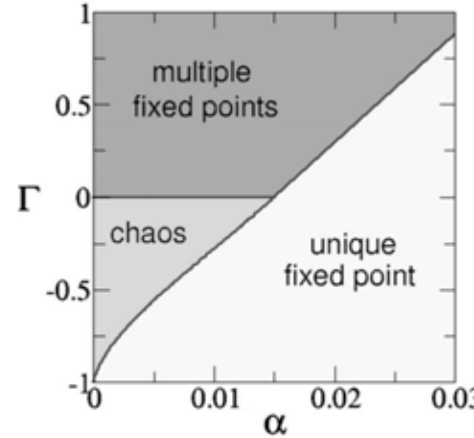
- Alice (A) et Bob (B) jouent à un jeu dont le règles sont stables dans le temps où chacun a N stratégies **i=1,. . ., N et j=1,. . ., N**
- Les gains respectifs sont donnés par des matrices Π^A_{ij} Π^B_{ji}, avec $\mathbb{E}[\Pi^X_{ij}] = 0, \quad \mathbb{V}[\Pi^X_{ij}] = 1, \qquad \mathbb{E}[\Pi^A_{ij}\Pi^B_{ji}] = \Gamma$ tel que Γ>0 = coopération
- Alice et Bob jouent les stratégies aléatoirement, avec des probabilités qui peuvent dépendent du temps

$$(p^A_1, p^A_2, \ldots p^A_N), \qquad (p^B_1, p^B_2, \ldots p^B_N)$$

$$\begin{cases} R_i^A(t) &= (1-\alpha)R_i^A(t-1) + \alpha \sum_j \Pi_{ij}^A p_j^B(t-1) \\ R_j^B(t) &= (1-\alpha)R_j^B(t-1) + \alpha \sum_i \Pi_{ji}^B p_i^A(t-1) \end{cases}$$

$$p_i^A(t) = \frac{1}{Z^A(t)} e^{\beta R_i^A(t)} \qquad p_j^B(t) = \frac{1}{Z^B(t)} e^{\beta R_j^B(t)}$$

Equations de Sato-Crutchfield

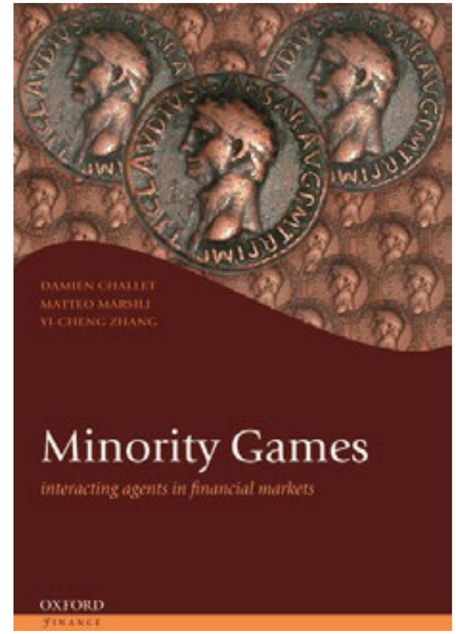


β

Galla-Farmer, cf. séminaire

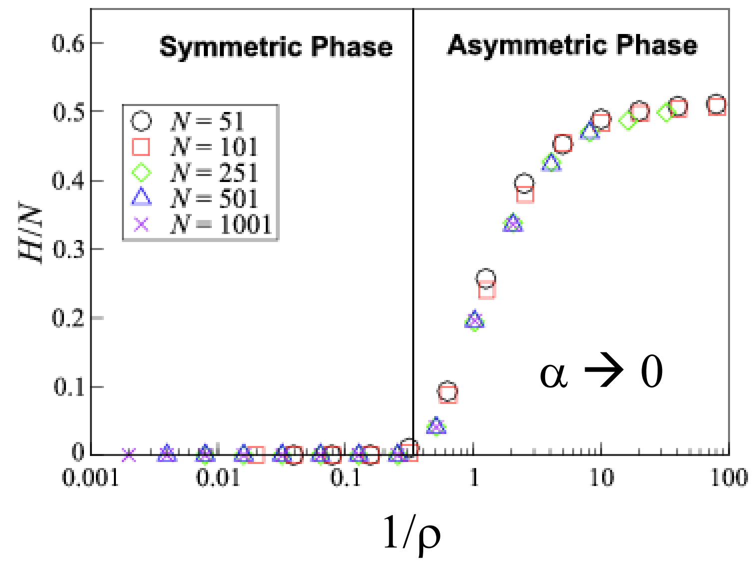
4 – B. Apprentissage : Jeux complexes (2 joueurs)

- Alice et Bob estiment la performance des stratégies en moyennant leur gains sur un grand nombre de jeux entre $t-1$ et t
- Les probabilités choisies évoluent selon la « théorie du choix » (ou modèle « Logit »), avec un paramètre β
- Quelle est la dynamique à temps longs ? (en supposant Π stable)
- Un diagramme des phases très riche : point fixe unique, équilibres multiples (cf. SK), cycles limites et chaos (cf. cours 7)



4 – C. Apprentissage : Jeux multi-agents

- <u>Le jeu de la « minorité »</u> (Challet, Marsili, Zhang)
- Chaque agent $i=1,\ldots, N$ doit au temps t décider $S_i = \pm 1$ en fonction d'une information commune $\mu_t = 1,\ldots, P$ $(\rho = N/P)$
- L'agent i gagne si il/elle a fait le choix minoritaire, et perd sinon
- Chaque agent dispose d'un certain nombre de stratégies $\mu \rightarrow S_i$ aléatoires parmi 2^P mais fixes dans le temps, entre lesquelles il/elle choisit en fonction des performances passées, cf. supra.



4 – C. Apprentissage : Jeux multi-agents

- <u>Le jeu de la « minorité »</u> (Challet, Marsili, Zhang)
- Pour $\rho = N/P$ faible ($< \rho_c$) le jeu est prévisible : μ permet de prédire le signe de la moyenne **m** des S_i ($H>0$)
- Pour $\rho > \rho_c$ le jeu devient imprévisible : aucune corrélation statistique **H** entre μ et **m** ne survit
- Le point critique $\rho = \rho_c$ est marginalement stable (hyper-sensible à de petites pertubations) et <u>attractif</u> (N↑ tant que le jeu est prévisible)

4 – C. Apprentissage : Jeux multi-agents

- Le jeu « SK » (Garnier-Brun, Benzaquen, JPB)
- N agents i=1,. . ., N ; deux stratégies $S_i = \pm 1$
- Gain de l'agent i quand les autres jouent S_j : $S_i \sum_j J_{ij} S_j$
- Matrice d'influence J_{ij} (non symétrique): coopération/compétition
- Evolution donnée par Sato-Crutchfield

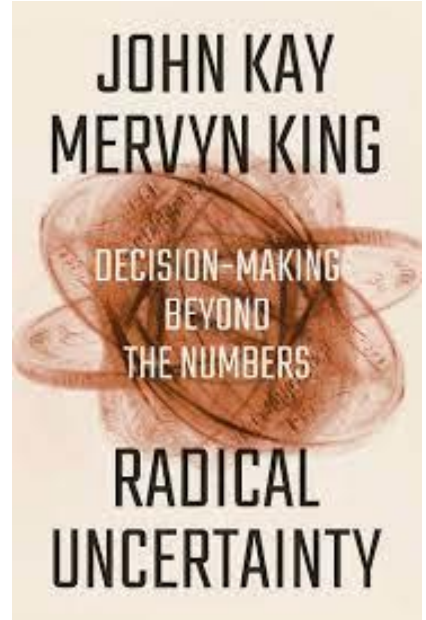
→ $m_i = \mathbb{E}[S_i]$ vérifie les équations dites de champ moyen « naif » :

$$m_i = \tanh[\beta \textstyle\sum_j J_{ij}\, m_j]$$

$$\boxed{m_i = \tanh[\beta \textstyle\sum_j J_{ij}\, m_j]}$$

4 – C. Apprentissage : Jeux multi-agents

- $\beta < \beta_c$: une seule solution triviale, $m_i = 0$ (stratégies aléatoires)
- $\beta > \beta_c$: un nombre de solutions ~ $\exp(a(\beta)N)$ régissant la probabilité $(1+m_i)/2$ que chaque agent joue $S_i = +1$
- Solutions marginalement stables, chaotiques p/r aux J_{ij}
- « Complexité Radicale » : Un modèle d'apprentissage qui converge vers un équilibre <u>fragile</u> (SOC) où les probabilités sont elles-mêmes inconnaissables (et dont on connait mal la mesure)



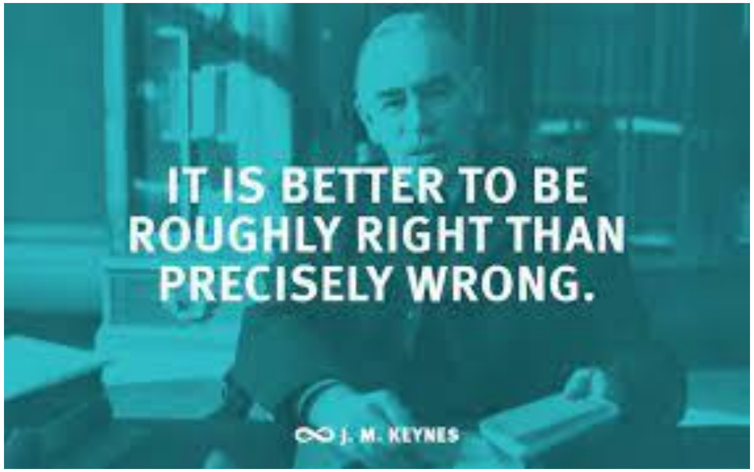
7. Conclusion: « Complexité Radicale »

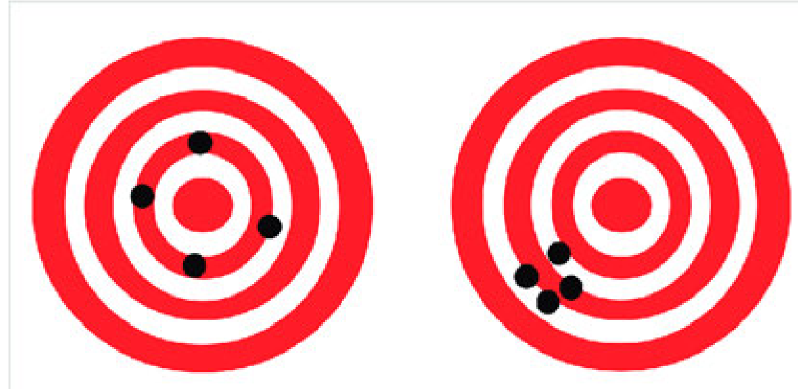
7. Conclusion: « Complexité Radicale »

- <u>Pourquoi ne sommes nous pas tous d'accord</u> ? (ce qui justifie l'existence des marchés et leur permet de fonctionner) :
- Problèmes complexes et sensibles aux paramètres/spécifications
  → solutions « sati-suffisantes » hétérogènes (mais de mesure inconnue !)
- L'apprentissage souffre des mêmes problèmes (jeux complexes)
- Comment agréger ces décisions hétérogènes en présence d'interactions?
- Equilibres multiples, dynamique lente → modèles d'agents confrontés aux mêmes difficultés (ergodicité?)

7. Conclusion: « Complexité radicale »

- Des solutions optimales souvent <u>fragiles</u> (marginalement stables), cf. :
- Le problème du restaurant (RFIM, cours 6)
- Les chaines d'approvisionnement minimales (Leontieff, cours 7)
- Les équilibres écologiques (May, cours 7)
- L'endettement en excès (Minsky) → la crise de 2008
- Les marchés financiers sont-ils marginalement stables ? (e.g. MG)
- Le vaste monde des « Constraint Satisfaction Problems » (cf. situations socio-économiques de ce type)





* *The 2008 crisis was not predicted because economic theory predicts that such events cannot be predicted* (R. Lucas, 2009)

7. Conclusion: « Complexité radicale »

- Mais dans ces conditions, quel est le statut de l'approche scientifique ?
- Privilégier les scenarios possibles (même sans probabilités) aux prédictions quantitatives (cf. Keynes)
- Identifier les mécanismes à l'œuvre, en particulier les boucles de rétroaction déstabilisatrices et les instabilités systémiques
- Remplacer l'obsession de l'optimisation au profit de la résilience, en intégrant au mieux les instabilités potentielles
- Imaginer des signaux précurseurs permettant d'anticiper les effets collectifs*

Pour aller plus loin

- Références: voir page d'accueil du cours
- Séminaire: Doyne Farmer
  When Do Games and Economies Converge to Equilibrium?