COHOMOLOGIE DES GROUPES DISCRETS

Jean-Pierre Serre

INTRODUCTION

Soit Γ un *sous-groupe discret* d'un groupe localement compact G. Lorsque G est un groupe de Lie réel connexe, de sous-groupe compact maximal K, l'espace $T = G/K$ est homéomorphe à un espace euclidien $\mathbf{R}^n$ et l'action de Γ sur T peut être utilisée pour l'étude de groupes de cohomologie $H^q(\Gamma)$ de Γ. Si par exemple Γ est sans torsion, il opère librement sur T, et les $H^q(\Gamma)$ s'identifient aux groupes de cohomologie correspondants de la variété $X_\Gamma = \Gamma\backslash T$; la *dimension cohomologique de* Γ est $\leq$ n. Si de plus G/Γ est compact, la formule de Gauss-Bonnet, appliquée à X_Γ, permet d'exprimer la caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi(\Gamma)$ de Γ comme le volume $\mu_G(G/\Gamma)$ de G/Γ par rapport à une certaine mesure invariante μ_G sur G, indépendante de Γ; on peut appeler μ_G la *mesure d'Euler-Poincaré* de G.

Ce qui précède s'applique en particulier au *groupe des points entiers* d'un groupe algébrique L sur le corps $\mathbf{Q}$: on prend pour G le groupe $L(\mathbf{R})$ des points réels de L. Par contre, cela ne s'applique pas aux groupes plus généraux que sont les *groupes* S-*arithmétiques*, où l'on accepte des dénominateurs non triviaux. Ainsi, le groupe $\Gamma = SL_2(\mathbf{Z}[\frac{1}{p}])$ n'est pas un sous-groupe discret de $SL_2(\mathbf{R})$; c'est un sous-groupe discret du produit

$$G = SL_2(\mathbf{R}) \times SL_2(\mathbf{Q}_p),$$

où $\mathbf{Q}_p$ est le corps des nombres p-adiques. Le but de ce mémoire est d'étendre à de tels produits G les résultats bien connus rappelés au début. L'outil essentiel, dans le cas p-adique, est *l'immeuble de Bruhat-Tits* qui rend les mêmes services que l'espace G/K de la théorie réelle: comme lui, il est contractile, et le groupe G y opère proprement; lorsque $G = SL_2(\mathbf{Q}_p)$, c'est simplement *l'arbre* défini dans [38], chap. II.

Il y a trois §. Voici leur contenu:

Le §1 est préliminaire; le groupe G n'y apparaît pas. Les $n^{os}1.1$ à 1.4 rappellent divers résultats et définitions standard sur la cohomologie d'un groupe discret Γ, sa dimension cohomologique (notée $cd(\Gamma)$), la propriété de finitude (FL) et la caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi(\Gamma)$; le lien avec la topologie est indiqué au $n^o1.5$. Lorsque Γ agit sur un CW-complexe contractile T, il existe certaines relations simples entre la cohomologie de Γ et celle des stabilisateurs Γ_σ des cellules σ de T; ces relations, qui m'ont été signalées par Quillen, jouent un rôle essentiel dans les §§2, 3; elles sont données au $n^o1.6$. Le $n^o1.7$ contient la démonstration, par voie topologique, de la formule $cd(\Gamma) = cd(\Gamma')$, valable lorsque Γ est sans torsion et Γ' d'indice fini dans Γ. Le $n^o1.8$ est consacré aux définitions "virtuelles": par exemple, un groupe Γ est dit de dimension cohomologique virtuelle $\leq n$ s'il contient un sous-groupe d'indice fini Γ' tel que $cd(\Gamma') \leq n$. L'utilité de telles notions provient de ce que les groupes arithmétiques les plus naturels, tels $SL_n(\mathbf{Z})$, ont de la torsion et sont donc de dimension cohomologique infinie; mais leur dimension cohomologique virtuelle est finie. Le §1 s'achève par le cas des *groupes de Coxeter*, et notamment la détermination de leur caractéristique d'Euler-Poincaré.

Le §2 contient surtout des majorations (et quelques calculs) de dimensions cohomologiques. Il s'agit de sous-groupes discrets Γ de groupes $G = \prod G_\alpha$, où les G_α sont, soit des groupes de Lie réels à nombre fini de composantes connexes, soit des groupes semi-simples (ou réductifs) sur des corps locaux. Lorsque G_α est du second type, l'action de Γ sur l'immeuble de G_α permet de ramener l'étude de la cohomologie de Γ à celle de certains sous-groupes discrets du produit des autres G_β. Par récurrence, on se trouve ainsi ramené au cas réel, qui est bien connu. Tout cela fait l'objet des $n^{os}2.1$ à 2.3. Le $n^o2.4$ applique ces résultats aux groupes S-arithmétiques (sur un corps de nombres ou sur un corps de fonctions sur un corps fini); on obtient en particulier le fait que tout sous-groupe sans torsion de type fini d'un $GL_n(\mathbf{Q})$ est de dimension cohomologique finie.

Le §3 démontre l'existence, sur un groupe G du type ci-dessus, d'une *mesure d'Euler-Poincaré* μ_G ayant la propriété indiquée au début: si Γ est un sous-groupe discret à quotient compact de G, on a $\chi(\Gamma) = \mu_G(G/\Gamma)$. Le cas réel se traite, on l'a vu, au moyen de la formule de Gauss-Bonnet ($n^o3.2$). Le cas p-adique utilise l'immeuble T: si μ est une mesure de Haar sur G, on pose

$$\chi(\mu) = \sum_{\sigma \in \Sigma} (-1)^{\dim(\sigma)} \frac{1}{\mu(G_\sigma)} \ ;$$

dans cette formule, Σ désigne un système de représentants des cellules de T modulo l'action de G, et G_σ désigne le stabilisateur de σ, qui est un sous-groupe ouvert compact de G. Le produit $\mu_G = \chi(\mu)\mu$ est indépendant du choix de μ et c'est la mesure d'Euler-Poincaré cherchée ($n^o3.3$). Lorsque G est semi-simple, μ_G est > 0 (resp. < 0) si le rang relatif de G est pair (resp. impair), cf. n^o 3.4. L'application de ces résultats aux groupes S-arithmétiques à quotient compact est faite au n^o 3.6. Le cas d'un quotient non compact, nettement plus délicat, vient d'être traité par Harder [19]; ses résultats sont rappelés aux $n^{os}3.6$ et 3.7. Le §3 se termine par une application des caractéristiques d'Euler-Poincaré à l'estimation des dénominateurs des valeurs des fonctions zêta aux entiers négatifs.

Les principaux résultats de ce travail ont été résumés dans une Note aux Comptes-Rendus [37].

§1. DIMENSION COHOMOLOGIQUE ET PROPRIÉTÉS DE FINITUDE

1.1. *Résolutions projectives et résolutions libres.*

Soit R un anneau et soit E un R-module (à gauche, pour fixer les idées). Une *résolution projective* (P_n) de E est une suite exacte de R-modules et de R-homomorphismes

$$\ldots \to P_n \to P_{n-1} \to \ldots \to P_1 \to P_0 \to E \to 0$$

telle que P_n soit *projectif* pour tout $n \geq 0$; il revient au même de dire que $P_\bullet = (P_n)$ est un *complexe acyclique, projectif,* muni d'un isomorphisme $H_0(P_\bullet) \to E$.

On dit que (P_n) est *de longueur* $\leq m$ si $P_n = 0$ pour $n > m$. Pour qu'il existe une telle résolution, il faut et il suffit que E soit de dimension projective $\leq m$, ou encore que $\mathrm{Ext}^q_R(E,F) = 0$ pour tout $q > m$ et tout R-module F ([13], p. 110, prop. 2.1); on peut même alors choisir pour P_n des modules *libres*, pourvu que m soit ≥ 1 (cela résulte de ce que, si P est projectif, il existe un module libre L tel que $P \oplus L \simeq L$, cf. Bourbaki, *Alg.* II, §2, exerc. 3).

Une résolution (P_n) est dite *de type fini* (resp. *libre*) si tous les modules P_n sont de type fini (resp. libres); on dit que (P_n) est *finie* si elle est à la fois de type fini et de longueur finie.

Le résultat suivant est bien connu:

PROPOSITION 1. *Soit* $0 \to E_q \to \ldots \to E_1 \to E_0 \to E \to 0$ *une suite exacte de* R-*modules. Pour tout* i *compris entre* 0 *et* q, *soit* $(P_{i,n})$ *une résolution projective de* E_i. *Il existe alors une résolution projective* (P_n) *de* E *telle que*

$$P_n \simeq \coprod_{i+j=n} P_{i,j}$$

pour tout $n \geq 0$.

Un raisonnement par récurrence permet de se ramener au cas $q = 1$. On a alors une suite exacte

$$0 \to E_1 \xrightarrow{f} E_0 \to E \to 0.$$

On "relève" le morphisme f en un morphisme de résolutions

$$(f_n) : (P_{1,n}) \to (P_{0,n}),$$

et l'on prend pour (P_n) le "mapping-cylinder" de (f_n), cf. par exemple [13], p. 73, exerc. 3. On a bien $P_n = P_{1,n-1} \oplus P_{0,n}$ pour tout $n \geq 0$, et (P_n) est une résolution projective de E.

COROLLAIRE. *Soit* m *un entier* ≥ 0. *Si chaque* E_i *a une résolution projective (resp. libre) finie de longueur* $\leq m-i$, *alors* E *a une résolution projective (resp. libre) finie de longueur* $\leq m$.

Supposons maintenant qu'il existe un homomorphisme $R \to k$ de l'anneau R dans un corps k. Si L est un R-module libre de type fini, isomorphe à A^d, on a $d = \dim_k(L \otimes_R k)$ ce qui montre que d ne dépend que de L; l'entier d s'appelle le *rang* du module L; nous le noterons rgL. Si

$$0 \to L_n \to \ldots \to L_0 \to E \to 0$$

est une résolution libre finie d'un module E, nous poserons

$$\chi_R(E) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \, \mathrm{rg}(L_i).$$

On a

$$\chi_R(E) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \dim_k \mathrm{Tor}_i^R(E,k),$$

ce qui montre que l'entier $\chi_R(E)$ ne dépend pas de la résolution libre finie (L_i) choisie; on l'appelle la *caractéristique d'Euler-Poincaré* de E.

PROPOSITION 2. *Soit* $0 \to E_q \to \dots \to E_1 \to E_0 \to E \to 0$ *une suite exacte de* R-*modules. Supposons que chaque* E_i *possède une résolution libre finie. Il en est alors de même de* E, *et l'on a*

$$\chi_R(E) = \sum_{i=0}^{q} (-1)^i \chi_R(E_i).$$

On applique la prop.1 en prenant pour $(P_{i,n})$ une résolution libre finie de E_i. D'où une résolution libre finie (P_n) de E, avec

$$P_n \simeq \coprod_{i+j=n} P_{i,j}$$

et

$$\chi_R(E) = \sum_{i,j} (-1)^{i+j} \operatorname{rg} P_{i,j} = \sum_i (-1)^i \chi_R(E_i).$$

REMARQUE. Soit K(R) le *groupe de Grothendieck* de la catégorie des R-modules projectifs de type fini; si P est un tel module, soit [P] son image dans K(R). L'homomorphisme $R \to k$ définit un homomorphisme $e : K(R) \to K(k) = \mathbf{Z}$ tel que $e([R]) = 1$.

Si E est un R-module possédant une résolution projective finie (P_i), soit [E] l'élément de K(R) défini par

$$[E] = \sum_i (-1)^i [P_i].$$

On sait que [E] ne dépend pas de la résolution choisie. Pour que E admette une résolution *libre* finie, il faut et il suffit que [E] soit un multiple de [R], et l'on a alors

$$[E] = \chi_R(E)\cdot[R], \qquad e([E]) = \chi_R(E),$$

ce qui donne une caractérisation de $\chi_R(E)$ au moyen de [E]. De ce point de vue, la prop. 2 ne fait qu'exprimer *l'additivité* de la fonction $E \mapsto [E]$.

1.2. *Dimension cohomologique.*

Soit Γ un groupe, et soit $R = \mathbf{Z}[\Gamma]$ son algèbre sur $\mathbf{Z}$. Un R-module est également appelé un Γ-*module*. L'anneau R admet un homomorphisme dans un corps (par exemple le composé $R \to \mathbf{Z} \to \mathbf{Q}$); on peut donc lui appliquer les définitions et résultats du n°1.1. En particulier, si E est un Γ-module admettant une résolution libre finie, la *caractéristique d'Euler-Poincaré* $\chi_R(E)$ est définie; on la note également $\chi_\Gamma(E)$.

Dans tout ce que suit, $\mathbf{Z}$ est muni de la structure de Γ-module *triviale*, i.e. telle que $\gamma.n = n$ pour tout $\gamma \in \Gamma$ et tout $n \in \mathbf{Z}$.

PROPOSITION 3. *Soit* n *un entier* ≥ 0. *Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(a) *Le* Γ-*module* $\mathbf{Z}$ *possède une résolution projective de longueur* $\leq n$.

(b) *Tout* Γ-*module qui est libre sur* $\mathbf{Z}$ *possède une résolution projective de longueur* $\leq n$.

(c) *Pour tout* Γ-*module* M, *et tout entier* $q > n$, *le groupe de cohomologie* $H^q(\Gamma, M)$ *est réduit à* 0.

L'équivalence de (a) et (c) résulte de [13], p. 110, prop. 2.1, compte tenu de ce que $H^q(\Gamma, M) = \mathrm{Ext}_R^q(\mathbf{Z}, M)$, avec $R = \mathbf{Z}[\Gamma]$. L'équivalence de (a) et (b) résulte du lemme suivant:

LEMME 1. *Soit* (P_n) *une résolution projective (resp. libre) du* Γ-*module* $\mathbf{Z}$, *et soit* M *un* Γ-*module libre sur* $\mathbf{Z}$. *Alors* $(P_n \otimes M)$ *est une résolution projective (resp. libre) de* M.

(Précisons que, si A et B sont deux Γ-modules, on munit $A \otimes B$ de la structure de Γ-module "produit", i.e. que l'on a $s(a \otimes b) = s(a) \otimes s(b)$ si $s \in \Gamma$, $a \in A$, $b \in B$.)

Comme M est libre sur Z, la suite

$$\dots \to P_n \otimes M \to \dots \to P_0 \otimes M \to M \to 0$$

est exacte. Tout revient donc à voir que $P \otimes M$ est un Γ-module projectif (resp. libre) si P est projectif (resp. libre); par décomposition en somme directe, il suffit de considérer le cas où P est libre de rang 1, avec pour base $\{p\}$; dans ce cas, si M a pour Z-base (m_i), on vérifie tout de suite que $(p \otimes m_i)$ est une $\mathbf{Z}[\Gamma]$-base de $P \otimes M$.

DÉFINITION. *On appelle dimension cohomologique du groupe* Γ *la borne inférieure des entiers* n *tels que les conditions de la prop.* 3 *soient satisfaites.*

On note $cd(\Gamma)$ la dimension cohomologique de Γ; on a $0 \le cd(\Gamma) \le \infty$, avec $cd(\Gamma) = \infty$ si et seulement si les conditions de la prop. 3 ne sont vérifiées pour *aucune* valeur de n.

On peut également caractériser $cd(\Gamma)$ comme la borne supérieure (finie ou infinie) des entiers q tels qu'il existe un Γ-module M avec $H^q(\Gamma, M) \neq 0$.

DÉFINITION. *On dit que* Γ *est de type* (FL) *si le* Γ*-module* Z *possède une résolution libre finie.*

Soit Γ un tel groupe. On a $cd(\Gamma) < \infty$. De plus, $\chi_\Gamma(\mathbf{Z})$ est définie; on l'appelle la *caractéristique d'Euler-Poincaré de* Γ, et on la note $\chi(\Gamma)$. On a, par définition,

$$\chi(\Gamma) = \sum_i (-1)^i \operatorname{rg}_\Gamma L_i,$$

si (L_i) est une résolution libre finie du Γ-module Z.

PROPOSITION 4. *Supposons* Γ *de type* (FL), *et soit* M *un* Γ*-module.*

(a) *Si* M *est limite inductive de* Γ*-modules* (M_i), *et si* q *est un entier* ≥ 0, *l'homomorphisme canonique de* $\varinjlim H^q(\Gamma, M_i)$ *dans* $H^q(\Gamma, M)$ *est un isomorphisme.*

(b) *Si* M *est de type fini sur* Z, *il en est de même des* $H^q(\Gamma, M)$ *et l'on a*

$$\sum_q (-1)^q \operatorname{rg} H^q(\Gamma, M) = \chi(\Gamma) . \operatorname{rg} M.$$

(c) *Si* M *est* Z*-libre de type fini,* M *possède une résolution* $\mathbf{Z}[\Gamma]$*-libre finie, et l'on a*

$$\chi_\Gamma(M) = \chi(\Gamma) . \operatorname{rg} M.$$

Soit $L_\bullet = (L_n)$ une résolution $\mathbf{Z}[\Gamma]$-libre finie de Z. Les groupes $H^q(\Gamma, M)$ sont les groupes de cohomologie du complexe $\operatorname{Hom}(L_\bullet, M)$, d'où aussitôt (a) et (b). De même, (c) résulte de ce que $L_\bullet \otimes M$ est une résolution libre finie de M, cf. lemme 1.

REMARQUES

1) Soit k un corps, et soit M un $k[\Gamma]$-module qui soit de dimension finie sur k. Le même argument que ci-dessus montre que les $H^q(\Gamma, M)$ sont des k-espaces vectoriels de dimension finie, et que l'on a

$$\sum_q (-1)^q \dim_k H^q(\Gamma, M) = \chi(\Gamma) . \dim_k M.$$

De plus M possède une résolution $k[\Gamma]$-libre finie, de caractéristique d'Euler-Poincaré égale à $\chi(\Gamma) . \dim_k M$.

2) On peut démontrer que le Γ-module Z possède une résolution libre finie *de longueur égale à* $cd(\Gamma)$.

QUESTION

Soit Γ un groupe tel que le Γ-module Z possède une résolution *projective* finie. Le groupe Γ est-il de type (FL)?

1.3. *Sous-groupes, extensions, amalgames.*

Sous-groupes

PROPOSITION 5. *Soit Γ' un sous-groupe du groupe Γ.*

(a) *On a* $cd(\Gamma') \leq cd(\Gamma)$.

(b) *Si* $cd(\Gamma) < \infty$ *et si* Γ' *est d'indice fini dans* Γ, *on a* $cd(\Gamma') = cd(\Gamma)$.

(c) *Si* Γ *est de type* (FL) *et si* Γ' *est d'indice fini dans* Γ, *alors* Γ' *est de type* (FL) *et l'on a* $\chi(\Gamma') = (\Gamma:\Gamma').\chi(\Gamma)$.

Comme $Z[\Gamma]$ est un $Z[\Gamma']$-module libre de rang $(\Gamma:\Gamma')$, toute résolution $Z[\Gamma]$-libre (L_n) de Z est aussi une résolution $Z[\Gamma']$-libre; d'où (a). Si en outre (L_n) est $Z[\Gamma]$-finie, et si $(\Gamma:\Gamma') < \infty$, on voit que (L_n) est $Z[\Gamma']$-finie, et l'on a

$$\chi(\Gamma') = \sum_n (-1)^n \, rg_{\Gamma'} L_n = \sum_n (-1)^n (\Gamma:\Gamma') \, rg_\Gamma L_n$$
$$= (\Gamma:\Gamma')\,\chi(\Gamma),$$

d'où (c).

Reste à prouver (b). Supposons donc que $(\Gamma:\Gamma')$ soit *fini*, et posons $n = cd(\Gamma)$. Par hypothèse, il existe un Γ-module M tel que $H^n(\Gamma,M) \neq 0$. Nous allons voir que $H^n(\Gamma',M)$ est $\neq 0$; cela montrera que $cd(\Gamma') \geq n$, d'où $cd(\Gamma') = n$ d'après (a).

La non-nullité de $H^n(\Gamma',M)$ résulte du lemme suivant:

LEMME 2 (Tate). *L'homomorphisme de corestriction*

$$\mathrm{Cor}: H^n(\Gamma',M) \to H^n(\Gamma,M)$$

est surjectif si $n = cd(\Gamma)$.

La démonstration est la même que dans le cas profini ([35], p. I-20, lemme 4). On identifie $H^n(\Gamma',M)$ à $H^n(\Gamma,M^*)$, où M^* désigne le *module induit* de M, ensemble des fonctions $f : \Gamma \to M$ telles que $f(sx) = sf(x)$ si $s \in \Gamma'$, $x \in \Gamma$; on fait opérer Γ sur M^* par $(tf)(x) = f(xt)$. On définit un homomorphisme surjectif $\pi : M^* \to M$ par

$$\pi(f) = \sum_{x \in \Gamma/\Gamma'} x\,.\,f(x^{-1}),$$

cf. [35], p. I-13. Par passage à la cohomologie, π donne la corestriction

$$\mathrm{Cor}: H^q(\Gamma',M) = H^q(\Gamma,M^*) \to H^q(\Gamma,M).$$

Le fait que Cor soit surjectif en dimension n résulte alors simplement de ce que le foncteur $E \mapsto H^n(\Gamma,E)$ est exact à droite, vu la nullité de $H^{n+1}(\Gamma)$.

REMARQUE. Supposons que Γ' soit d'indice fini dans Γ. D'après (a) et (b), on a les deux possibilités suivantes:

(b_1) $cd(\Gamma') = cd(\Gamma)$;

(b_2) $cd(\Gamma') < \infty$ et $cd(\Gamma) = \infty$.

Nous verrons plus loin (n°1.7, th. 1) que (b_2) ne peut se produire que *si* Γ *a de la torsion.*

Extensions

PROPOSITION 6. *Soit Γ' un sous-groupe distingué de Γ.*

(a) *On a* $cd(\Gamma) \leq cd(\Gamma') + cd(\Gamma/\Gamma')$.

(b) *Si* Γ' *et* Γ/Γ' *sont de type* (FL), *il en est de même de* Γ, *et l'on a*

$$\chi(\Gamma) = \chi(\Gamma').\chi(\Gamma/\Gamma').$$

Supposons Γ' de type (FL), et soit

$$0 \to L'_n \to \dots \to L'_0 \to Z \to 0$$

une résolution $Z[\Gamma']$-libre finie de Z. Par produit tensoriel avec $Z[\Gamma]$, on en déduit une résolution $Z[\Gamma]$-libre finie du Γ-module

$$Z[\Gamma] \otimes_{Z[\Gamma']} Z = Z[\Gamma/\Gamma'] :$$

$$0 \to L_n \to \dots \to L_0 \to \mathbf{Z}[\Gamma/\Gamma'] \to 0,$$

où $L_i = \mathbf{Z}[\Gamma] \otimes_{\mathbf{Z}[\Gamma']} L_i'$. On a donc $\chi_\Gamma(\mathbf{Z}[\Gamma/\Gamma']) = \chi(\Gamma')$.

Supposons maintenant Γ/Γ' de type (FL), et soit

$$0 \to L_m'' \to \dots \to L_0'' \to \mathbf{Z} \to 0$$

une résolution $\mathbf{Z}[\Gamma/\Gamma']$-libre finie de $\mathbf{Z}$. Vu ce qui précède, chaque L_i'' admet une résolution $\mathbf{Z}[\Gamma]$-libre finie; de plus, on a

$$\chi_\Gamma(L_i'') = \chi(\Gamma')\ \mathrm{rg}_{\Gamma/\Gamma'}(L_i'').$$

En appliquant les propositions 1 et 2, on en déduit que $\mathbf{Z}$ admet une résolution $\mathbf{Z}[\Gamma]$-libre finie, et que l'on a

$$\chi(\Gamma) = \chi_\Gamma(\mathbf{Z}) = \sum_i (-1)^i\ \chi_\Gamma(L_i'') = \chi(\Gamma').\chi(\Gamma/\Gamma'),$$

ce qui démontre (b).

L'assertion (a) se démontre de manière analogue (ou se déduit de la suite spectrale des extensions de groupes, cf. [13], p. 350).

Amalgames

Soient Γ_1 et Γ_2 deux groupes contenant comme sous-groupe un même groupe A, et soit $\Gamma = \Gamma_1 *_A \Gamma_2$ la somme de Γ_1 et Γ_2 *amalgamée* suivant A (cf. Bourbaki, *Alg.* I, n^{elle} éd., p. 83 ou [38], I, §1). Soit M un Γ-module. D'après un résultat de Lyndon [28] (voir aussi Swan [44], th. 2.3), on a une suite exacte "de Mayer-Vietoris":

$$\dots \to H^q(\Gamma,M) \xrightarrow{\alpha} H^q(\Gamma_1,M) \oplus H^q(\Gamma_2,M) \xrightarrow{\beta} H^q(A,M) \to H^{q+1}(\Gamma,M) \to \dots$$

où α = (Res, Res) et β = (Res, - Res). On en déduit:

PROPOSITION 7. *Soit* n *un entier. Si* $\mathrm{cd}(\Gamma_1) \le n$, $\mathrm{cd}(\Gamma_2) \le n$ *et* $\mathrm{cd}(A) \le n-1$, *on a* $\mathrm{cd}(\Gamma_1 *_A \Gamma_2) \le n$.

De plus:

PROPOSITION 8. *Si* A, Γ_1 *et* Γ_2 *sont de type* (FL), *il en est de même de* $\Gamma_1 *_A \Gamma_2$, *et l'on a*

$$\chi(\Gamma_1 *_A \Gamma_2) = \chi(\Gamma_1) + \chi(\Gamma_2) - \chi(A).$$

Si B est un sous-groupe de $\Gamma = \Gamma_1 *_A \Gamma_2$, notons $\mathbf{Z}[\Gamma/B]$ le groupe abélien libre de base l'ensemble Γ/B; on munit $\mathbf{Z}[\Gamma/B]$ de l'unique structure de Γ-module prolongeant l'action naturelle de Γ sur Γ/B. D'après Lyndon et Swan ([44], Lemme 2.1), on a une suite exacte

$$0 \to \mathbf{Z}[\Gamma/A] \to \mathbf{Z}[\Gamma/\Gamma_1] \oplus \mathbf{Z}[\Gamma/\Gamma_2] \to \mathbf{Z} \to 0.$$

(L'exactitude de cette suite exprime simplement le fait que *l'arbre* associé à l'amalgame Γ ([38], I-50) est acyclique.)

Par hypothèse, le A-module $\mathbf{Z}$ admet une résolution libre finie (L_n). Par produit tensoriel avec $\mathbf{Z}[\Gamma]$, on en déduit une résolution libre finie du Γ-module $\mathbf{Z}[\Gamma/A]$ et l'on voit en même temps que la caractéristique d'Euler-Poincaré de ce module est égale à $\chi(A)$. On a des résultats analogues pour $\mathbf{Z}[\Gamma/\Gamma_1]$ et $\mathbf{Z}[\Gamma/\Gamma_2]$. On conclut alors en appliquant les prop. 1 et 2.

1.4. *Exemples.*

a) *On a* $\mathrm{cd}(\Gamma) = 0$ *si et seulement si* $\Gamma = \{1\}$. En effet, si $\mathrm{cd}(\Gamma) = 0$, $\mathbf{Z}$ est Γ-projectif, et l'homomorphisme canonique $\mathbf{Z}[\Gamma] \xrightarrow{\alpha} \mathbf{Z}$ admet une section. Il existe donc un élément $u \in \mathbf{Z}[\Gamma]$, invariant par Γ, et tel que $\alpha(u) = 1$; il est immédiat que cela entraîne $\Gamma = \{1\}$.

Plus généralement, soit A un anneau commutatif $\neq 0$. Définissons $\mathrm{cd}_A(\Gamma)$ comme la dimension projective du $A[\Gamma]$-module A; c'est aussi la borne supérieure des entiers q tels qu'il existe un $A[\Gamma]$-module M avec $H^q(\Gamma,M) \neq 0$. Le même argument que ci-dessus montre que $cd_A(\Gamma) = 0$ *si et seulement si* Γ *est un groupe fini d'ordre inversible dans* A.

b) Un groupe *fini* d'ordre $\neq 1$ est de dimension cohomologique *infinie*. C'est là un résultat bien connu, cf. par exemple [13], p. 265, exerc. 14.

Vu la prop. 5, on en déduit que *tout groupe de dimension cohomologique finie est sans torsion.*

c) *On a* $cd(\Gamma) \leq 1$ *si et seulement si* Γ *est un groupe libre*; ce résultat, conjecturé depuis longtemps, a été démontré récemment par Stallings [43] et Swan [44]; ce dernier a même prouvé que, si Γ est sans torsion, et si $cd_A(\Gamma) \leq 1$ pour *un* anneau $A \neq 0$, alors Γ est libre.

Si Γ est libre de rang fini n (i.e. admet une famille basique à n éléments), Γ est de type (FL) et l'on a $\chi(\Gamma) = 1 - n$.

d) *Groupes de dimension cohomologique* ≤ 2. Ecrivons Γ sous la forme F/R, où F est libre de famille basique $(x_i)_{i \in I}$ et où R est un sous-groupe distingué de F. Si (R,R) désigne le groupe dérivé de R, le quotient $R/(R,R)$ est un Γ-module. De plus, on a une suite exacte de Γ-modules (cf.Swan [44], th. 1.4):

$$0 \to R/(R,R) \xrightarrow{\theta} X \xrightarrow{\partial} \mathbf{Z}[\Gamma] \to \mathbf{Z} \to 0$$

où X est $\mathbf{Z}[\Gamma]$-libre de base $(e_i)_{i \in I}$. On a $\partial(e_i) = x_i - 1$, et θ est définie au moyen des "dérivées partielles" $\partial/\partial x_i$, cf.Swan, *loc.cit.* On déduit de là que $cd(\Gamma) \leq 2$ *si et seulement si* $R/(R,R)$ *est* $\mathbf{Z}[\Gamma]$*-projectif.*

Supposons en particulier que I soit fini, et que R soit engendré comme sous-groupe distingué par un élément r qui ne soit une puissance m-ième pour aucun $m \geq 2$. Sous ces hypothèses, Lyndon [28] a montré que l'image de r dans $R/(R,R)$ est une *base* de ce $\mathbf{Z}[\Gamma]$-module. On a alors $cd(\Gamma) \leq 2$, le groupe Γ est de type (FL), et $\chi(\Gamma) = 2 - \mathrm{Card}(I)$.

e) *Un groupe nilpotent sans torsion de type fini est de type* (FL). Cela se démontre par récurrence sur la classe du groupe, en utilisant la prop. 6. (Si Γ est un tel groupe, on peut également plonger Γ dans un groupe de Lie réel G nilpotent simplement connexe de telle sorte que G/Γ soit compact, et utiliser la prop. 18 du n°2.1; cela montre en même temps que $cd(\Gamma)$ est égal à $\dim(G)$.)

f) *Tout sous-groupe "arithmétique" sans torsion d'un groupe algébrique semi-simple est de type* (FL) (Raghunathan [33]); nous verrons plus loin (n° 2.4, th. 4) que ce résultat s'étend aux groupes "S-arithmétiques".

g) *Tout sous-groupe de* $GL_n(\mathbf{Q})$ *qui est de type fini et sans torsion est de dimension cohomologique finie*, cf. n°2.4, th. 5.

1.5. *Dimension cohomologique et espaces* $K(\Gamma, 1)$.

Soit Γ un groupe. On sait qu'il existe un CW-*complexe* X (au sens de J.H.C.Whitehead [51]) qui est un "espace $K(\Gamma,1)$", i.e. qui vérifie les conditions suivantes:

(a) X est connexe non vide;

(b) le groupe fondamental $\pi_1(X)$ de X relativement à un point-base x est isomorphe à Γ ;

(c) les groupes d'homotopie supérieurs $\pi_n(X)$ sont nuls pour $n \geq 2$.

Les conditions (a) et (c) équivalent à dire que *le revêtement universel* $\tilde{X}$ de X (relativement à x) est *contractile*.

Si X vérifie ces propriétés, le complexe $C_\bullet(\tilde{X})$ des *chaînes cellulaires* de $\tilde{X}$ est une *résolution libre* du Γ-module $\mathbf{Z}$; plus précisément, soit Σ l'ensemble des cellules de X, et pour tout $\sigma \in \Sigma$, soit $\tilde{\sigma}$ un relèvement de σ dans $\tilde{X}$; si l'on munit chaque $\tilde{\sigma}$ d'une *orientation*, on obtient un élément $\tilde{\sigma}$ de $C_\bullet(\tilde{X})$ et la famille $(\tilde{\sigma})$ est une *base* du $\mathbf{Z}[\Gamma]$-module $C_\bullet(\tilde{X})$. Il en résulte que, si M est un Γ-module, les $H^q(\Gamma, M)$ sont isomorphes aux $H^q(\mathrm{Hom}_\Gamma(C_\bullet(\tilde{X}), M))$, autrement dit aux groupes de cohomologie $H^q(X, \tilde{M})$ de l'espace X à coefficients dans le *système local* $\tilde{M}$ défini par M. On déduit aussitôt de là:

PROPOSITION 9. (a) *On a* $cd(\Gamma) \leq \dim(X)$.

(b) *Si* X *est un complexe fini,* Γ *est de type* (FL) *et* $\chi(\Gamma)$ *est égal*

(Noter que, dans le cas (b), le groupe Γ est *de présentation finie*.)

La proposition 9 fournit un moyen commode pour démontrer qu'un groupe Γ donné est de dimension cohomologique $\leq n$: il suffit de faire opérer Γ librement et proprement sur un espace contractile $\overline{X}$ choisi de telle sorte que le quotient $X = \overline{X}/\Gamma$ soit un CW-complexe de dimension $\leq n$. Nous en verrons de nombreux exemples dans la suite.

Pour $n \geq 3$, on a une réciproque (cf. Eilenberg-Ganea [16]):

PROPOSITION 10. *Soit* n *un entier* ≥ 3, *et soit* Γ *un groupe tel que* $cd(\Gamma) \leq n$.

(a) *Il existe un* CW-*complexe* X *de dimension* $\leq n$ *qui est un espace* $K(\Gamma,1)$.

(b) *Si* Γ *est de présentation finie et de type* (FL), *on peut prendre pour* X *un complexe fini.*

Soit Y un CW-complexe qui soit un espace $K(\Gamma, 1)$. Puisque $cd(\Gamma) \leq n$, on a $H^q(Y, \tilde{M}) = 0$ pour tout $q > n$ et tout système local $\tilde{M}$ sur Y. D'après un résultat de Wall ([48], th. E) il en résulte que Y a même type d'homotopie qu'un CW-complexe X de dimension $\leq n$, ce qui établit (a).

L'assertion (b) se démontre de manière analogue. On peut, par exemple, appliquer le théorème F de [48], après avoir montré que Γ satisfait à la "condition Fn"; on peut aussi se ramener au th. 4 de [49]. Comme nous n'utiliserons pas (b) par la suite, nous laissons au lecteur le détail de ces démonstrations.

REMARQUE

On peut se demander si la prop. 10 reste valable pour $n < 3$. C'est évidemment le cas si $n = 0$; c'est aussi le cas si $n = 1$ grâce au théorème de Stallings-Swan, cf. n°4, c). Pour $n = 2$, la question (sous la forme (a), pour fixer les idées) se reformule ainsi:

Si $cd(\Gamma) \leq 2$, peut-on écrire Γ sous la forme F/R, avec F libre, de telle sorte qu'il existe une famille (r_i) d'éléments de R, engendrant R comme sous-groupe distingué de F, et telle que les images des r_i dans $R/(R,R)$ forment une *base* de $R/(R,R)$ comme $Z[\Gamma]$-module? Cela paraît peu probable, mais je ne connais pas de contre-exemple.

1.6 *Actions cellulaires.*

Soit T un CW-complexe sur lequel opère le groupe Γ. Faisons les deux hypothèses suivantes:

(i) T est *acyclique*, i.e. $H_0(T, Z) = Z$ et $H_q(T, Z) = 0$ pour tout $q \geq 1$ (c'est notamment le cas si T est contractile).

(ii) Γ opère *cellulairement* sur T; cela signifie que le transformé d'une cellule de T par un élément de Γ est une cellule de T.

Si σ est une cellule de T, notons Γ_σ l'ensemble des $\gamma \in \Gamma$ tels que $\gamma\sigma = \sigma$. Soit d'autre part Σ un ensemble de représentants des cellules de T modulo l'action de Γ. La proposition suivante permet, dans une certaine mesure, de passer des Γ_σ $(\sigma \in \Sigma)$ à Γ lui-même:

PROPOSITION 11 (Quillen). (a) *On a* $cd(\Gamma) \leq \operatorname{Sup}_{\sigma\in\Sigma} (\dim(\sigma) + cd(\Gamma_\sigma))$.

(b) *Si* Σ *est fini et si les* Γ_σ *sont de type* (FL), *alors* Γ *est de type* (FL), *et l'on a*

$$\chi(\Gamma) = \sum_{\sigma\in\Sigma} (-1)^{\dim(\sigma)} \chi(\Gamma_\sigma).$$

Soit $n = \dim(T)$. On peut supposer n fini, car sinon il n'y a rien à démontrer. Puisque T est acyclique, on a une suite exacte de Γ-modules

$$0 \to C_n(T) \to \dots \to C_0(T) \to Z \to 0,$$

où $C_q(T)$ est le groupe des *chaînes cellulaires* de degré q de T; si T_q désigne le q-squelette de T, on a

$$C_q(T) = H_q(T_q \bmod . T_{q-1}; Z).$$

La structure du Γ-module $C_q(T)$ est facile à déterminer:

Notons Σ_q la partie de Σ formée des cellules de dimension q; si $\sigma \in \Sigma_q$, et si $\gamma \in \Gamma_\sigma$, posons $\varepsilon_\sigma(\gamma) = 1$ (resp. -1) si γ respecte (resp. renverse) l'orientation de σ. On obtient ainsi un homomorphisme $\varepsilon_\sigma : \Gamma_\sigma \to \{\pm 1\}$, d'où une action de Γ_σ sur $\mathbf{Z}$; soit $\mathbf{Z}_\sigma$ le Γ_σ-module ainsi défini, et soit $\mathbf{Z}_\sigma^* = \mathbf{Z}[\Gamma] \otimes_{\mathbf{Z}[\Gamma_\sigma]} \mathbf{Z}_\sigma$ le Γ-module induit correspondant.

LEMME 3. (i) *Le Γ-module $\mathbf{Z}_\sigma^*$ est de dimension projective $\leq \mathrm{cd}(\Gamma_\sigma)$; si Γ_σ est de type* (FL), *$\mathbf{Z}_\sigma^*$ admet une résolution libre finie, et sa caractéristique d'Euler-Poincaré est égale à $\chi(\Gamma_\sigma)$.*

(ii) $C_q(T)$ *est isomorphe à la somme directe des $\mathbf{Z}_\sigma^*$, $\sigma \in \Sigma_q$.*

La prop. 3 montre que le Γ_σ-module $\mathbf{Z}_\sigma$ possède une résolution projective de longueur $\leq \mathrm{cd}(\Gamma_\sigma)$; par produit tensoriel avec $\mathbf{Z}[\Gamma]$, on en déduit une résolution projective du Γ-module $\mathbf{Z}_\sigma^*$ de longueur $\leq \mathrm{cd}(\Gamma_\sigma)$. De même, si Γ_σ est de type (FL), on peut trouver une résolution libre finie de $\mathbf{Z}_\sigma$, et sa caractéristique d'Euler-Poincaré est égale à $\chi(\Gamma_\sigma)$, cf. prop. 4; par produit tensoriel avec $\mathbf{Z}(\Gamma)$, on en déduit le même résultat pour le Γ-module $\mathbf{Z}_\sigma^*$. D'où (i). L'assertion (ii) provient simplement de ce que toute cellule de T peut être transformée par Γ en une cellule de Σ, et une seule.

Revenons maintenant à la prop. 11. Soit c_q la dimension projective du Γ-module $C_q(T)$. D'après le lemme 3, on a

$$c_q \leq \operatorname*{Sup.}_{\sigma \in \Sigma_q} \mathrm{cd}(\Gamma_\sigma) \quad \text{pour tout } q \geq 0.$$

En appliquant le cor. à la prop. 1, on en déduit

$$\mathrm{cd}(\Gamma) \leq \operatorname*{Sup}_{q \leq n}\,(q + \operatorname*{Sup.}_{\sigma \in \Sigma_q} \mathrm{cd}(\Gamma_\sigma)) = \operatorname*{Sup}_{\sigma \in \Sigma}\,(\dim(\sigma) + \mathrm{cd}(\Gamma_\sigma)),$$

Dans le cas (b), le lemme 3 montre que les $C_q(T)$ ont des résolutions libres finies, d'où le même résultat pour le Γ-module $\mathbf{Z}$ d'après le cor. à la prop. 1. De plus, la prop. 2 montre que l'on a

$$\chi(\Gamma) = \chi_\Gamma(\mathbf{Z}) = \sum_q (-1)^q \chi_\Gamma(C_q(T)),$$

d'où, en appliquant le lemme 3,

$$\chi(\Gamma) = \sum_{\sigma \in \Sigma} (-1)^{\dim(\sigma)} \chi_\Gamma(\mathbf{Z}_\sigma^*) = \sum_{\sigma \in \Sigma} (-1)^{\dim(\sigma)} \chi(\Gamma_\sigma),$$

ce qui achève la démonstration de (b).

REMARQUES

1) On déduit facilement de la suite exacte

$$0 \to C_n(T) \to \dots \to C_0(T) \to \mathbf{Z} \to 0$$

et du lemme 3, l'existence, pour tout Γ-module M, d'une *suite spectrale* ayant pour terme E_1 le produit (gradué) des $H^\bullet(\Gamma_\sigma, \mathbf{Z}_\sigma \otimes M)$, $\sigma \in \Sigma$, et aboutissant au gradué associé à $H^\bullet(\Gamma, M)$. Cela donne une autre démonstration de (a).

2) Lorsque T est *contractile* et que les Γ_σ *sont réduits à* $\{1\}$, on peut munir l'espace $X = T/\Gamma$ d'une structure de CW-complexe quotient de celle de T, et l'on montre que T s'identifie au revêtement universel de X; on retrouve la situation du n° précédent.

EXEMPLE

Appliquons la proposition 11 à *l'arbre* T associé à un *amalgame* $\Gamma = \Gamma_1 *_A \Gamma_2$, cf. [38], chap. I, n° 4.1. Le domaine fondamental de Γ est un segment $P_1 P_2$; on peut donc prendre pour Σ les sommets P_1, P_2 et l'arête P_1P_2; les stabilisateurs Γ_σ correspondants sont Γ_1, Γ_2 et A. La prop. 11 donne alors et

$$\chi(\Gamma) = \chi(\Gamma_1) + \chi(\Gamma_2) - \chi(A)$$

si A, Γ_1 et Γ_2 sont de type (FL).

On retrouve ainsi les prop. 7 et 8. De plus, si Γ' est un sous-groupe de Γ, la prop. 11, appliquée à l'action de Γ' sur T, montre que l'on a $\mathrm{cd}(\Gamma') \leq n$ si les intersections de Γ' avec les conjugués de Γ_1 et Γ_2 (resp. de A) sont de dimension cohomologique $\leq n$ (resp. $\leq n-1$). La même méthode s'applique à des amalgames plus compliqués, cf. [38], chap. I, §5.

1.7. *Sous-groupes d'indice fini.*

THÉORÈME 1. *Soit* Γ' *un sous-groupe d'indice fini d'un groupe* Γ. *Si* Γ *est sans torsion, on a* $\mathrm{cd}(\Gamma') = \mathrm{cd}(\Gamma)$.

D'après la prop. 5, l'égalité $\mathrm{cd}(\Gamma') = \mathrm{cd}(\Gamma)$ est vraie si $\mathrm{cd}(\Gamma) < \infty$. Tout revient donc à montrer que, si $\mathrm{cd}(\Gamma')$ est fini, il en est de même de $\mathrm{cd}(\Gamma)$. Cela va résulter de la proposition suivante:

PROPOSITION 12. *Supposons que* $\mathrm{cd}(\Gamma')$ *et* $(\Gamma:\Gamma')$ *soient finis. On peut alors faire opérer cellulairement* Γ *sur un* CW*-complexe acyclique* Z *de dimension finie tel que, pour toute cellule* σ *de* Z, *le stabilisateur* Γ_σ *de* σ *dans* Γ *soit fini.*

(Si Γ est sans torsion, les Γ_σ sont réduits à $\{1\}$, et la prop. 11 montre que $\mathrm{cd}(\Gamma) \leq \dim(Z) < \infty$.)

Soit $n = \mathrm{Sup}(3, \mathrm{cd}(\Gamma'))$. D'après la prop. 10, il existe un CW-complexe X de dimension n qui est un espace $K(\Gamma', 1)$. Soit T le revêtement universel d'un tel espace X, relativement à un point-base. Munissons T de la structure de CW-complexe image réciproque de celle de X ([51], §5, (N)). Le groupe Γ' opère librement et cellulairement sur T; on a $T/\Gamma' = X$. Soit

$$Y = \Gamma \times^{\Gamma'} T$$

le Γ-espace *induit* du Γ'-espace T; par définition, Y est le quotient de $\Gamma \times T$ (Γ ayant la topologie discrète) par Γ' opérant par

$$\alpha.(\gamma,t) = (\gamma\alpha^{-1}, \alpha t) \text{ si } \alpha \in \Gamma',\ \gamma \in \Gamma,\ t \in T;$$

de plus, le transformé par $\delta \in \Gamma$ de la classe de (γ,t) est la classe de $(\delta\gamma,t)$. (Autre définition de Y: c'est le revêtement de X associé au Γ'-ensemble Γ.)

L'espace T s'identifie à un sous-espace de Y par $t \mapsto (1,t)$; l'action de Γ sur Y prolonge celle de Γ' sur T. Si $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$, on a $\gamma_1 T = \gamma_2 T$ si et seulement si $\gamma_1\Gamma' = \gamma_2\Gamma'$, ce qui donne un sens à l'expression αT, pour $\alpha \in \Gamma/\Gamma'$. L'espace Y est *somme disjointe* des αT ($\alpha \in \Gamma/\Gamma'$); en particulier, les αT sont les *composantes connexes* de Y. La structure de CW-complexe de T se transporte aux αT, et définit une structure de CW-complexe sur Y, invariante par Γ.

Soit maintenant $Z = \prod_{\alpha\in\Gamma/\Gamma'} \alpha T$ le CW-complexe *produit* des CW-complexes αT (noter que la topologie de Z n'est pas nécessairement la topologie produit: c'est la limite inductive des topologies de ses sous-complexes finis, cf. [51]). Comme Γ opère cellulairement sur Y, et permute entre eux les αT, il opère cellulairement sur Z. De plus:

(i) Z est *contractile*. En effet, chacun des complexes αT est isomorphe à T, donc contractile.

(ii) Pour toute cellule σ de Z, *le stabilisateur* Γ_σ *de* σ *est fini*. En effet, on a $\sigma = \prod \sigma_\alpha$, où σ_α est une cellule de αT. Si γ appartient à Γ_σ, γ permute entre eux les σ_α. Si en outre γ appartient à Γ', on a $\gamma\sigma_1 = \sigma_1$, puisque γ applique T dans lui-même. Comme Γ' opère librement sur les cellules de T, cela entraîne $\gamma = 1$; on a donc $\Gamma_\sigma \cap \Gamma' = \{1\}$, et comme Γ' est d'indice fini dans Γ, cela montre bien que Γ_σ est *fini*.

Le CW-complexe Z répond donc à la question.

REMARQUE

On peut transcrire la démonstration précédente en termes purement algébriques:

Supposons $\mathrm{cd}(\Gamma')$ fini. Soit L une $\mathbf{Z}[\Gamma']$-résolution projective de $\mathbf{Z}$ qui soit de longueur finie, et soit $M = \mathbf{Z}[\Gamma] \otimes_{\mathbf{Z}[\Gamma']} L$ le complexe "induit" correspondant. Ce complexe contient L comme sous-complexe, et l'on a

$$M = \prod_{\alpha \in \Gamma/\Gamma'} \alpha L.$$

Les sous-complexes αL sont permutés entre eux par l'action de Γ. Formons leur produit tensoriel (relativement à un ordre total choisi [1] sur Γ/Γ'):

$$N = \bigotimes_{\alpha \in \Gamma/\Gamma'} (\alpha L).$$

Le groupe Γ opère de façon naturelle sur N (compte tenu des "signes" dus au fait que Γ ne respecte pas la structure d'ordre choisie sur Γ/Γ'). Il est clair que N est acyclique (formule de Künneth) et de longueur finie; si Γ est sans torsion, un argument analogue à celui utilisé plus haut montre que N est $\mathbf{Z}[\Gamma]$-projectif. Le théorème 1 en résulte (voir [44], §9, pour plus de détails).

Cette "algébrisation" a deux avantages:

i) On peut y remplacer $\mathbf{Z}$ par un anneau commutatif A quelconque. On obtient ainsi le résultat suivant (cf. [44], th. 9.2): *Soit Γ' un sous-groupe d'indice fini de Γ; supposons que Γ n'ait pas de* A*-torsion, i.e. que, si* $n \geq 1$ *est l'ordre d'un élément de* Γ, n *soit inversible dans* A; *alors* $\mathrm{cd}_A(\Gamma') = \mathrm{cd}_A(\Gamma)$.

ii) On peut employer la même méthode pour la cohomologie des *groupes profinis* (cf. [35]), à condition de remplacer les modules $\mathbf{Z}[\Gamma]$-projectifs par des modules "pro-libres" relativement à l'algèbre complétée du groupe profini Γ considéré. On voit ainsi que, *si* Γ *n'a pas d'élément d'ordre* p (p premier) *et si* Γ' *est un sous-groupe ouvert de* Γ, *on a* $\mathrm{cd}_p(\Gamma') = \mathrm{cd}_p(\Gamma)$, résultat qui avait été démontré dans [36] au moyen des puissances de Steenrod.

[1] On peut éviter un tel choix; il faut alors définir une notion de "produit tensoriel de complexes" qui ne dépende pas d'une relation d'ordre sur l'ensemble d'indices; nous en laissons les détails au lecteur.

1.8. *Notions virtuelles.*

Nous dirons qu'un groupe Γ est *virtuellement sans torsion* s'il existe un sous-groupe de Γ qui est *sans torsion* et *d'indice fini dans* Γ.

EXEMPLES

Un argument classique, dû à Minkowski [31], montre que tout groupe S-arithmétique est virtuellement sans torsion. Il en est de même, plus généralement, de tout sous-groupe de type fini d'un groupe linéaire sur un corps de caractéristique zéro (cf. par exemple [7], 17.7).

DÉFINITION. *Soit Γ un groupe virtuellement sans torsion. On appelle dimension cohomologique virtuelle de Γ, et on note* $\mathrm{vcd}(\Gamma)$, *la dimension cohomologique des sous-groupes d'indice fini de Γ qui sont sans torsion.*

(Cette définition est licite car tous ces sous-groupes ont même dimension cohomologique, en vertu du th.1.)

REMARQUES

a) On a $\mathrm{vcd}(\Gamma) = 0$ si et seulement si Γ est *fini.*

b) Si Γ' est un sous-groupe de Γ, on a $\mathrm{vcd}(\Gamma') \leq \mathrm{vcd}(\Gamma)$ et il y a égalité si $(\Gamma:\Gamma')$ est fini.

c) Si Γ est sans torsion, on a $\mathrm{vcd}(\Gamma) = \mathrm{cd}(\Gamma)$. Par contre, si Γ a de la torsion, on a $\mathrm{cd}(\Gamma) = \infty$, alors que $\mathrm{vcd}(\Gamma)$ peut être fini.

DÉFINITION. *On dit que Γ est de type* (VFL) (ou que Γ est virtuellement de type (FL)) *s'il existe un sous-groupe d'indice fini de Γ qui est de type* (FL).

Soit Γ un tel groupe. Il est clair que Γ est virtuellement sans torsion, et que $\mathrm{vcd}(\Gamma)$ est *fini*. Choisissons un sous-groupe Γ' de Γ qui soit de type (FL), et posons (cf. Wall [47]):

D'après la prop. 5 (c), le nombre rationnel $\chi(\Gamma)$ ainsi défini ne dépend pas du choix de Γ'. On l'appelle la *caractéristique d'Euler-Poincaré de* Γ.

EXEMPLES

1) Un groupe *fini* Γ est de type (VFL) et $\chi(\Gamma) = 1/\mathrm{Card}(\Gamma)$.

2) Soit $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$. On sait que Γ est somme du groupe cyclique d'ordre 4 engendré par $x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et du groupe cyclique d'ordre 6 engendré par $y = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, ces deux groupes étant amalgamés par leur intersection $\{\pm 1\}$. On déduit facilement de là que le *groupe dérivé* $\Gamma' = (\Gamma,\Gamma)$ de Γ est d'indice 12 dans Γ, et que c'est un groupe libre de base $\{u,v\}$ avec [2]

$$u = xyx^{-1}y^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad v = xy^{-1}x^{-1}y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Le groupe Γ' est donc de type (FL), et l'on a

$$\mathrm{cd}(\Gamma') = 1, \ \chi(\Gamma') = 1 - 2 = -1.$$

On en déduit que Γ est de type (VFL), et que

$$\mathrm{vcd}(\Gamma) = 1, \ \chi(\Gamma) = -\frac{1}{12}.$$

Noter que $-\frac{1}{12}$ est aussi *la valeur de la fonction zêta de Riemann au point* -1; nous reviendrons au n° 3.7 sur cette "coïncidence".

---

[2] Le groupe Γ' a une interprétation simple en termes de la fonction modulaire

$$f(\tau) = \eta(\tau)^2 = \Delta(\tau)^{1/12} = e^{\pi i \tau/6} \prod_{n \geq 1} (1 - e^{2\pi i n \tau})^2 ;$$

c'est l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ telles que

$$f\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = (c\tau + d)\, f(\tau).$$

On peut le décrire par des congruences mod. 12, cf. Hurwitz, *Math. Werke*, I, p. 35-40.

3) Plus généralement, tout groupe S-arithmétique est de type (VFL), cf. n° 2.4, th. 4.

REMARQUE

Si Γ est de type (VFL), on montre facilement que le Γ-module $\mathbf{Z}$ a une résolution libre de type fini (n° 1.1). Il en résulte par exemple que les foncteurs $M \mapsto H^q(\Gamma, M)$ commutent aux limites inductives, et que $H^q(\Gamma, M)$ est de type fini sur $\mathbf{Z}$ si M l'est. De plus, les groupes $H^q(\Gamma, M)$ sont des groupes *de torsion* pour $q > \mathrm{vcd}(\Gamma)$.

QUESTIONS

Soit Γ un groupe de type (VFL). Supposons que Γ soit *sans torsion*. Est-il vrai que Γ est de type (FL)? C'est vrai dans divers cas particuliers. Dans le cas général, je ne sais même pas si $\chi(\Gamma)$ est *entier*. La question est liée à la suivante:

Soit k un corps de caractéristique zéro, soit V un $k[\Gamma]$-module de rang fini sur k, et soit Γ' un sous-groupe distingué d'indice fini de Γ. Posons $V_i = H^i(\Gamma', V)$. Le groupe Γ/Γ' opère sur V_i; soit v_i le caractère de la représentation de Γ/Γ' ainsi définie et soit $v = \Sigma(-1)^i v_i$. Est-il vrai que v soit un multiple du caractère de la représentation régulière de Γ/Γ', i.e. que $v(s) = 0$ pour tout $s \in \Gamma/\Gamma'$, $s \neq 1$? (C'est vrai si Γ est de type (FL), comme on le vérifie facilement.)

Les questions ci-dessus amènent à renforcer la condition (VFL):

DÉFINITION. *On dit que* Γ *est de type* (WFL) *si* Γ *est virtuellement sans torsion, et si tous les sous-groupes d'indice fini sans torsion de* Γ *sont de type* (FL).

PROPOSITION 13. *Soit* Γ *un groupe de type* (WFL) *et soit* m *le ppcm des ordres des sous-groupes finis de* Γ. *Il existe un entier* $n \geq 1$ *tel que* $m^n \cdot \chi(\Gamma) \in \mathbf{Z}$.

(J'ignore si l'on peut prendre $n = 1$.)

Il suffit de montrer que, si p est un nombre premier et si Γ ne contient pas d'élément d'ordre p, alors $\chi(\Gamma)$ est p-entier. Soit Γ' un sous-groupe d'indice fini de Γ qui soit sans torsion. Quitte à remplacer Γ' par l'intersection de ses conjugués, on peut supposer que Γ' est distingué dans Γ. Soit P un p-sous-groupe de Sylow de Γ/Γ', et soit Γ_p son image réciproque dans Γ. Si C est un sous-groupe fini de Γ_p, on a $C \cap \Gamma' = \{1\}$, ce qui montre que C est isomorphe à un sous-groupe de P, donc est un p-groupe. Comme Γ ne contient pas d'élément d'ordre p, on a donc $C = \{1\}$ ce qui prouve que Γ_p est sans torsion. Puisque Γ est supposé de type (WFL), Γ_p est de type (FL), et $\chi(\Gamma_p)$ est entier. Mais l'indice $(\Gamma : \Gamma_p)$ est premier à p, et l'on a $\chi(\Gamma) = \chi(\Gamma_p)/(\Gamma : \Gamma_p)$. D'où le fait que $\chi(\Gamma)$ est p-entier, cqfd.

La plupart des résultats des n$^{\text{os}}$ précédents se transposent sans difficulté aux notions "virtuelles" définies ci-dessus. Nous nous bornerons à deux exemples:

i) *Actions cellulaires*

On reprend les notations et hypothèses du n°1.6: T est un CW-complexe acyclique sur lequel Γ opère cellulairement; pour toute cellule σ, on note Γ_σ le stabilisateur de σ; on choisit un ensemble Σ de représentants des cellules de T modulo Γ.

PROPOSITION 14. (a) *Si Γ est virtuellement sans torsion, il en est de même des Γ_σ et l'on a*

$$\operatorname{vcd}(\Gamma) \leq \operatorname*{Sup}_{\sigma \in \Sigma} (\dim(\sigma) + \operatorname{vcd}(\Gamma_\sigma)).$$

(b) *Supposons que Σ soit fini, et que Γ contienne un sous-groupe Γ' d'indice fini dont les intersections avec les conjugués des Γ_σ soient de type* (FL). *Alors Γ et les Γ_σ sont de type* (VFL), *et l'on a*

$$\chi(\Gamma) = \sum (-1)^{\dim(\sigma)} \chi(\Gamma_\sigma).$$

c) *Supposons que Σ soit fini, que Γ soit virtuellement sans torsion, et que les Γ_σ soient de type* (WFL). *Alors Γ est de type* (WFL).

Soit Γ' un sous-groupe d'indice fini sans torsion de Γ. Pour tout $\sigma \in \Sigma$, soit I_σ un ensemble de représentants dans Γ des éléments de $\Gamma' \backslash \Gamma / \Gamma_\sigma$. Les cellules $\gamma\sigma (\sigma \in \Sigma, \gamma \in I_\sigma)$ forment un système de représentants des cellules de T modulo Γ'. Le stabilisateur $\Gamma'_{\gamma\sigma}$ dans Γ' d'une telle cellule $\gamma\sigma$ est le groupe

$$\Gamma' \cap \Gamma_{\gamma\sigma} = \Gamma' \cap (\gamma \Gamma_\sigma \gamma^{-1}) \simeq (\gamma^{-1} \Gamma' \gamma) \cap \Gamma_\sigma .$$

Il est isomorphe à un sous-groupe d'indice fini sans torsion de Γ_σ. En appliquant la prop. 11 (a) à Γ' on en déduit

$$\operatorname{cd}(\Gamma') \leq \operatorname*{Sup}_{\sigma,\gamma} (\dim(\sigma) + \operatorname{cd}(\Gamma'_{\gamma\sigma}))$$

$$\leq \operatorname*{Sup}_{\sigma} (\dim(\sigma) + \operatorname{vcd}(\Gamma_\sigma)),$$

d'où (a), puisque $\operatorname{vcd}(\Gamma) = \operatorname{cd}(\Gamma')$.

Supposons maintenant que Σ soit fini et que les $\Gamma'_{\gamma\sigma}$ soient de type (FL). Il est clair que les Γ_σ sont alors de type (VFL), et la prop. 11 (b), appliquée à Γ', montre que Γ' est de type (FL), donc que Γ est de type (VFL). Cela démontre la première partie de (b), ainsi que (c). La prop. 11 montre en outre que

$$\chi(\Gamma') = \sum_{\sigma \in \Sigma} \sum_{\gamma \in I_\sigma} (-1)^{\dim(\sigma)} \chi(\Gamma'_{\gamma\sigma}).$$

Mais $\chi(\Gamma')$ est égal à $(\Gamma : \Gamma')\, \chi(\Gamma)$. On est donc ramené à démontrer la formule

$$(\Gamma : \Gamma')\, \chi(\Gamma_\sigma) = \sum_{\gamma \in I_\sigma} \chi(\Gamma'_{\gamma\sigma}).$$

Puisque $\Gamma'_{\gamma\sigma}$ est isomorphe au groupe $\Gamma_\sigma^\gamma = (\gamma^{-1}\Gamma'\gamma) \cap \Gamma_\sigma$, le membre

$$\sum_{\gamma \in I_\sigma} \chi(\Gamma_\sigma^\gamma) = \sum_{\gamma \in I_\sigma} \chi(\Gamma_\sigma)\,(\Gamma_\sigma : \Gamma_\sigma^\gamma).$$

Il suffit donc de prouver que

$$(*) \qquad (\Gamma : \Gamma') = \sum_{\gamma \in I_\sigma} (\Gamma_\sigma : \Gamma_\sigma^\gamma).$$

Or $\Gamma'\backslash\Gamma$ est réunion disjointe des $\Gamma'\backslash\Gamma'\gamma\Gamma_\sigma$ pour $\gamma \in I_\sigma$, et l'on a

$$\mathrm{Card}\,(\Gamma'\backslash\Gamma'\gamma\Gamma_\sigma) = \mathrm{Card}\,(\Gamma_\sigma^\gamma\backslash\Gamma_\sigma) = (\Gamma_\sigma : \Gamma_\sigma^\gamma).$$

La formule $(*)$ en résulte.

ii) *Amalgames*

PROPOSITION 15. *Soit* $\Gamma = \Gamma_1 *_A \Gamma_2$ *un amalgame* (cf. n° 1.3).

(a) *Supposons* Γ *virtuellement sans torsion. Il en est alors de même de* Γ_1, Γ_2 *et* A, *et l'on a*

$$\mathrm{vcd}(\Gamma) \leq \mathrm{Sup}\,(\mathrm{vcd}(\Gamma_1), \mathrm{vcd}(\Gamma_2), 1 + \mathrm{vcd}(A)).$$

(b) *Supposons que* Γ *contienne un sous-groupe d'indice fini dont les intersections avec les conjugués de* A, Γ_1 *et* Γ_2 *soient de type* (FL). *Alors* A, Γ_1, Γ_2 *et* Γ *sont de type* (VFL), *et l'on a*

$$\chi(\Gamma) = \chi(\Gamma_1) + \chi(\Gamma_2) - \chi(A).$$

Si de plus, A, Γ_1 *et* Γ_2 *sont de type* (WFL), *il en est de même de* Γ.

Cela résulte de la prop. 14, appliquée à l'action de Γ sur *l'arbre* T défini par l'amalgame ([38], chap. I, n° 4.1).

COROLLAIRE 1. *Si* Γ_1 *et* Γ_2 *sont finis, le groupe* $\Gamma = \Gamma_1 *_A \Gamma_2$ *est de type* (WFL), *et l'on a*

$$\mathrm{vcd}(\Gamma) < 1 \quad \textit{et} \quad \chi(\Gamma) = \frac{1}{\quad} + \frac{1}{\quad} - \frac{1}{\quad}.$$

On sait que Γ est *résiduellement fini* (cf. par exemple Bourbaki, Alg. I, n^elle éd., §7, exerc. 33). On en conclut qu'il existe un sous-groupe distingué d'indice fini de Γ qui rencontre Γ_1 et Γ_2 seulement en l'élément neutre. On est donc dans les conditions d'application de la prop. 15 (b). D'où le résultat.

COROLLAIRE 2. *Soit* S *un ensemble fini de nombres premiers, soit* $\mathbf{Z}_S$ *le sous-anneau de* $\mathbf{Q}$ *engendré par les éléments* $1/p$, $p \in S$, *et soit* $\Gamma_S = \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}_S)$. *Le groupe* Γ_S *est de type* (WFL), *et l'on a*

$$\mathrm{vcd}(\Gamma_S) \leq 1 + \mathrm{Card}(S) \quad \textit{et} \quad \chi(\Gamma_S) = -\frac{1}{12}\prod_{p \in S}(1-p).$$

Lorsque $S = \emptyset$, on a $\mathbf{Z}_S = \mathbf{Z}$ et $\Gamma_S = \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$. Le corollaire résulte dans ce cas du cor. 1, appliqué à $\Gamma_1 = \mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$, $\Gamma_2 = \mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$ et $A = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ (on a bien $\frac{1}{6} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{12}$). Lorsque $S \neq \emptyset$, on raisonne par récurrence sur le nombre d'éléments de S. Soit $p \in S$, et soit $T = S - \{p\}$. D'après [38], p. II-16, on peut écrire Γ_S comme un amalgame

$$\Gamma_S = \Gamma_1 *_A \Gamma_2$$

où Γ_1 et Γ_2 sont isomorphes à Γ_T et où A est d'indice $p+1$ dans Γ_1 et Γ_2. Le cor. 1, joint à l'hypothèse de récurrence, montre que Γ_S est de type (WFL), que $\mathrm{vcd}(\Gamma_S) \leq 1 + \mathrm{Card}(S)$, et que

$$\begin{aligned}
\chi(\Gamma_S) &= \chi(\Gamma_1) + \chi(\Gamma_2) - \chi(A) \\
&= (1 + 1 - (p+1))\,\chi(\Gamma_T) = (1-p)\,\chi(\Gamma_T), \\
&= (1-p)\left(-\frac{1}{12}\right)\prod_{\ell \in T}(1-\ell) \\
&= -\frac{1}{12}\prod (1-\ell), \text{ cqfd.}
\end{aligned}$$

REMARQUES

1) L'inégalité $\mathrm{vcd}(\Gamma_S) \le 1 + \mathrm{Card}(S)$ est en fait une *égalité*, cf. n° 2.5, prop. 21.

2) Posons

$$\zeta_S(s) = \prod_{p \notin S} \frac{1}{1-p^{-s}}.$$

On a:

$$\zeta_S(-1) = \zeta(-1) \prod_{p \in S} (1-p) = -\frac{1}{12} \prod_{p \in S} (1-p),$$

d'où:

$$\chi(\Gamma_S) = \zeta_S(-1).$$

3) Lorsque $S = \{p\}$, on a $\Gamma_S = \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}[\frac{1}{p}])$; la caractéristique d'Euler-Poincaré de ce groupe est $(p-1)/12$, sa dimension cohomologique virtuelle est égale à 2. Soit Γ' un sous-groupe d'indice fini N de Γ_S, sans torsion; on a $\chi(\Gamma') = (p-1)N/12$; d'autre part, d'après le cor. 2 au th. 5 de [39], on a $H^1(\Gamma', V) = 0$ pour tout $k[\Gamma']$-module V qui est de rang fini sur k (k étant un corps de caractéristique zéro). On en déduit la formule:

$$\dim_k H^0(\Gamma', V) + \dim_k H^2(\Gamma', V) = \frac{(p-1)N}{12} \dim_k V.$$

1.9. *Exemple: groupes de Coxeter.*

Soit S un ensemble fini, et soit $M = (m(s,s'))$ une matrice de Coxeter de type S ([9], p. 20, déf. 4). Rappelons ce que cela signifie:

i) Si s,s' appartiennent à S, $m(s,s')$ est, soit un entier ≥ 1, soit $+\infty$.

ii) La matrice M est symétrique.

iii) On a $m(s,s') = 1$ si et seulement si $s = s'$.

Soit W le *groupe de Coxeter* défini par M ([9], p. 91-92); il est engendré par les éléments s de S, soumis aux relations

$$(ss')^{m(s,s')} = 1 \quad \text{pour} \quad (s,s') \in S\times S \quad \text{et} \quad m(s,s') < \infty.$$

En particulier, on a $s^2 = 1$ pour tout $s \in S$.

Si I est une partie de S, on note W_I le sous-groupe de W engendré par I; c'est un groupe de Coxeter (plus précisément, le couple (W_I, I) est un système de Coxeter, cf. [9], p. 20, th. 2). On a $W_S = W$ et $W_\emptyset = \{1\}$.

PROPOSITION 16. (a) *Le groupe W est de type* (WFL).

(b) *Soit $d = \mathrm{Card}(S)$ et soit m le nombre de composantes irréductibles de (W,S), cf.* [9], p. 21. *On a* $\mathrm{vcd}(W) \le d-m$.

(c) *Si W est infini, on a*

$$\sum_{I \subset S} \varepsilon(I)\, \chi(W_I) = 0.$$

[Ici, et dans toute la suite, on pose $\varepsilon(I) = (-1)^{\mathrm{Card}(I)}$.]

On raisonne par récurrence sur d, le cas $d = 0$ étant trivial. Supposons $d \ge 1$. Nous allons utiliser le *complexe simplicial* T associé par Tits à W (cf. [45] ainsi que [9], p. 40, exerc. 16). Ce complexe jouit des propriétés suivantes, qui le caractérisent à isomorphisme près:

(α) W opère simplicialement sur T.

(β) T contient un simplexe C, de sommets $(x_s)_{s \in S}$ indexés par S; pour toute partie I de S, distincte de S, on note C_I la face de C de sommets les x_s, $s \in S - I$.

(χ) Si $w \in W$ et $I \subset S$, $I \ne S$, on a $w.C_I = C_I$ si et seulement si $w \in W_I$ et dans ce cas w est l'identité sur la face C_I.

(δ) Tout simplexe de T peut être transformé par un élément de W en une face de C et une seule.

En particulier T *est de dimension* $d-1$. Noter que l'on peut donner une interprétation géométrique de T: il est isomorphe[3] au complexe obtenu en

[3] Plus précisément, on définit une bijection canonique de T sur $\Sigma \cap U$ qui est continue et respecte les structures simpliciales de ces deux espaces; toutefois, ce n'est pas en général un homéomorphisme.

intersectant le cône U de [9], p. 96 avec une sphère Σ de centre 0 dans l'espace euclidien $\mathbf{R}^S$. Lorsque W est fini, on a $U = \mathbf{R}^S$ et T est *homéomorphe à* S_{d-1}. D'autre part:

LEMME 4. *Lorsque* W *est infini,* T *est contractile.*

Cela peut se déduire de l'interprétation géométrique de T mentionnée ci-dessus, compte tenu de ce que U est *convexe (loc. cit.*, p. 97) et distinct de $\mathbf{R}^S$; on doit toutefois prendre certaines précautions, en raison du fait que la topologie de T ne coïncide pas nécessairement avec celle de $\Sigma \cap U$. Voici une autre démonstration, qui a l'avantage de s'appliquer également aux *immeubles* associés aux systèmes de Tits à groupe de Coxeter infini ([9], p. 49, exerc. 10):

Numérotons les éléments de W:

$$w_1, w_2, \ldots, w_n, \ldots$$

de telle sorte que, si $\ell(w)$ désigne la *longueur* de w ([9], p. 9, déf. 1), on ait $\ell(w_n) \le \ell(w_{n+1})$ pour tout $n \ge 1$. On a $w_1 = 1$. Notons T_n le sous-complexe de T formé de la réunion des w_iC pour $i \le n$; le complexe T est réunion croissante de la suite des T_n et il suffit donc de montrer que T_n est contractile pour tout n. Cela se fait par récurrence sur n, le cas $n = 1$ étant immédiat puisque $T_1 = C$ est un simplexe. Supposons $n \ge 2$. Le complexe T_n s'obtient en adjoignant le simplexe w_nC à T_{n-1} et tout revient à montrer que w_nC est *rétractile* sur $w_nC \cap T_{n-1}$. Soit J l'ensemble des $s \in S$ tels que $\ell(w_ns) < \ell(w_n)$. Comme $w_n \neq 1$, on a $J \neq \emptyset$; d'autre part, on a $J \neq S$ car sinon w_n serait l'élément de plus grande longueur de W ([9], p. 43, exerc. 22) et W serait fini. Soit I une partie de S distincte de S. Pour que la face w_nC_I de w_nC appartienne à T_{n-1}, il faut et il suffit qu'il existe un indice $i \le n-1$ tel que $w_n \in w_iW_I$; comme $\ell(w_i) \le \ell(w_n)$, ce n'est le cas que si w_n n'est pas l'élément de longueur minimum de la classe w_nW_I; d'après [9], p. 37, exerc. 3, ceci équivaut à dire que $\ell(w_ns) < \ell(w_n)$ pour au moins un $s \in I$, i.e. que I *rencontre* J. On voit ainsi que $w_nC \cap T_{n-1}$ *est réunion des faces* $w_nC_{\{j\}}$ *pour* $j \in J$. Comme ces faces sont de codimension 1, et que J est distinct à la fois de $\emptyset$ et de S, on en déduit bien que w_nC est rétractile sur $w_nC \cap T_{n-1}$, ce qui achève la démonstration du lemme.

Revenons maintenant à la démonstration de la prop. 16. Si W est fini, il n'y a rien à démontrer. Supposons donc W infini. Comme W est isomorphe à un sous-groupe de type fini de $\mathrm{GL}_d(\mathbf{R})$ (cf. [9], p. 93), il est virtuellement sans torsion (voir aussi [9], p. 131, exerc. 9). Vu le lemme 4, on peut appliquer la prop. 14 au complexe T, en choisissant pour Σ l'ensemble des faces C_I $(I \neq S)$ de C. L'hypothèse de récurrence montre que les W_I sont de type (WFL) et il en est donc de même de W. On a de plus

$$\begin{aligned}\mathrm{vcd}(W) &\le \sup_{I \neq S} (\dim(C_I) + \mathrm{vcd}(W_I)) \\ &\le \sup_{I \neq S} (d-1 - \mathrm{Card}(I) + (\mathrm{Card}(I) - m_I)),\end{aligned}$$

où m_I désigne le nombre de composantes irréductibles de W_I. On en déduit

$$\mathrm{vcd}(W) \le d - 1,$$

ce qui démontre (b) lorsque W est irréductible; le cas général se ramène à celui-là en décomposant W en facteurs irréductibles et en appliquant, par exemple, la prop. 6. Enfin, la prop. 14 montre que l'on a

$$\chi(W) = \sum_{I \neq S} (-1)^{\dim(C_I)} \chi(W_I)$$

$$= -\varepsilon(S) \sum_{I \neq S} \varepsilon(I)\, \chi(W_I),$$

d'où, en regroupant,

$$\sum_{I \subset S} \varepsilon(I)\, \chi(W_I) = 0, \text{ cqfd.}$$

REMARQUES

1) L'action de W sur T donne d'autres renseignements sur la cohomologie de W à valeurs dans un W-module M:

Pour tout entier $q \geq 0$, définissons un "faisceau simplicial" $\mathcal{H}^q(M)$ sur le simplexe C en associant à toute face C_I de C le groupe $H^q(W_I, M)$, et à toute inclusion $C_I \subset C_J$ l'homomorphisme

$$\text{Res}: H^q(W_I, M) \to H^q(W_J, M).$$

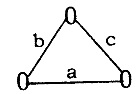
Notons $H^\bullet(C, \mathcal{H}^q(M))$ la cohomologie du simplexe C à valeurs dans le faisceau $\mathcal{H}^q(M)$. Si W est infini, le fait que T soit acyclique entraîne l'existence d'une *suite spectrale*, convergeant vers $H^\bullet(W, M)$, dont le terme $E_2^{p,q}$ est égal à $H^p(C, \mathcal{H}^q(M))$; le cas où W est fini est analogue, mais un peu plus compliqué. Dans les deux cas, on obtient des relations étroites entre $H^\bullet(W, M)$ et les $H^\bullet(W_I, M)$ pour $I \neq S$; on devrait pouvoir les utiliser pour étudier plus en détail $H^\bullet(W, M)$.

2) La formule

$$\sum_{I \subset S} \varepsilon(I)\, \chi(W_I) = 0 \qquad \text{(pour } W \text{ infini)}$$

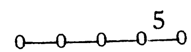
permet de calculer $\chi(W)$ par récurrence sur $d = \text{Card}(S)$, compte tenu de ce que $\chi(W_I) = 1/\text{Card}(W_I)$ lorsque W_I est fini. En voici quelques exemples:

i) (Groupes *triangulaires* de Schwarz). On prend pour graphe de Coxeter un triangle

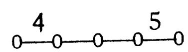


et l'on note a,b,c les $m(s,s')$ correspondant à ses côtés. On suppose que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq 1$, ce qui équivaut à dire que W est infini ([9], p. 130, exerc. 4). Les W_I correspondant à $\text{Card}(I) = 2$ sont d'ordre 2a, 2b, 2c; ceux correspondant à $\text{Card}(I) = 1$ sont d'ordre 2; on trouve donc:

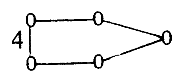
$$\chi(W) = (1/2a + 1/2b + 1/2c) - 3/2 + 1$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - 1\right).$$

ii) Graphe 

; on trouve $\chi(W) = 1/2^6 3^2 5^2$.

iii) Graphe 

; on trouve $\chi(W) = 17/2^7 3^2 5^2$.

iv) Graphe 

; on trouve $\chi(W) = 11/2^7 3^2 5$.

[Les graphes ii), iii), iv) ci-dessus sont *de type hyperbolique compact* (cf. Vinberg [46] ainsi que [9], p. 133, exerc. 15); il en est de même du graphe i) si a,b,c sont finis et $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < 1$. Plus généralement, lorsque W est de type hyperbolique, on a $\chi(W) = 0$ si d est pair, $\chi(W) > 0$ si $d \equiv 1 \pmod 4$ et $\chi(W) < 0$ si $d \equiv 3 \pmod 4$; de plus, $\text{vcd}(W) = d-1$ si W est de type compact, et $\text{vcd}(W) = d-2$ sinon.]

La proposition suivante donne un autre moyen de calculer $\chi(W)$:

PROPOSITION 17. *Notons* W(t) *la série formelle* $\sum_{w \in W} t^{\ell(w)}$. *Alors* W(t) *est une fonction rationnelle de* t, *et l'on a*

$$\chi(W) = 1/W(1).$$

Le fait que W(t) soit une fonction rationnelle est démontré dans [9], p. 45, exerc. 26. Cela donne un sens à l'expression 1/W(1). Pour démontrer que 1/W(1) est égal à $\chi(W)$, on raisonne par récurrence sur $d = \mathrm{Card}(S)$, le cas $d \leq 1$ étant trivial. Si W est fini, on a W(1) = Card(W), et la formule est évidente. Supposons W infini. L'hypothèse de récurrence, jointe à la prop. 16, montre que

$$\varepsilon(S)\chi(W) = -\sum_{I \neq S} \varepsilon(I)/W_I(1).$$

Mais, d'après [9], *loc. cit.*, f), on a $\sum_{I \subset S} \varepsilon(I)/W_I(t) = 0$, d'où, en faisant $t = 1$, l'équation

$$\varepsilon(S)/W(1) = -\sum_{I \neq S} \varepsilon(I)/W_I(1).$$

En comparant, on trouve bien $\chi(W) = 1/W(1)$, cqfd.

REMARQUE

Lorsque W est fini, ou "euclidien", on peut donner des formules explicites simples pour W(t), cf. [9], p. 230-231, exerc. 10. Je ne connais rien de tel dans le cas général. En particulier, j'ignore quels sont les *pôles* de W(t) (ses zéros sont des racines de l'unité distinctes de 1, cf. [9], p. 45, exerc. 26). Lorsque W est de type euclidien irréductible, ou hyperbolique compact, on prouve facilement l'identité

$$W(t^{-1}) = -\varepsilon(S)\,W(t),$$

cf. n° 3.4, prop. 26 (d); cela donne une propriété de *symétrie* des pôles en question, et montre que ce sont des *unités* dans un corps de nombres algébriques.

§2. SOUS-GROUPES DISCRETS DES PRODUITS DE GROUPES DE LIE

Dans ce §, Γ est un sous-groupe discret d'un produit fini $G = \prod G_\alpha$ de groupes de Lie (réels ou ultramétriques), et l'on se propose de relier la cohomologie de Γ aux propriétés des G_α. Nous nous occuperons seulement des invariants $\mathrm{cd}(\Gamma)$, $\mathrm{vcd}(\Gamma)$ ainsi que des propriétés (FL), (VFL) et (WFL) définies au §1; pour $\chi(\Gamma)$, voir §3.

2.1. *Rappels sur le cas réel.*

Soit G un groupe de Lie réel ayant un nombre fini de composantes connexes, et soit K un sous-groupe compact maximal de G. Nous poserons

$$d(G) = \dim(G/K) = \dim(G) - \dim(K).$$

On sait que l'espace homogène $T = G/K$ est difféomorphe à l'espace euclidien $\mathbf{R}^{d(G)}$; en particulier, T est contractile. De plus, G opère *proprement* sur T.

Soit Γ un sous-groupe *discret* de G. Si $x \in T$, le stabilisateur Γ_x de x dans Γ est compact et discret, donc *fini*. Si Γ est sans torsion, il en résulte que Γ opère *librement* sur T, de sorte que T est un revêtement universel de la variété quotient $X_\Gamma = \Gamma\backslash T = \Gamma\backslash G/K$. L'espace X_Γ est un espace $K(\Gamma, 1)$, cf. n° 1.5. De plus, comme X_Γ est une variété différentielle, on peut la *trianguler*.[4]

[4] Pour la triangulation des variétés différentielles (éventuellement à bords), voir J. R. Munkres, *Elementary Differential Topology*, Ann. of Math. Studies n° 54, §10. [En fait, dans la plupart des applications, une *décomposition cellulaire* suffit, et cela peut s'obtenir à moindre frais, grâce à la théorie de Morse.]

PROPOSITION 18. *Soit* Γ *un sous-groupe discret sans torsion de* G.

(a) *Si* G/Γ *est compact,* Γ *est de type* (FL), *et* $cd(\Gamma) = d(G)$.

(b) *Si* G/Γ *n'est pas compact, on a* $cd(\Gamma) \leq d(G)-1$.

Cela résulte de ce qui précède, et de la prop. 9 du n° 1.5. Pour (a), il faut en outre remarquer que G/Γ est compact si et seulement si la variété X_Γ est compacte; pour (b), on utilise le lemme bien connu suivant (conséquence de la dualité de Poincaré):

LEMME 5. *Soit* X *une variété topologique connexe non compacte, et soit* M *un système local de coefficients sur* X. *On a* $H^n(X, M) = 0$ *pour tout* $n \geq \dim(X)$.

La proposition 18 entraîne évidemment:

COROLLAIRE. *Soit* Γ *un sous-groupe discret de* G. *Supposons* Γ *virtuellement sans torsion. On a alors* $vcd(\Gamma) \leq d(G)$ *et il y a égalité si et seulement si* G/Γ *est compact; dans ce dernier cas,* Γ *est de type* (WFL).

REMARQUE

Revenons au cas où Γ est sans torsion. Disons que $X_\Gamma = \Gamma\backslash T$ est *bordable* s'il existe une variété à bord Y_Γ de classe C^∞ qui soit compacte et dont l'intérieur soit isomorphe à X_Γ. Comme les espaces X_Γ et Y_Γ ont même type d'homotopie, Y_Γ est aussi un espace $K(\Gamma, 1)$. Mais toute variété différentielle à bord peut être triangulée. On en déduit que, *si* X_Γ *est bordable, le groupe* Γ *est de type* (FL). Cela s'applique notamment au cas où G est semi-simple et Γ arithmétique (Raghunathan [33] - voir aussi n° 2.4, dém. du th. 4). Signalons à ce sujet:

QUESTION

Soit μ une mesure de Haar à droite sur G. Supposons que $\mu(G/\Gamma)$ soit *fini*. Est-il vrai que X_Γ est bordable?

C'est vrai lorsque G est un groupe semi-simple de rang réel 1, d'après Garland-Raghunathan [17].

2.2. *Rappels sur le cas ultramétrique.*

Soit k un *corps local;* dans tout ce qui suit, nous entendrons par là un corps *complet* pour une valuation discrète v, à corps résiduel *parfait.*[5] On suppose v *normée* de telle sorte que $v(k^*) = \mathbf{Z}$; on note O_v (resp. $\mathfrak{m}_v$, resp. $\tilde{k}$) l'anneau de v (resp. son idéal maximal, resp. son corps résiduel); on a $\tilde{k} = O_v/\mathfrak{m}_v$. Le cas le plus important pour la suite est celui où k est *localement compact,* i.e. où $\tilde{k}$ est *fini.*

Soit maintenant L un *groupe algébrique linéaire* sur k. Notons G le groupe L(k) de ses points à coefficients dans k; c'est un groupe topologique. Comme L est une variété affine, la notion de partie bornée de G a un sens évident (c'est une partie qui est bornée dans *un* plongement affine, ou dans *tous,* cela revient au même). Lorsque k est localement compact, il en est de même de G, et "borné" équivaut à "relativement compact".

Supposons que L soit *réductif connexe,* et notons d(G) son rang sur k au sens de Borel-Tits [8], i.e. la dimension d'un tore déployé maximal de L. D'après Bruhat et Tits, on peut associer à L un CW-complexe T, sur lequel G opère cellulairement, et qui joue un rôle analogue à celui de l'espace homogène G/K du n° précédent. On appelle T *l'immeuble* de G. Il jouit des propriétés suivantes:

i) T est *contractile.*

ii) On a $\dim(T) = d(G)$.

iii) Pour toute cellule σ de T, le stabilisateur G_σ de σ dans G est un *sous-groupe ouvert borné* de G.

iv) Tout sous-groupe borné de G est contenu dans un G_σ.

v) Les cellules de T sont *en nombre fini* modulo l'action de G.

Commençons par deux cas particuliers:

---

[5] J'ignore si cette hypothèse est indispensable.

a) L *est le groupe multiplicatif* G_m (de sorte que $G = k^*$).

On prend pour T la droite $\mathbf{R}$, munie de la triangulation définie par les points *entiers*, et par les intervalles $[n,n+1]$, $n \in \mathbf{Z}$. Si $g \in k^*$ est un élément de G, on fait opérer g sur T par la translation d'amplitude $v(g)$. Les G_σ sont tous égaux au *groupe des unités* de k^*, qui est le plus grand sous-groupe borné de G. Il est clair que les propriétés i) à v) ci-dessus sont satisfaites.

b) L *est simple sur* k.

C'est le cas crucial, traité par Bruhat-Tits (cf. [11], [12]). Soit $\tilde{L}$ le revêtement universel (au sens algébrique) de L. Bruhat et Tits commencent par munir le groupe $\tilde{L}(k)$ d'une structure de *système de Tits* ([9], chap. IV, §2); le groupe de Weyl W de ce système est un groupe de Coxeter euclidien irréductible infini de rang égal à $d(G) + 1$. [Lorsque L est *déployé*, le système de Tits en question avait été défini par Iwahori et Matsumoto [23]; le groupe W est alors simplement le *groupe de Weyl affine* du système de racines de L. Le cas quasi-déployé est dû à Hijikata [20]. Bruhat et Tits montrent comment on peut ramener le cas général à ces cas particuliers par une "descente galoisienne" convenable.]

Une fois obtenu le système de Tits de $\tilde{L}(k)$, on définit T comme *l'immeuble associé à ce système* (cf. [12], I, §2 ou [9], p. 49, exerc. 10); c'est un *complexe simplicial*; ses faces correspondent aux sous-groupes "parahoriques" de $\tilde{L}(k)$. Le groupe $\tilde{L}(k)$ opère simplicialement sur T, avec pour domaine fondamental un simplexe de dimension d(G). Plus généralement, le groupe des automorphismes de $\tilde{L}$ opère de façon naturelle sur T; comme L s'envoie de façon évidente dans le *groupe adjoint* de $\tilde{L}$, on en déduit bien une action de $G = L(k)$ sur T. Les propriétés ii) et v) sont immédiates; iii) résulte de ce qu'un groupe "parahorique" est ouvert et borné; i) et iv) sont des propriétés générales des immeubles à groupe de Coxeter de type euclidien, cf. [10], [12].

EXEMPLE

Prenons pour L le groupe SL_n, $n \geq 2$, qui est simplement connexe.

L'immeuble T s'interprète de la manière suivante: soit R l'ensemble des *réseaux* de k^n (sous-O_v-modules libres de rang n), et soit $\overline{R}$ le quotient de R par k^* opérant par homothéties. L'ensemble $\overline{R}$ est *l'ensemble des sommets* de T. Une partie finie de $\overline{R}$ est une *face* de T si l'on peut représenter ses éléments par des réseaux $L_1, \ldots, L_p$ tels que

$$L_1 \supset L_2 \supset \ldots \supset L_p \supset \mathfrak{m}_v L_1.$$

Le stabilisateur d'une telle face est simplement l'ensemble des $g \in G$ tels que $g(L_i) = L_i$ pour $i = 1, \ldots, p$.

Lorsque $n = 2$, on retrouve *l'arbre de* SL_2, cf. [38], chap. II.

c) *Construction de* T: *cas général.*

Soit C le centre de L, et soit $L/C = \prod_{\alpha \in A} L_\alpha$ la décomposition du groupe semi-simple L/C en produit de groupes simples. Pour tout $\alpha \in A$, soit T_α l'immeuble de L_α, cf. b). Le groupe $G = L(k)$ opère simplicialement sur T_α, grâce à l'homomorphisme $L \to L_\alpha$.

Soit d'autre part Φ une *base* du groupe abélien $\mathrm{Hom}_k(L, G_m)$. Pour tout $\phi \in \Phi$, soit T_ϕ l'immeuble de G_m, cf. a), et faisons opérer L(k) sur T_ϕ au moyen de ϕ.

On pose alors

$$T = \prod_{\alpha \in A} T_\alpha \times \prod_{\phi \in \Phi} T_\phi.$$

C'est un *complexe polysimplicial* au sens de [12], I, 1.1; en particulier, c'est un CW-complexe. Le groupe G opère de façon naturelle sur T. Les propriétés i) à v) se vérifient en remarquant que L est isogène à un produit

$$L_1 = L' \times \prod_{\alpha \in A} L_\alpha \times \prod_{\phi \in \Phi} G_m,$$

où L′ est de rang 0; le groupe L′(k) est alors *borné* (cf. [11], cor. au th. 4) et l'on se réduit ainsi facilement aux cas a) et b) considérés ci-dessus; nous laissons les détails de cette réduction au lecteur (d'autant plus que le cas où L est *isomorphe* à L_1 nous suffirait pour la suite).

REMARQUES

1) Lorsque k est localement compact, le complexe T est localement fini, donc aussi localement compact; les stabilisateurs G_σ des cellules σ de T sont des *sous-groupes ouverts compacts* de G.

2) La structure de complexe de T dépend du choix de la base Φ de $\mathrm{Hom}_k(L, G_m)$; c'est sans inconvénient pour les applications.

Applications à la cohomologie des groupes

Soit Γ un groupe, et soit i un homomorphisme de Γ dans le groupe $G = L(k)$. Si U est un sous-groupe de G, on pose $\Gamma_U = i^{-1}(U)$. On note $\mathfrak{B}$ l'ensemble des sous-groupes *ouverts bornés* de G.

PROPOSITION 19. *On a* $cd(\Gamma) \leq d(G) + \operatorname{Sup}_{U \in \mathfrak{B}} cd(\Gamma_U)$.

On fait opérer Γ sur T au moyen de $i : \Gamma \to G$. Les stabilisateurs Γ_σ des cellules σ de T sont de la forme Γ_U, avec $U \in \mathfrak{B}$, vu la propriété iii) de l'immeuble T. La prop. 19 résulte de là, et de la prop. 11 (a) du n° 1.6.

PROPOSITION 20. *Supposons que, pour tout* $U \in \mathfrak{B}$, Γ_U *soit de type* (FL), *et que* $i(\Gamma)\backslash G/U$ *soit fini. Alors* Γ *est de type* (FL).

Soit $\mathfrak{S}$ l'ensemble des cellules de T. Vu les propriétés iii) et v) de l'immeuble T, le G-ensemble $\mathfrak{S}$ est réunion disjointe d'un nombre fini d'espaces homogènes de la forme G/U, avec $U \in \mathfrak{B}$. Le quotient de $\mathfrak{S}$ par Γ est donc réunion finie d'ensembles de la forme $i(\Gamma)\backslash G/U$; vu l'hypothèse faite sur Γ, il est *fini*. La proposition résulte de là, et de la prop. 11 (b) du n° 1.6.

REMARQUES

1) Dans les énoncés ci-dessus, on peut remplacer $\mathfrak{B}$ par l'ensemble

$\mathfrak{B}'$ des stabilisateurs des cellules de T (lorsque L est simple et simplement connexe, $\mathfrak{B}'$ est l'ensemble des *sous-groupes parahoriques* de G, au sens de Bruhat-Tits).

2) Supposons k localement compact. Alors $\mathfrak{B}$ est l'ensemble des sous-groupes *ouverts compacts* de G; si U,U′ appartiennent à $\mathfrak{B}$, $U \cap U'$ est d'indice fini dans U et U′; on en déduit une propriété analogue pour les Γ_U. Compte tenu du th. 1 du n° 1.7, on voit que, si Γ est sans torsion, les Γ_U *ont même dimension cohomologique*, ce qui simplifie l'énoncé de la prop. 19; de même, dans le cas de la prop. 20, on peut se borner aux sous-groupes U qui sont *compacts maximaux* dans G.

QUESTION

Prenons pour k le corps p-adique $\mathbf{Q}_p$, et soit $H^m_{\mathrm{cont}}(G, \mathbf{Q}_p)$ (resp. $H^m_{\mathrm{ana}}(G, \mathbf{Q}_p)$) le m-ième groupe de cohomologie du complexe des cochaînes *continues* (resp. *analytiques*) de G à valeurs dans $\mathbf{Q}_p$. Lorsque $d(G) = 0$, le groupe G est *compact*, et un théorème de Lazard ([27], chap. V, §2) montre que

$$H^m_{\mathrm{cont}}(G, \mathbf{Q}_p) = H^m_{\mathrm{ana}}(G, \mathbf{Q}_p) = H^m(\mathfrak{g}, \mathbf{Q}_p),$$

où $\mathfrak{g}$ désigne *l'algèbre de Lie* de G. A-t-on un résultat analogue dans le cas général? Il devrait être possible d'utiliser l'action de G sur l'immeuble T pour mettre en relation les groupes de cohomologie en question avec ceux des sous-groupes ouverts compacts de G, lesquels sont justiciables de la théorie de Lazard. Le premier cas à considérer est celui de $SL_2(\mathbf{Q}_p)$, qui est somme amalgamée de deux copies de $SL_2(\mathbf{Z}_p)$.

2.3. *Passage aux produits*

Dans ce n°, $(G_\alpha)_{\alpha \in A}$ désigne une famille finie de groupes de Lie. On suppose que chaque G_α est de l'un des types considérés aux n^os 2.1 et 2.2, autrement dit:

(i) un groupe de Lie réel ayant un nombre fini de composantes connexes;

(ii) le groupe $L_\alpha(k_\alpha)$ des k_α-points d'un groupe algébrique réductif connexe L_α sur un corps local k_α.

Dans le cas (i), on note T_α le quotient de G_α par l'un de ses sous-groupes compacts maximaux; dans le cas (ii), on note T_α l'immeuble de G_α. On pose $d(G_\alpha) = \dim(T_\alpha)$; dans le cas (ii), c'est aussi le rang de G_α sur k_α. Enfin, on pose

$$G = \prod_{\alpha \in A} G_\alpha, \quad T = \prod_{\alpha \in A} T_\alpha \quad \text{et} \quad d(G) = \dim(T) = \sum_{\alpha \in A} d(G_\alpha).$$

Le groupe G opère sur T.

Une partie H de G est dite *bornée* si ses projections sur les G_α de type (i) (resp. de type (ii)) sont relativement compactes (resp. sont bornées). On dit que H est *fortement discrète*[6] si toute partie bornée de H est finie. Lorsque les k_α sont localement compacts, "borné" équivaut à "relativement compact" et "fortement discret" équivaut à "discret".

THÉORÈME 2. *Soit* Γ *un sous-groupe de* G *qui soit sans torsion et fortement discret. On a alors* $cd(\Gamma) \leq d(G)$.

On raisonne par récurrence sur le nombre des facteurs G_α qui sont de type (ii). Lorsqu'il n'y en a aucun, G est de type (i), et le théorème résulte de la prop. 18. Supposons donc qu'il y en ait un, soit G_α, et notons H le produit des G_β, $\beta \neq \alpha$. Soit U un sous-groupe ouvert borné de G_α,

[6] Lorsque le produit $G = \prod G_\alpha$ est réduit à un seul facteur de type (ii), dire que H est fortement discrete équivaut à dire que H est une *sous-variété de dimension zéro de* G, au sens de la géométrie analytique *rigide* de Tate. Signalons à ce propos la question suivante: si Γ est un sous-groupe fortement discret de G, peut-on définir de façon raisonnable une variété rigide quotient G/Γ? C'est le cas si G est un tore, d'après Tate, Morikawa et Raynaud; j'ignore ce qu'il en est lorsque $G = SL_2(Q_p)$, par exemple.

et soit Γ_U l'intersection de Γ avec $H \times U$. Le noyau de la projection

$$pr_1 : \Gamma \to H$$

est contenu dans $\{1\} \times U$, donc borné. Puisque Γ est fortement discret, ce noyau est fini, et, puisque Γ est sans torsion, il est réduit à $\{1\}$. On peut donc identifier Γ_U au moyen de pr_1 à un sous-groupe de H, et il est immédiat que ce sous-groupe est fortement discret dans H. D'après l'hypothèse de récurrence, on a donc $cd(\Gamma_U) \leq d(H)$. D'où, en appliquant la prop. 19,

$$\begin{aligned} cd(\Gamma) &\leq d(G_\alpha) + \text{Sup. } cd(\Gamma_U) \\ &\leq d(G_\alpha) + d(H) = d(G), \end{aligned}$$

ce qui démontre le théorème.

COROLLAIRE. *Si* $d(G) = 1$, *tout sous-groupe fortement discret sans torsion de* G *est un groupe libre.*

En effet, on a alors $d(\Gamma) \leq 1$, et l'on applique le théorème de Stallings-Swan, cf. 1.4, c).

EXEMPLE. Lorsque $G = PGL_2(k)$, où k est un corps local, le corollaire ci-dessus redonne un théorème de Ihara ([22], voir aussi [38], p. II-20).

Supposons maintenant que les G_α soient *localement compacts*, auquel cas il en est de même de G.

THÉORÈME 3. *Soit* Γ *un sous-groupe discret sans torsion de* G *tel que* G/Γ *soit compact. Alors* Γ *est de type* (FL).

Le raisonnement est le même que pour le th. 2: on procède par récurrence sur le nombre des facteurs G_α de type (ii). Lorsqu'il n'y en a aucun, G est de type (i) et le théorème résulte de la prop. 18. Lorsqu'il y en a un, soit G_α, on note H le produit des G_β, $\beta \neq \alpha$. Si U est un sous-groupe ouvert compact de G_α, le groupe $\Gamma_U = \Gamma \cap (H \times U)$ s'identifie à un sous-groupe discret de H. Faisons opérer à droite le sous-groupe $H \times U$ sur l'espace homogène $\Gamma\backslash G$; les orbites de $H \times U$ sont ouvertes, et comme $\Gamma\backslash G$ est compact, on voit qu'elles sont fermées (donc compactes) et en nombre fini. Comme $\Gamma\backslash G/(H \times U)$ s'identifie à $pr_\alpha(\Gamma)\backslash G_\alpha/U$, on en déduit que ce dernier ensemble est *fini*. Vu la prop. 20, on est donc ramené à prouver que les Γ_U sont de type (FL). Mais le quotient $(H \times U)/\Gamma_U$ est l'une des orbites de $H \times U$ opérant dans $\Gamma\backslash G$, donc est compact d'après ce qui précède. Comme U est compact, on déduit de là que H/Γ_U *est compact*. L'hypothèse de récurrence montre alors que Γ_U est de type (FL), ce qui achève la démonstration.

COROLLAIRE. *Soit* Γ *un sous-groupe discret de* G, *qui soit virtuellement sans torsion. On a alors* $vcd(\Gamma) \leq d(G)$. *Si de plus* G/Γ *est compact,* Γ *est de type* (WFL).

Cela résulte du théorème précédent, appliqué aux sous-groupes sans torsion d'indice fini de Γ.

VARIANTE

On pourrait songer à démontrer le th. 3 en faisant opérer Γ sur le produit T des T_α. L'action de Γ est propre et libre, et T est contractile, de sorte que T/Γ *est un espace* $K(\Gamma, 1)$. De plus, comme G/Γ est *compact,* il en est de même de T/Γ. Pour passer de là au fait que Γ est de type (FL), il suffirait donc de montrer que T/Γ *admet une décomposition cellulaire.* C'est probablement faisable (en "stratifiant" T/Γ à l'aide de variétés à coins), mais en tout cas moins simple que le raisonnement par récurrence utilisé ci-dessus.

REMARQUES

1) Si Γ satisfait aux hypothèses du th. 3, on peut montrer que $cd(\Gamma) = d(G)$.

2) Il serait intéressant d'établir des "vanishing theorems" analogues à ceux du cas réel. Prenons par exemple le cas où $G = L(k)$, L étant un groupe algébrique simple sur un corps local k, extension finie de $\mathbf{Q}_p$; soit Γ un sous-groupe discret de G tel que G/Γ soit compact; *est-il vrai que* $H^m(\Gamma, k) = 0$ *pour* $0 < m < d(G)$? (Des résultats dans cette direction viennent d'être obtenus par H. Garland.) La même question se pose pour les autres représentations ρ de G; le cas $m = 1$, $\rho = \mathrm{Ad}$, est particulièrement intéressant, car lié à la *rigidité* de Γ.

2.4. *Groupes S-arithmétiques.*

Rappelons d'abord la définition de ces groupes:

Soit k un corps *global,* i.e. un corps de nombres algébriques (extension finie de $\mathbf{Q}$) ou un corps de fonctions d'une variable sur un corps fini. Soit Σ l'ensemble des places de k et soit Σ^∞ le sous-ensemble de Σ formé des places archimédiennes. Si v appartient à Σ, nous noterons k_v le complété de k pour la topologie définie par v; le corps k_v est isomorphe à $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ si $v \in \Sigma^\infty$; sinon, k_v est un corps local localement compact.

Soit S une partie finie non vide de Σ contenant Σ^∞. Nous noterons O_S le sous-anneau de k formé des éléments dont la valuation est ≥ 0 en toutes les places n'appartenant pas à S. C'est un anneau de Dedekind, dont les idéaux maximaux correspondent aux éléments de $\Sigma - S$.

Soit L un groupe algébrique linéaire sur le corps k; choisissons un plongement de L dans un groupe linéaire GL_n, et notons Γ_S le groupe $L(k) \cap GL_n(O_S)$. Un sous-groupe Γ de $L(k)$ est dit S-*arithmétique* s'il est commensurable à Γ_S, i.e. si $\Gamma \cap \Gamma_S$ est d'indice fini dans Γ et dans Γ_S; cette propriété ne dépend pas du choix du plongement $L \to GL_n$.

Pour tout $v \in S$, notons G_v le groupe $L(k_v)$ des points de L à valeurs dans k_v; c'est un groupe de Lie sur k_v. Posons

$$G = \prod_{v \in S} G_v .$$

Le groupe G est localement compact; si Γ est un sous-groupe S-arithmétique de L(k), on voit tout de suite que Γ est un *sous-groupe discret* de G.

Limitons-nous maintenant au cas où L est *réductif connexe*. Les définitions et résultats du n° précédent s'appliquent alors aux groupes G_v et à leur produit G. On définit en particulier $d(G_v)$ de la manière suivante:

si $v \notin \Sigma^\infty$, $d(G_v)$ est le rang de L sur k_v;

si $v \in \Sigma^\infty$, $d(G_v)$ est la dimension (réelle) du quotient de G_v par un sous-groupe compact maximal.

On pose

$$d(G) = \sum_{v \in S} d(G_v).$$

THÉORÈME 4. *Soit* Γ *un sous-groupe* S*-arithmétique de* L(k), *où* L *est réductif connexe.*

(a) *Supposons que* k *soit un corps de nombres. Alors* Γ *est de type* (WFL) *et l'on a* $\mathrm{vcd}(\Gamma) \leq d(G)$; *si le rang de* L *sur* k *est* ≥ 1 (i.e. si G/Γ n'est pas compact, cf. [6], 8.12), *on a* $\mathrm{vcd}(\Gamma) \leq d(G) - 1$.

(b) *Supposons que* k *soit un corps de fonctions sur un corps fini, et que le rang de* L *sur* k *soit* 0. *Alors* Γ *est de type* (WFL) *et l'on a* $\mathrm{vcd}(\Gamma) \leq d(G)$.

Cas (a)

On sait que Γ est virtuellement sans torsion (cf. par exemple [7], 17.4). On peut donc supposer que Γ est *sans torsion*. Distinguons alors trois cas:

(a_1) *Le rang de* L *sur* k *est* 0

Le quotient G/Γ est compact ([6], *loc. cit.*) et le th. 3 montre que Γ est de type (FL); d'autre part, le th. 2 montre que $\mathrm{cd}(\Gamma) \leq d(G)$.

(a_2) *Le rang de* L *sur* k *est* ≥ 1, *et* $S = \Sigma^\infty$

Ce cas se déduit de Raghunathan [33]. Plus précisément, on se ramène d'abord, par restriction des scalaires, au cas où $k = \mathbf{Q}$. On a alors $G = L(\mathbf{R})$ et Γ est un sous-groupe arithmétique de $L(\mathbf{Q})$. Soit C la composante neutre du centre de L; comme L est réductif, c'est un tore. Soit D le plus grand sous-tore déployé de C, et soit $L' = L/D$. Le groupe $\Gamma \cap D(\mathbf{Q})$ est un sous-groupe arithmétique de $D(\mathbf{Q})$, donc fini, et comme Γ est sans torsion, on a $\Gamma \cap D(\mathbf{Q}) = \{1\}$; ainsi Γ s'identifie à un sous-groupe de $L'(\mathbf{Q})$ et il est facile de voir que ce sous-groupe est arithmétique. On est ainsi ramené au cas où $D = \{1\}$, i.e. où le rang de C sur Q est nul. Le quotient de $D(\mathbf{R})$ par $\Gamma \cap C(\mathbf{Q})$ est alors *compact*. Soit d'autre part $M = L/C$; c'est un groupe semi-simple, et l'image Γ_M de Γ dans $M(\mathbf{Q})$ en est un sous-groupe arithmétique (pouvant *a priori* avoir de la torsion). Soit maintenant K un sous-groupe compact maximal de $G = L(\mathbf{R})$, et soit K_M un sous-groupe compact maximal de $M(\mathbf{R})$ contenant l'image de K par l'homomorphisme de projection $p : G \to M(\mathbf{R})$. D'après [33], il existe une application $f : M(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}_+$, qui est de classe C^∞ et vérifie les propriétés suivantes:

(i) f est invariante à droite par Γ_M et à gauche par K_M;

(ii) l'application $f_\Gamma : M(\mathbf{R})/\Gamma_M \to \mathbf{R}_+$ déduite de f par passage au quotient est *propre* (i.e. $f_\Gamma(x)$ tend vers l'infini avec x).

(iii) il existe un compact de $M(\mathbf{R})/\Gamma_M$ en dehors duquel f_Γ n'a pas de point critique (i.e. df_Γ ne s'annule pas).

En composant f avec p, on contient une fonction $F : G \to \mathbf{R}_+$. Cette fonction F jouit des propriétés (i), (ii), (iii) ci-dessus relativement aux groupes K et Γ; c'est immédiat pour (i), et pour (ii) et (iii) cela résulte de ce que $g/\Gamma \to M(\mathbf{R})/\Gamma_M$ est *propre* (puisque $C(\mathbf{R})/(\Gamma \cap C(\mathbf{Q}))$ est compact). On peut maintenant appliquer à F l'argument de Raghunathan [33] : soit $X_\Gamma = K\backslash G/\Gamma$ et soit $F_X : X_\Gamma \to \mathbf{R}_+$ la fonction définie par F. Du fait que Γ est sans torsion, X_Γ est une variété différentielle, et F_X jouit des propriétés (ii) et (iii) ci-dessus. Si c est un nombre réel assez grand, un argument standard montre que X_Γ est difféomorphe à l'intérieur de la variété à bord $Y_\Gamma = \{x \mid F_X(x) \leq c\}$, qui est compacte. Il en résulte que X_Γ est *bordable*, cf. n°2.1; le groupe Γ est donc de type (FL) et l'on a $cd(\Gamma) \leq d(G)-1$ d'après la prop. 18.

(a_3) *Le rang de* L *sur* k *est* ≥ 1, *et* $S \neq \Sigma^\infty$

On raisonne par récurrence sur le nombre d'éléments de $S - \Sigma^\infty$. Soit $v \in S - \Sigma^\infty$ et posons $S_v = S - \{v\}$. Si U est un sous-groupe ouvert compact de G_v, notons Γ_U le sous-groupe de Γ formé des éléments dont l'image dans G_v appartient à U; il est immédiat que Γ_U *est un sous-groupe* S_v*-arithmétique de* L(k). Vu l'hypothèse de récurrence (resp. le cas (a_2) si $S_v = \Sigma^\infty$), le groupe Γ_U est de type (FL) et l'on a $cd(\Gamma_U) < d(G) - d(G_v)$. D'autre part; l'ensemble $\Gamma\backslash G_v/U$ est *fini*, en vertu d'un résultat de Borel ([6], p. 28, formule (1)). On peut donc appliquer les prop. 19 et 20, et l'on en déduit bien que Γ est de type (FL) et que $cd(\Gamma) < d(G)$.

Cas (b)

Comme le rang de L sur k est 0, le quotient G/Γ est *compact*: cela résulte d'un théorème récent de Harder (cf. [18], Kor. 2.2.7 pour l'énoncé analogue dans le cas "adélique", énoncé qui entraîne facilement celui dont nous avons besoin). Faisons alors opérer Γ sur le CW-complexe T produit des immeubles T_v des G_v, $v \in S$. Du fait que G/Γ est compact, les cellules de T sont en nombre fini modulo l'action de Γ; de plus, les stabilisateurs Γ_σ des cellules σ de T sont les *sous-groupes finis* de Γ. On en déduit que ceux-ci sont *en nombre fini*, à conjugaison près dans Γ. Comme Γ est résiduellement fini, il existe donc un sous-groupe d'indice fini de Γ qui ne rencontre les Γ_σ qu'en l'élément neutre, donc qui est *sans torsion*. Ceci montre déjà que Γ est virtuellement sans torsion. Supposons maintenant que Γ soit sans torsion. Alors Γ opère librement sur T, et le complexe quotient T/Γ est fini. D'où le fait que Γ est de type (FL) et que $cd(\Gamma) \leq d(G)$, ce qui démontre (b). [Le fait que Γ soit isomorphe au groupe fondamental du complexe fini T/Γ entraîne que Γ est un groupe *de présentation finie*, résultat que l'on peut également démontrer par les méthodes de Behr [2], [3].]

COMPLÉMENTS

1) Dans (b), on peut se borner à supposer que le *rang semi-simple de* L *est nul*; la démonstration est analogue. Par contre, lorsque le rang semi-simple de L est ≥ 1, le groupe L contient un sous-groupe isomorphe au groupe additif G_a; si p est la caractéristique de k, on en déduit que Γ contient une somme directe infinie de groupes cycliques d'ordre p. Ainsi, Γ n'est pas virtuellement sans torsion, ni *a fortiori* de type (WFL). Pour obtenir des résultats positifs, il faut donc "négliger p". De façon plus précise, on montre que Γ contient un sous-groupe d'indice fini Γ' qui est *sans* p'*-torsion* (i.e. tout élément de Γ' est d'ordre infini ou d'ordre une puissance de p), et que l'on a $cd_A(\Gamma') \leq d(G)$ pour tout anneau commutatif A dans lequel p est inversible, par exemple $\mathbf{Z}[\frac{1}{p}]$.

2) Supposons que k soit un corps de nombres, soit P un sous-groupe parabolique de L, et soit Γ un sous-groupe S-arithmétique de P(k) qui soit *net* ([7], 17.1). Alors Γ *est de type* (FL). Indiquons brièvement la démonstration. Soit N le radical unipotent de P, et soit $M = P/N$; le groupe M est *réductif*. Si $S = \Sigma^\infty$, le groupe $\Gamma_N = \Gamma \cap N(k)$ est un groupe nilpotent de type fini sans torsion, donc de type (FL), cf. n° 1.4, e); d'autre part Γ/Γ_N est isomorphe à un sous-groupe arithmétique de M(k), et n'a pas de torsion du fait que Γ est net; d'après le th. 4, c'est un groupe de type (FL), et la prop. 6 montre qu'il en est de même de Γ. Lorsque $S \neq \Sigma^\infty$, on raisonne par récurrence sur Card($S - \Sigma^\infty$), comme dans la démonstration du th. 4, (a). La seule chose à vérifier est que, si U est un sous-groupe ouvert de G_v, avec $v \in S - \Sigma^\infty$, l'ensemble

$\Gamma\backslash G_v/U$ est *fini*. Or, on sait que $G_v/P(k_v)$ est compact; il en résulte qu'il suffit de vérifier la finitude de $\Gamma\backslash P(k_v)/U_P$, où U_P est un sous-groupe ouvert de $P(k_v)$; cela se déduit facilement du résultat correspondant pour $M(k_v)$, démontré par Borel ([6], *loc. cit.*).

THÉORÈME 5. *Soit* Γ *un sous-groupe de type fini sans torsion de* $GL_n(k)$. *On a* $cd(\Gamma) < \infty$.

Comme Γ est de type fini, on peut choisir S assez grand pour que Γ soit contenu dans le groupe $\Gamma_S = GL_n(O_S)$. Distinguons alors deux cas:

a) k *est un corps de nombres algébriques.*

Le th. 4 montre que $vcd(\Gamma_S) < \infty$. Comme Γ est un sous-groupe de Γ_S, on a $vcd(\Gamma) \leq vcd(\Gamma_S) < \infty$, et comme Γ est sans torsion, on a $vcd(\Gamma) = cd(\Gamma)$, d'où le résultat.

b) k *est un corps de fonctions sur un corps fini.*

On ne peut plus appliquer directement le th. 4. On fait opérer Γ sur le produit T des immeubles T_v, $v \in S$. Du fait que Γ est sans torsion, il opère *librement* sur T, et l'on a $cd(\Gamma) \leq \dim(T)$, d'où le résultat.

REMARQUE

Dans l'énoncé précédent, il est essentiel que k soit un *corps de nombres* (ou un corps de fonctions d'une variable sur un corps fini). Ainsi, si l'on prend pour k le corps $\mathbf{Q}(t)$, le sous-groupe Γ de $GL_2(k)$ engendré par les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est sans torsion et contient des sous-groupes abéliens libres de rang arbitrairement grand; on a donc $cd(\Gamma) = \infty$. J'ignore s'il existe des exemples analogues où Γ soit *de présentation finie*, et pas seulement *de type fini*.

2.5. *Exemples.*

Commençons par SL_2:

PROPOSITION 21. *Soit* k *un corps de nombres algébriques, et soit* S *un ensemble fini de places de* k *contenant les places archimédiennes. Si* Γ *est un sous-groupe* S*-arithmétique de* $SL_2(k)$, *on a*

$$vcd(\Gamma) = n + s - 1, \quad \textit{avec } n = [k:\mathbf{Q}] \textit{ et } s = \mathrm{Card}(S).$$

Si $v \in S$, posons $G_v = SL_2(k_v)$ et soit $G = \prod_{v \in S} G_v$. D'après le th. 4, on a $vcd(\Gamma) \leq d(G) - 1$, avec $d(G) = \sum_{v \in S} d(G_v)$. Si v est ultramétrique, on a $d(G_v) = 1$, puisque SL_2 est de rang 1. Si $v \in \Sigma^\infty$, et si $k_v \cong \mathbf{R}$, l'espace symétrique T_v attaché à v est isomorphe au plan hyperbolique $SL_2(\mathbf{R})/SO_2(\mathbf{R})$, et $d(G_v) = \dim(T_v) = 2$. Si $k_v \cong \mathbf{C}$, on a

$$T_v \cong SL_2(\mathbf{C})/SU_2(\mathbf{C}) \quad \text{et} \quad d(G_v) = \dim(T_v) = 3.$$

On a donc

$$d(G) = s + r_1 + 2r_2$$

où r_1 (resp. r_2) est le nombre de places réelles (resp. complexes) de k; comme $n = r_1 + 2r_2$, on en déduit

$$vcd(\Gamma) \leq n + s - 1.$$

L'inégalité opposée résulte du lemme suivant:

LEMME 6. *Soit* Δ *un sous-groupe* S*-arithmétique du groupe trigonal supérieur de* $SL_2(k)$. *On a* $vcd(\Delta) = n + s - 1$.

[Comme $\Delta \cap \Gamma$ est d'indice fini dans Δ, on a

$$vcd(\Delta) = vcd(\Delta \cap \Gamma) \leq vcd(\Gamma), \text{ cf. n}^{\circ}\ 1.8,$$

et l'on obtient bien l'inégalité cherchée.]

Reste à démontrer le lemme. Soit ℓ un nombre premier distinct des caractéristiques résiduelles des corps locaux k_v, $v \in S$. D'après le théorème des unités, le groupe O_S^* des éléments inversibles de O_S est de rang $s-1$. On peut donc trouver un sous-groupe A de O_S^* qui est d'indice fini, et isomorphe à Z^{s-1}; quitte à remplacer A par un sous-groupe de congruence, on peut en outre supposer que tous les éléments de A sont congrus à 1 modulo ℓ. Soit Δ' le sous-groupe de $SL_2(O_S)$ formé des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telles que $c = 0$ et $a \in A$. Comme Δ' est commensurable à Δ, et sans torsion, on a $cd(\Delta') = vcd(\Delta)$ et l'on est ramené à montrer que $cd(\Delta') \geq n + s - 1$. Or Δ' est extension de A par O_S; si l'on prend $Z/\ell Z$ comme coefficients, on a donc une suite spectrale:

$$E_2 = H^\bullet(A, H^\bullet(O_S, Z/\ell Z)) \Longrightarrow H^\bullet(\Delta', Z/\ell Z).$$

Mais on peut écrire O_S comme extension d'un groupe T par le groupe Z^n, où T est un groupe de torsion dénombrable dont tous les éléments sont d'ordre premier à ℓ. Il en résulte facilement que

$$H^\bullet(O_S, Z/\ell Z) = H^\bullet(Z^n, Z/\ell Z),$$

et cette algèbre de cohomologie est donc une algèbre extérieure à n générateurs indépendants de degré 1. De plus, le fait que les éléments de A soient congrus à 1 (mod. ℓ) entraîne que A *opère trivialement* sur $H^\bullet(O_S, Z/\ell Z)$. On peut donc écrire le terme E_2 ci-dessus sous la forme

$$E_2 = H^\bullet(A, Z/\ell Z) \otimes H^\bullet(O_S, Z/\ell Z),$$

et les deux facteurs sont des algèbres extérieures ayant respectivement $s-1$ et n générateurs indépendants de degré 1. On en déduit par un argument standard[7] que $H^{n+s-1}(\Delta', Z/\ell Z)$ est isomorphe à $Z/\ell Z$, d'où $cd(\Delta') \geq n + s - 1$, ce qui démontre le lemme.

---

[7] On peut même montrer que $E_2 = E_\infty$ et que $H^\bullet(\Delta', Z/\ell Z)$ est une algèbre extérieure à $n + s - 1$ générateurs indépendants de degré 1.

REMARQUE

Il serait intéressant de trouver une démonstration *a priori* de l'égalité $vcd(\Gamma) = vcd(\Delta)$.

Passons maintenant aux *groupes déployés de rang* ≥ 2. Soient k, S, n, s comme dans la prop. 21, et soit L un groupe algébrique semi-simple déployé de rang $\ell \geq 2$ et de dimension $N = \ell + 2m$. Si $v \in S$, soit $G_v = L(k_v)$. L'invariant $d(G_v)$ est facile à calculer:

$$d(G_v) = \ell \quad \text{si } v \text{ est ultramétrique}$$

$$d(G_v) = N - m = \ell + m \quad \text{si } v \text{ est réelle}$$

$$d(G_v) = N = \ell + 2m \quad \text{si } v \text{ est complexe.}$$

Si $G = \prod_{v \in S} G_v$, on a donc

$$d(G) = \Sigma\, d(G_v) = \ell s + m r_1 + 2 m r_2 = \ell s + mn.$$

Soit Γ (resp. Δ) un sous-groupe S-arithmétique de $L(k)$ (resp. d'un sous-groupe de Borel de $L(k)$). Le th. 4 montre que

$$vcd(\Gamma) < d(G) = \ell s + mn.$$

D'autre part, un argument analogue à celui du lemme 6 donne:

$$vcd(\Delta) = \ell(s-1) + mn = \ell s + mn - \ell.$$

On en conclut comme ci-dessus:

$$(*) \quad \ell s + mn - \ell \leq vcd(\Gamma) < \ell s + mn.$$

Comme $\ell \geq 2$, les inégalités $(*)$ ne suffisent pas à déterminer la valeur de $vcd(\Gamma)$. Ainsi, pour $SL_3(Z)$, on a $\ell = 2$, $m = 3$, $n = 1$, $s = 1$, d'où:

$$vcd(SL_3(Z)) = 3 \text{ ou } 4.$$

De même:

$$vcd(Sp_4(Z)) = 4 \text{ ou } 5.$$

En fait, *ce sont les valeurs les plus basses qui sont correctes*. Plus généralement, on peut montrer que, si G, L, Γ vérifient les hypothèses du th. 4, on a $\mathrm{vcd}(\Gamma) = d(G) - \ell$, où ℓ est le rang de L sur k (la démonstration figurera dans un travail écrit en collaboration avec A. Borel).

§3. MESURES D'EULER-POINCARÉ

3.1. *Définition.*

Soit G un groupe *localement compact unimodulaire* (Bourbaki, *Int.*, chap. VII, p. 18) et soit μ une mesure invariante sur G. Si Γ est un sous-groupe discret de G, la mesure μ définit par passage au quotient une mesure sur G/Γ, notée encore μ; si cette mesure est *bornée*, on peut donc définir $\mu(G/\Gamma) = \int_{G/\Gamma} \mu$; ceci s'applique en particulier lorsque G/Γ est *compact*.

DÉFINITION. *On dit que μ est une mesure d'Euler-Poincaré sur G si tout sous-groupe discret Γ de G, sans torsion, et à quotient compact, possède les deux propriétés suivantes*:

(a) Γ *est de type* (FL).

(b) *On a* $\chi(\Gamma) = \mu(G/\Gamma)$.

REMARQUES

1) Supposons que μ soit une mesure d'Euler-Poincaré sur G, et soit Γ un sous-groupe discret de G à quotient compact. Supposons que Γ soit virtuellement sans torsion (ce qui est le cas pour tous les groupes G "usuels"). *Alors Γ est de type* (WFL) *et l'on a* $\chi(\Gamma) = \mu(G/\Gamma)$; cela se voit en appliquant (a) et (b) ci-dessus à un sous-groupe sans torsion d'indice fini de Γ.

2) Lorsque G possède un sous-groupe discret, sans torsion, et à quotient compact, il existe *au plus une* mesure d'Euler-Poincaré sur G. S'il en existe une, on l'appelle *la* mesure d'Euler-Poincaré de G.

3) On a vu au §2 de nombreux exemples de groupes G pour lesquels tout sous-groupe discret sans torsion à quotient compact est de type (FL); pour un tel groupe, la seule propriété à vérifier est (b).

Donnons maintenant quelques *exemples* de mesures d'Euler-Poincaré (on en verra d'autres par la suite) :

(i) Un groupe *discret* G de type (WFL) possède une mesure d'Euler-Poincaré μ caractérisée par la formule

$$\mu(\{g\}) = \chi(G) \quad \text{pour tout} \quad g \in G.$$

(ii) Si G est *compact*, la mesure d'Euler-Poincaré de G est la mesure de Haar de G normalisée par la condition $\mu(G) = 1$.

(iii) La mesure d'Euler-Poincaré de $\mathbf{R}^n$ est *nulle* si $n \geq 1$.

(iv) Soit k un corps local, à corps résiduel fini ayant q éléments, et soit O_k l'anneau des entiers de k. Soit $G = SL_2(k)$, et soit μ la mesure de Haar de G, normalisée de telle sorte que le sous-groupe ouvert compact $SL_2(O_k)$ ait pour mesure $q - 1$, cf. [38], p. II-20. *La mesure d'Euler-Poincaré de* G *est égale à* $-\mu$. En effet, d'après Ihara [22], G contient des sous-groupes discrets sans torsion à quotient compact, et, si Γ est un tel sous-groupe, Γ est un groupe libre de rang $\mu(G/\Gamma) - 1$ ([22], th. 1 – voir aussi [38], *loc. cit.*, th. 5); on a donc

$$\chi(\Gamma) = 1 - \mathrm{rg}(\Gamma) = -\mu(G/\Gamma)$$

ce qui montre bien que $-\mu$ est la mesure d'Euler-Poincaré de G.

3.2. *Le cas réel (rappels).*

C'est celui où G est un *groupe de Lie réel*, unimodulaire, ayant un nombre fini de composantes connexes. Si K est un sous-groupe compact maximal de G, on note T l'espace homogène G/K, cf. n°2.1. Il est bien connu (cf. par exemple [32], [34]) que l'application de la formule de Gauss-Bonnet aux quotients de T entraîne l'existence d'une mesure d'Euler-Poincaré sur G. De façon plus précise, distinguons deux cas:

a) $d(G) = \dim(T)$ *est impair.*

Dans ce cas, si Γ est un sous-groupe discret sans torsion de G, à quotient compact, la variété $X_\Gamma = \Gamma\backslash T = \Gamma\backslash G/K$ est une variété compacte de dimension impaire, et sa caractéristique d'Euler-Poincaré est

nulle. On a donc $\chi(\Gamma) = 0$ ce qui montre que 0 *est une mesure d'Euler-Poincaré sur* G.

b) $d(G) = \dim(T)$ *est pair.*

Posons $d(G) = 2n$. Munissons T d'une structure riemannienne invariante par G, ce qui est possible puisque K est compact. A cette structure est associée *une forme d'Euler-Poincaré* Ω qui est une *forme tordue de degré* 2n *sur* T, donc s'identifie à une *mesure réelle* sur T. Rappelons brièvement comment se définit cette forme:

De façon générale, soit X une variété riemannienne de dimension 2n et soit R son tenseur de courbure (cf. Milnor [30] §9). Soit $e_1,\ldots,e_{2n}$ un repère orthonormal du fibré tangent à X dans un ouvert U. Sur U, la donnée de R équivaut à celle d'une famille (Ω_{ij}), $1 \leq i, j \leq 2n$, de formes différentielles de degré 2, telles que

$$R(u,v)\,e_i = \sum_j \Omega_{ij}(u,v)\,e_j$$

pour tout couple (u,v) de champs de vecteurs sur U. Les formes Ω_{ij} dépendent de façon alternée de (i,j) et commutent entre elles, puisqu'elles sont de degré 2. On peut donc définir le *pfaffien* $\mathrm{Pf}((\Omega_{ij}))$ de la matrice (Ω_{ij}), cf. Bourbaki, *Alg.*, chap. IX, §5, n°2. C'est une forme de degré 2n sur U. Posons

$$\Omega = \frac{1}{(2\pi)^n}\,\mathrm{Pf}((\Omega_{ij})).$$

Si l'on remplace $e_1,\ldots,e_{2n}$ par un autre repère orthonormal de même orientation (resp. d'orientation opposée) la forme Ω ne change pas (resp. est remplacée par $-\Omega$). Elle définit donc par recollement une *forme tordue de degré* 2n sur X, i.e. une *mesure réelle*, appelée *forme* (ou *mesure*) *de Gauss-Bonnet.* Si A est une pièce compacte de X (Bourbaki, *Var.*, R., 11.1), de bord ∂A, la formule de Gauss-Bonnet prend la forme suivante (cf. Chern [14]):

$$\chi(A) = \int_A \Omega + \int_{\partial A} \Pi\,,$$

où Π est une certaine forme de degré $2n-1$ sur ∂A. En particulier, si X est compacte, on peut prendre $A = X$, $\partial A = \emptyset$, et l'on obtient la formule de Gauss-Bonnet usuelle:

$$\chi(X) = \int_X \Omega .$$

Revenons maintenant au cas de la variété $T = G/K$, munie d'une structure riemannienne invariante par G. La forme Ω correspondante est également invariante par G. Comme K est compact, il existe une mesure μ invariante sur G, et une seule, dont l'image par $G \to G/K$ soit la mesure Ω; si ν désigne la mesure de Haar de K, normalisée de telle sorte que $\nu(K) = 1$, on a $\mu/\nu = \Omega$.

PROPOSITION 22. *La mesure μ est une mesure d'Euler-Poincaré sur* G.

En effet, soit Γ un sous-groupe discret sans torsion de G, à quotient compact. Si Ω_Γ désigne la forme de Gauss-Bonnet de l'espace riemannien $X_\Gamma = \Gamma \backslash T$, on a $\chi(\Gamma) = \chi(X_\Gamma) = \int_{X_\Gamma} \Omega_\Gamma$. Mais le caractère local de Ω montre que l'image réciproque de Ω_Γ par $T \to X_\Gamma = \Gamma\backslash T$ est Ω. On en conclut que l'image par la projection $\Gamma\backslash G \to X_\Gamma$ de la mesure μ est Ω_Γ, d'où

$$\chi(\Gamma) = \int_{X_\Gamma} \Omega_\Gamma = \int_{\Gamma\backslash G} \mu = \mu(\Gamma\backslash G).$$

La proposition résulte de là, et du fait que $\mu(\Gamma\backslash G) = \mu(G/\Gamma)$ puisque G est unimodulaire.

Passons maintenant au cas où G est *réductif*, i.e. de la forme $L(\mathbf{R})$ où L est un groupe algébrique réductif sur $\mathbf{R}$. Notons $\mathfrak{g}$ (resp. $\mathfrak{k}$) l'algèbre de Lie de G (resp. de K). Le résultat suivant est bien connu:

PROPOSITION 23. *La mesure d'Euler-Poincaré μ de G est $\neq 0$ si et seulement si $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{k}$ ont même rang* (i.e. si $\mathfrak{k}$ contient une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$). *S'il en est ainsi, le signe de μ est $(-1)^n$, où*

$$n = \frac{1}{2}\dim(G/K).$$

(Noter que G possède des sous-groupes discrets à quotient compact, d'après un théorème de Borel [5]; on peut donc parler de *la* mesure d'Euler-Poincaré de G.)

La démonstration repose sur le *principe de proportionnalité* de Hirzebruch. Résumons-la:

On se ramène d'abord facilement au cas où G est *semi-simple*. Soit $\mathfrak{m}$ l'orthogonal de $\mathfrak{k}$ dans $\mathfrak{g}$ pour la forme de Killing. Si l'on identifie $\mathfrak{m}$ à l'espace tangent à G/K en l'élément neutre, le tenseur de courbure R en ce point est donné par

$$R(u,v)\,w = [[u,v],w], \qquad (u,v,w \in \mathfrak{m})$$

cf. par exemple [25], p. 231, th. 3.2 (noter que la définition de R utilisée dans [25] est *l'opposée* de celle de Milnor [30], que nous avons adoptée). Soit d'autre part $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \otimes \mathfrak{g} = \mathfrak{g} \oplus i\mathfrak{g}$ la complexifiée de $\mathfrak{g}$. La décomposition de $\mathfrak{g}$ en $\mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$ donne une décomposition de $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$:

$$\mathfrak{g}_{\mathbf{C}} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m} \oplus i\mathfrak{k} \oplus i\mathfrak{m} .$$

L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}' = \mathfrak{k} \oplus i\mathfrak{m}$ est une forme réelle de $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$. Soit G' le groupe simplement connexe correspondant, et soit K' le sous-groupe de G' correspondant à la sous-algèbre $\mathfrak{k}$. Les groupes G' et K' sont *compacts*; l'espace homogène G'/K' est parfois appelé le *dual* de l'espace G/K. Si l'on identifie $i\mathfrak{m}$ à l'espace tangent à G'/K' en l'élément neutre, le tenseur de courbure R' de G'/K' est donné par la même formule que ci-dessus

$$R'(u,v)\,w = [[u,v],w] \qquad (u,v,w \in i\mathfrak{m}).$$

Il en résulte que la bijection $u \mapsto iu$ *transforme* R *en* $-R'$. Notons alors Ω (resp. Ω') la valeur en l'élément neutre de la forme de Gauss-Bonnet de G/K (resp. de G'/K'). Ce qui précède montre que $u \mapsto iu$ transforme Ω en $(-1)^n \Omega'$, avec $n = \frac{1}{2}\dim(G/K)$ si $\dim(G/K)$ est paire (si cette dimension est impaire, on a $\Omega = \Omega' = 0$). Mais l'intégrale de Ω' sur G'/K' est égale à $\chi(G'/K')$. La prop. 24 revient donc à affirmer que $\chi(G'/K') = 0$ si le rang de $\mathfrak{k}$ est strictement inférieur à celui de $\mathfrak{g}$, et que $\chi(G'/K') > 0$ si ces deux rangs sont égaux, ce qui est un résultat classique de Hopf-Samelson [21].

EXEMPLES

1) Supposons que G soit le groupe réel sous-jacent à un groupe réductif *complexe* de dimension ≥ 1. Le rang de $\mathfrak{k}$ est alors égal à la moitié de celui de $\mathfrak{g}$; vu la proposition précédente, *on en conclut que* $\mu = 0$.

2) Si G est *semi-simple déployé*, on a $\mu \neq 0$ si et seulement si -1 appartient au groupe de Weyl du système de racines de G; cela équivaut à dire que tous les facteurs simples de $\mathfrak{g}$ sont de type A_1, B_ℓ, C_ℓ, D_ℓ (ℓ pair), E_7, E_8, F_4 ou G_2.

3) Prenons en particulier $G = SL_2(R)$. Soit

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

la base canonique de $\mathfrak{g}$ (et même de $\mathfrak{g}_Z$), et soit a le 3-covecteur sur $\mathfrak{g}$ tel que $a(X,Y,Z) = 1$. Ce covecteur définit sur G une mesure de Haar μ_a (mesure "*arithmétique*"). En terme de μ_a, la mesure d'Euler-Poincaré μ de G est donnée par la formule

$$\mu = -\frac{1}{2\pi^2}\mu_a.$$

Cela se vérifie, par exemple, en identifiant l'espace homogène

$$T = SL_2(R)/SO_2(R)$$

au demi-plan de Poincaré $H = \{z \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$, et en montrant que la mesure de Gauss-Bonnet de H est $\frac{-1}{2\pi}\, dxdy/y^2$.

3.3. *Le cas ultramétrique.*

Dans ce n°, G désigne un groupe *localement compact unimodulaire* qui *opère cellulairement* sur un CW-complexe T. On fait les hypothèses suivantes:

i) T est *contractile.*

ii) T est *localement compact* (donc de dimension finie).

iii) Pour toute cellule σ de T, le stabilisateur G_σ de σ dans G est un sous-groupe ouvert compact de G.

iv) Tout sous-groupe compact de G est contenu dans un G_σ.

v) Les cellules de T sont en nombre fini modulo l'action de G.

(Ces conditions sont satisfaites lorsque $G = L(k)$, où k est un corps local localement compact et L un groupe algébrique réductif connexe défini sur k, le complexe T étant *l'immeuble* de G au sens du n° 2.2.)

Soit $\mathfrak{S}$ l'ensemble des cellules de T et soit Σ un système de représentants de $G\backslash\mathfrak{S}$ dans $\mathfrak{S}$; d'après v), Σ est *fini.* Si μ est une mesure invariante sur G, non nulle, posons

$$\chi(\mu) = \sum_{\sigma\in\Sigma} (-1)^{\dim(\sigma)} \frac{1}{\mu(G_\sigma)}.$$

Cette somme a un sens, puisque chacun des G_σ est ouvert compact, donc a une mesure $\neq 0$. Elle ne dépend pas du système de représentants Σ choisi: en effet, puisque G est unimodulaire, on a

$$\mu(G_{g\sigma}) = \mu(gG_\sigma g^{-1}) = \mu(G_\sigma)$$

si $g\in G$, $\sigma\in\mathfrak{S}$. De plus, si l'on multiplie μ par une constante c, $\chi(\mu)$ est multiplié par c^{-1}. *Le produit* $\mu_G = \chi(\mu)\mu$ *est donc indépendant du choix de* μ; nous l'appellerons la *mesure canonique* du groupe G.

PROPOSITION 24. *La mesure canonique* μ_G *est une mesure d'Euler-Poincaré.*

Soit Γ un sous-groupe discret sans torsion de G, à quotient compact. Le groupe Γ opère librement et proprement sur T et le quotient $\Gamma\backslash T$ est compact. D'après la prop. 9 (ou la prop. 11), Γ est de type (FL), et l'on a

$$\chi(\Gamma) = \chi(\Gamma\backslash T) = \sum_{\sigma\in\Gamma\backslash\mathfrak{S}} (-1)^{\dim(\sigma)} .$$

Mais le G-ensemble $\mathfrak{S}$ s'identifie à la somme disjointe des espaces homogènes G/G_σ, $\sigma\in\Sigma$, et $\Gamma\backslash\mathfrak{S}$ s'identifie à la somme disjointe des $\Gamma\backslash G/G_\sigma$, $\sigma\in\Sigma$. On peut donc récrire l'expression ci-dessus sous la forme

$$\chi(\Gamma) = \sum_{\sigma\in\Sigma} (-1)^{\dim(\sigma)} \operatorname{Card}(\Gamma\backslash G/G_\sigma).$$

Comme Γ est sans torsion, le groupe ouvert compact G_σ opère librement (à droite) sur $\Gamma\backslash G$. On en conclut que, si μ est une mesure de Haar de G, on a

$$\mu(\Gamma\backslash G) = \mu(G_\sigma) . \operatorname{Card}(\Gamma\backslash G/G_\sigma).$$

D'où:

$$\chi(\Gamma) = \mu(\Gamma\backslash G) \sum_{\sigma\in\Sigma} (-1)^{\dim(\sigma)} \frac{1}{\mu(G_\sigma)}$$

$$= \mu(\Gamma\backslash G)\ \chi(\mu) = \mu_G(G/\Gamma),$$

ce qui démontre la proposition.

COROLLAIRE. *Soit* L *un groupe réductif connexe sur un corps local* K *localement compact. Le groupe* $G = L(k)$ *possède une mesure d'Euler-Poincaré.*

Nous verrons au n° suivant que, si L est *semi-simple*, cette mesure est $\neq 0$ et que son signe est $(-1)^\ell$, où ℓ est le rang de L sur k (i.e. la dimension de T).

EXEMPLE

Prenons $G = SL_2(k)$, de sorte que T est un *arbre* et que Σ est formé de deux sommets P,Q et de l'arête PQ. Si q est le nombre d'éléments du corps résiduel de k, le groupe G_{PQ} est d'indice $q+1$ dans G_P et G_Q. D'où:

$$\begin{aligned}\chi(\mu) &= 1/\mu(G_P) + 1/\mu(G_Q) - 1/\mu(G_{PQ})\\ &= (1+1-q-1)/\mu(G_P)\\ &= (1-q)/\mu(G_P).\end{aligned}$$

La mesure d'Euler-Poincaré μ_G est donc caractérisée par la relation $\mu_G(G_P) = -(q-1)$; comme $G_P = SL_2(O_k)$, on retrouve le résultat de l'exemple (iv) du n° 3.1.

REMARQUE

Il est très probable que tout groupe G de la forme L(k) possède des sous-groupes discrets sans torsion à quotient compact; cela doit pouvoir se démontrer par voie arithmétique, comme l'a fait Borel [5] dans le cas réel.

Mesure d'Euler-Poincaré sur un produit $H \times G$

Soit H un groupe localement compact unimodulaire, muni d'une mesure invariante μ_H. Munissons le groupe $H\times G$ de la mesure produit $\mu_{H\times G} = \mu_H \otimes \mu_G$ de μ_H par la mesure canonique de G. Soit Γ un sous-groupe discret sans torsion de $H\times G$. Pour tout $\sigma\in\mathfrak{S}$, soit

$$\Gamma_\sigma = \Gamma\cap(H\times G_\sigma);$$

la projection $\Gamma_\sigma \to H$ est injective (car son noyau est discret et compact); elle identifie Γ_σ à un sous-groupe discret sans torsion de H. Faisons les hypothèses suivantes:

(a) Pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}$, l'ensemble $\Gamma\backslash(H \times G)/(H \times G_\sigma)$ est fini.

(b) Pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}$, le groupe Γ_σ est de type (FL), le quotient H/Γ_σ est de volume fini, et $\chi(\Gamma_\sigma) = \mu_H(H/\Gamma_\sigma)$.

PROPOSITION 25. *Sous les hypothèses ci-dessus,* Γ *est de type* (FL), *le quotient* $(H \times G)/\Gamma$ *est de volume fini, et* $\chi(\Gamma) = \mu_{H\times G}((H \times G)/\Gamma)$.

La démonstration est analogue à celle de la prop. 24. Le fait que Γ soit de type (FL) résulte de la prop. 20, ou de la prop. 11. Cette dernière montre en outre que

$$\chi(\Gamma) = \sum_{\sigma\in\Gamma\backslash\mathfrak{S}} (-1)^{\dim(\sigma)} \chi(\Gamma_\sigma),$$

d'où

$$\chi(\Gamma) = \sum_{\sigma\in\Gamma\backslash\mathfrak{S}} (-1)^{\dim(\sigma)} \mu_H(\Gamma_\sigma\backslash H).$$

Soit I_σ un système de représentants des éléments de

$$\Gamma\backslash(H \times G)/(H \times G_\sigma).$$

Les $g\sigma$ $(\sigma\in\Sigma,\ g\in I_\sigma)$ forment un système de représentants de $\Gamma\backslash\mathfrak{S}$. On a donc:

$$\chi(\Gamma) = \sum_{\sigma\in\Sigma} (-1)^{\dim(\sigma)} \sum_{g\in I_\sigma} \mu_H(\Gamma_{g\sigma}\backslash H).$$

Posons:

$$\Gamma_\sigma^g = g^{-1}\Gamma_{g\sigma}g = (H \times G_\sigma) \cap g^{-1}\Gamma g.$$

Faisons opérer $H \times G_\sigma$ à droite sur $\Gamma\backslash(H \times G)$; cet espace se décompose en orbites isomorphes aux $\Gamma_\sigma^g\backslash(H \times G_\sigma)$, $g\in I_\sigma$. On en déduit que $(H \times G)/\Gamma$ est de volume fini, et que, si μ est une mesure de Haar sur G, on a

$$(\mu_H \otimes \mu)(\Gamma\backslash(H \times G)) = \sum_{g\in I_\sigma} (\mu_H \otimes \mu)(\Gamma_\sigma^g\backslash(H \times G_\sigma)).$$

De plus, en projetant $\Gamma_\sigma^g\backslash(H \times G_\sigma)$ sur $\Gamma_\sigma^g\backslash H$, on obtient:

$$\begin{aligned}(\mu_H \otimes \mu)(\Gamma_\sigma^g\backslash(H \times G_\sigma)) &= \mu_H(\Gamma_\sigma^g\backslash H)\cdot\mu(G_\sigma)\\ &= \mu_H(\Gamma_{g\sigma}\backslash H)\cdot\mu(G_\sigma).\end{aligned}$$

Utilisant ces formules, on voit que l'on peut récrire $\chi(\Gamma)$ sous la forme

$$\begin{aligned}\chi(\Gamma) &= (\mu_H \otimes \mu)(\Gamma\backslash(H \times G)) \cdot \sum_{\sigma\in\Sigma} (-1)^{\dim(\sigma)} \frac{1}{\mu(G_\sigma)}\\ &= (\mu_H \otimes \mu)(\Gamma\backslash(H \times G)) \cdot \chi(\mu)\\ &= (\mu_H \otimes \mu_G)((H \times G)/\Gamma),\end{aligned}$$

ce qui démontre la proposition.

COROLLAIRE. *Si* μ_H *est une mesure d'Euler-Poincaré sur* H, *la mesure* $\mu_{H\times G} = \mu_H \otimes \mu_G$ *est une mesure d'Euler-Poincaré sur* $H \times G$.

Soit Γ un sous-groupe discret sans torsion de $H \times G$, à quotient compact. Si $\sigma \in \mathfrak{S}$, l'espace $\Gamma\backslash(H \times G)/(H \times G_\sigma)$ est compact et discret, donc fini. D'autre part, on voit comme dans la démonstration du th. 3 du n° 2.3 que H/Γ_σ est compact. Vu l'hypothèse faite sur (H, μ_H), cela entraîne que Γ_σ est de type (FL) et que $\chi(\Gamma_\sigma)$ est égal à $\mu_H(H/\Gamma_\sigma)$. On peut donc appliquer la prop. 25 à Γ; d'où le fait que $\mu_{H\times G}$ est une mesure d'Euler-Poincaré sur $H \times G$.

3.4. *Le cas ultramétrique : détermination de* μ_G.

Soit k un corps local localement compact, soit L un groupe simple simplement connexe sur k, de rang relatif ℓ, et soit G le groupe L(k). Nous nous proposons de déterminer la *mesure canonique* μ_G de G. Comme μ_G est invariante, il suffit de connaître sa valeur sur un *sous-groupe* *ouvert compact* de G. Or, d'après les résultats de Bruhat-Tits rappelés au n° 2.2, le groupe G possède un *système de Tits* (G, B, N, S) (cf. [9], p. 22) dans lequel B est un sous-groupe ouvert compact de G, appelé *sous-groupe d'Iwahori*. Il suffit donc de déterminer $\mu_G(B)$. Cela se fait au moyen d'une certaine fonction rationnelle de plusieurs variables que nous allons définir (la même fonction intervient dans les travaux de I. G. Macdonald sur la formule de Plancherel):

La fonction $W(t)$

Soit (W,S) un système de Coxeter ([9], p. 11) tel que S soit *fini*. Soit $t = (t_i)_{i \in I}$ une famille finie d'indéterminées, et donnons-nous une application $s \mapsto i(s)$ de S dans I vérifiant les conditions équivalentes suivantes (cf. [9], p. 12, prop. 3):

(α) $i(s) = i(s')$ si s et s′ sont conjugués dans W;

(β) $i(s) = i(s')$ si l'ordre $m(s,s')$ de ss' est fini et impair.

Si $s \in S$, on écrit t_s au lieu de $t_{i(s)}$.

Soit $w \in W$. Choisissons une décomposition réduite $(s_1,\dots,s_q)$ de w, cf. [9], p. 9; *le monôme* $t_w = t_{s_1} \dots t_{s_q}$ *est indépendant du choix de* $(s_1,\dots,s_q)$ en vertu de la prop. 5, p. 16 de [9]. Le degré total de t_w est égal à la longueur $\ell(w)$ de w; il tend vers l'infini avec w. Si A est une partie de W, on peut donc poser:

$$A(t) = A((t_i)_{i \in I}) = \sum_{w \in A} t_w .$$

C'est une série formelle à coefficients entiers ≥ 0 en les t_i; lorsque la famille (t_i) est réduite à un élément t, on retrouve la série $A(t)$ étudiée dans [9], p. 45, exerc. 26.

Si Y est une partie de S et W_Y le sous-groupe qu'elle engendre, on peut appliquer ce qui précède à $A = W_Y$. On obtient ainsi une série formelle $W_Y(t)$; si $Y = S$, on écrit $W(t)$ au lieu de $W_S(t)$.

PROPOSITION 26. (a) $W(t)$ *est une fonction rationnelle des* t_i.

(b) *Si* W *est fini, et si* w_0 *est son élément de plus grande longueur, on a*

$$t_{w_0}/W(t) = 1/W(t^{-1}) = \sum_{Y \subset S} \varepsilon(Y)/W_Y(t), \quad \textit{où } \varepsilon(Y) = (-1)^{\mathrm{Card}(Y)}.$$

(c) *Si* W *est infini, on a*

$$0 = \sum_{Y \subset S} \varepsilon(Y)/W_Y(t).$$

(d) *Si* W *est infini, et si tous les* W_Y $(Y \neq S)$ *sont finis, on a*

$$W(t^{-1}) = -\varepsilon(S)\, W(t).$$

(e) *Si* W *est de type euclidien, la série* $W(t)$ *converge absolument dans le polydisque unité* $|t_i| < 1$.

Les démonstrations de (b) et (c) sont identiques à celles des résultats correspondants de l'exerc. 26, *loc. cit.* (voir aussi Solomon [42], §3). Il est inutile de les reproduire. L'assertion (a) se démontre par récurrence sur Card(S). Le cas où W est fini est trivial, $W(t)$ étant un polynôme. Si W est infini, (c) montre que

$$\varepsilon(S)/W(t) = -\sum_{Y \neq S} \varepsilon(Y)/W_Y(t)$$

et les $W_Y(t)$ sont des fonctions rationnelles en vertu de l'hypothèse de récurrence; il en est donc de même de $W(t)$.

Pour (d), on substitue t^{-1} à t dans (c); cela donne la formule

$$\varepsilon(S)/W(t^{-1}) = -\sum_{Y \neq S} \varepsilon(Y)/W_Y(t^{-1}).$$

En la combinant à (b), appliqué aux W_Y, on obtient:

$$\varepsilon(S)/W(t^{-1}) = -\sum_{Y\neq S} \varepsilon(Y) \sum_{Z\subset Y} \varepsilon(Z)/W_Z(t).$$

Mais, si Z est une partie de S distincte de S, la somme des $\varepsilon(Y)$, pour $Z \subset Y \subset S$, est nulle; la somme analogue, étendue aux Y distincts de S, est donc égale à $-\varepsilon(S)$. Cela permet de récrire la formule précédente sous la forme

$$\varepsilon(S)/W(t^{-1}) = -\varepsilon(S) \sum_{Z\neq S} \varepsilon(Z)/W_Z(t),$$

et en comparant avec (c), on en déduit bien que $1/W(t^{-1})$ est égal à $-\varepsilon(S)/W(t)$.

Reste à prouver (e). Comme les coefficients de la série $W(t)$ sont ≥ 0, il suffit de montrer que la série en une variable $W(t)$ converge absolument dans le disque $|t| < 1$; cela résulte de ce que les pôles de $W(t)$ sont des racines de l'unité, cf. par exemple [23], n° 1.8 ou [9], p. 231.

Application aux systèmes de Tits

Soit (G,B,N,S) un système de Tits de groupe de Weyl $W = N/(B\cap N)$. Si $w \in W$, notons $C(w)$ la double classe BwB; le groupe G est réunion disjointe des $C(w)$, $w\in W$ *(décomposition de Bruhat)*. Si $Y \subset S$, notons G_Y la réunion des $C(w)$, $w \in W_Y$; c'est le sous-groupe *parabolique* de G défini par Y.

Supposons que tous les $C(w)$ soient *réunions finies* de classes à gauche modulo B, et posons

$$q_w = \mathrm{Card}(C(w)/B) = (B:B_w) \quad \text{où} \quad B_w = B \cap wBw^{-1}.$$

Ceci s'applique en particulier aux éléments s de S.

LEMME 7. (a) *Les* q_s *sont des entiers* ≥ 2.

(b) *Si* $(s_1,\dots,s_q)$ *est une décomposition réduite de* w, *on a*

$$q_w = q_{s_1}\cdots q_{s_q}.$$

(c) *Si* $s,s' \in S$ *sont conjugués dans* W, *on a* $q_s = q_{s'}$.

Ce résultat est connu, cf. [9], p. 55, exerc. 24. Rappelons-en la démonstration:

Si q_s était égal à 1, on aurait $BsB = sB$ et, en passant aux inverses, $BsB = Bs$, d'où $sBs = ssB = B$, contrairement à l'axiome (T_4) des systèmes de Tits ([9], p. 22). Cela démontre (a).

Pour (b), il suffit de prouver que, si $w\in W$ et $s\in S$ sont tels que $\ell(ws) = \ell(w) + 1$, on a $q_{ws} = q_w q_s$. Or, dans ce cas, on sait que $C(ws) = C(w)C(s)$, cf. [9], p. 26, cor. 1. Décomposons alors $C(w)$ (resp. $C(s)$) en réunion disjointe de classes à gauche g_iB (resp. h_jB), avec $1 \leq i \leq q_w$ (resp. $1 \leq j \leq q_s$). Il résulte de la formule ci-dessus que tout élément de $C(ws)$ est contenu dans une classe à gauche g_ih_jB et tout revient à montrer que ces classes sont *deux à deux distinctes*. Supposons donc que l'on ait $g_ih_j \in g_{i'}h_{j'}B$. Comme h_j et $h_{j'}$ appartiennent au groupe $G_s = B\cup C(s)$, on a $g_i \in g_{i'}G_s$ d'où $g_i \in g_{i'}B$ ou $g_i \in g_{i'}C(s)$. La seconde relation est impossible, car elle entraînerait $g_i \in C(w)C(s) = C(ws)$ alors que g_i appartient à $C(w)$. On a donc $g_i \in g_{i'}B$, i.e. $g_i = g_{i'}$, d'où $h_jB = h_{j'}B$ et $j = j'$, ce qui démontre notre assertion [lorsqu'on ne fait plus d'hypothèses de finitude, le même argument montre que $C(ws)$ s'identifie à $C(w) \times^B C(s)$ si $\ell(ws) = \ell(w) + 1$].

Pour prouver (c), il suffit de voir que, si l'ordre n de ss' est fini et impair, on a $g_s = g_{s'}$. Posons $n = 2m + 1$, et soit $w = (ss')^m s = (s's)^m s'$; les décompositions

$$(s,s',s,s',\dots,s) \quad \text{et} \quad (s',s,s',s,\dots,s')$$

de w sont toutes deux réduites ([9], p. 11). En leur appliquant (b), on voit que

$$(q_s q_{s'})^m q_s = q_w = (q_{s'} q_s)^m q_{s'}$$

d'où $q_s = q_{s'}$, ce qui achève la démonstration du lemme.

Soit maintenant I le quotient de S par la relation

"s et s′ sont conjugués dans W,"

soit i l'application canonique de S sur I, et soit $t = (t_i)_{i \in I}$ une famille d'indéterminées indexée par I. Si $s \in S$, posons comme ci-dessus $t_s = t_{i(s)}$ et $W(t) = \sum_{w \in W} t_w$. D'après le lemme 7, on peut définir une famille $q = (q_i)_{i \in I}$ d'entiers ≥ 2 telle que $q_{i(s)} = q_s = \mathrm{Card}(C(s)/B)$ pour tout $s \in S$; la valeur $t_w(q)$ du monôme t_w pour la famille (q) est égale à q_w, d'après (b).

PROPOSITION 27. *Supposons* W *infini, de type euclidien irréductible.*

(a) *La fonction rationnelle* W(t) *est définie aux points* q *et* q^{-1}; *on a*

$$-\varepsilon(S)\,W(q) = W(q^{-1}) = \sum_{w \in W} 1/q_w\ ,$$

cette dernière série étant convergente.

(b) *Si* Y *est une partie de* S *distincte de* S, *l'indice de* B *dans* G_Y *est fini, et égal à* $W_Y(q) = \sum_{w \in W_Y} q_w$.

(c) *On a* $\sum_{Y \neq S} \varepsilon(Y)/(G_Y:B) = -\varepsilon(S)/W(q) > 0.$

Comme les q_s sont ≥ 2, la prop. 26 (e) montre que W(t) est définie au point q^{-1} et que sa valeur en ce point est égale à la somme de la série convergente $\Sigma\, 1/q_w$; d'autre part, les W_Y sont finis si $Y \neq S$, et la prop. 26 (d) montre que

$$W(t^{-1}) = -\varepsilon(S)\,W(t)\ ,$$

d'où (a).

L'assertion (b) résulte de ce que G_Y est réunion disjointe des C(w), $w \in W_Y$, d'où $\mathrm{Card}(G_Y/B) = \sum_{w \in W_Y} \mathrm{Card}(C(w)/B) = W_Y(q).$

Enfin, on obtient (c) en faisant $t = q$ dans la formule

$$-\varepsilon(S)/W(t) = \sum_{Y \neq S} \varepsilon(Y)/W_Y(t)\ ,$$

cf. prop. 26 (c); le fait que $-\varepsilon(S)/W(q) = 1/W(q^{-1})$ soit > 0 résulte de l'expression de $W(q^{-1})$ sous forme de série donnée dans (a) [noter que la même série intervient dans [29]].

Le cas d'un groupe simple simplement connexe sur un corps local

Revenons au groupe $G = L(k)$ introduit au début de ce n°. On peut appliquer au système de Tits (G,B,N,S) toutes les propriétés démontrées ci-dessus. On a $\mathrm{Card}(S) = \ell + 1$, où ℓ est le rang de L. Les entiers q_s sont des puissances du nombre d'éléments q du corps résiduel de k; le nombre W(q) est défini et non nul; son signe est $(-1)^{\ell}$.

THÉORÈME 6. *On a* $\mu_G(B) = 1/W(q) = (-1)^{\ell}/W(q^{-1})$.

(Rappelons que μ_G désigne la *mesure canonique* de G.)

Soit μ une mesure de Haar sur G; il nous faut calculer $\chi(\mu)$, cf. n° 3.3. Or, par définition même de l'immeuble T, celui-ci contient un simplexe C de dimension ℓ, dont les sommets (x_s) sont indexés par S. Si $Y \subset S$, $Y \neq S$, notons C_Y la face de C de sommets les x_s, $s \in S - Y$; le stabilisateur de C_Y est G_Y; de plus, l'ensemble des C_Y, $Y \neq S$, constitue un système de représentants des cellules de T modulo G. On a donc

$$\chi(\mu) = \sum_{Y \neq S} -\varepsilon(S - Y)/\mu(G_Y)\ ,$$

ou encore, puisque $\mu(G_Y) = \mu(B)\cdot(G_Y:B)$,

$$\chi(\mu) = \frac{-\varepsilon(S)}{\mu(B)} \sum_{Y \neq S} \varepsilon(Y)/(G_Y:B).$$

En appliquant la prop. 27 (c) on obtient

$$\chi(\mu) = 1/W(q)\mu(B),$$

i.e.

$$1/W(q) = \chi(\mu)\mu(B) = \mu_G(B),$$

d'où le théorème, d'après la prop. 27 (a).

COROLLAIRE. *La mesure* μ_G *est* $\neq 0$; *son signe est* $(-1)^{\ell}$.

On a vu en effet que $W(q^{-1}) = \Sigma\, 1/q_w$ est > 0.

Cas déployé

C'est le cas traité par Iwahori-Matsumoto [23]. On part d'un schéma en groupes L_0 sur O_k, que l'on suppose simple, simplement connexe et *déployé*; soient R son système de racines et W_R son groupe de Weyl. On peut appliquer le th. 6 au groupe algébrique $L = L_0 \times_{O_k} k$ déduit de L_0 par extension des scalaires. Le groupe W est alors le *groupe de Weyl affine* $\tilde{W}_R$ de W_R et S est l'ensemble des sommets du *graphe de Dynkin complété* ([9], p. 198) de R; en particulier, il y a un élément s_0 de S tel que $Y = S - \{s_0\}$ soit le graphe de Coxeter de R; le groupe G_Y correspondant est égal à $L_0(O_k)$; c'est un *sous-groupe compact maximal* de $G = L(k)$.

THÉORÈME 7. *Soient* $m_1,\dots,m_\ell$ *les exposants* ([9], p. 118) *de* W_R *et soit* q *le nombre d'éléments du corps résiduel de* k. *On a*

$$\mu_G(B) = \prod_{i=1}^{i=\ell} \frac{1 - q^{m_i}}{1 + q + \dots + q^{m_i}}$$

et

$$\mu_G(L_0(O_k)) = \prod_{i=1}^{i=\ell} (1 - q^{m_i}).$$

Les entiers q_s sont ici tous égaux à q, cf. [23], 3.1. Pour calculer $\mu_G(B) = 1/W(q)$ on peut donc remplacer la fonction de plusieurs variables $W(t)$ par la fonction $W(t) = \sum_{w \in W} t^{\ell(w)}$.

Comme on a

$$W(q) = \prod_{i=1}^{i=\ell} (1 + q + \dots + q^{m_i})/(1 - q^{m_i}),$$

cf. [23], 1.10 et [9], p. 231, on trouve bien la valeur annoncée pour $\mu_G(B)$.

D'autre part, l'indice de B dans $L_0(O_k) = G_Y$ est égal à $W_Y(q)$, cf. prop. 27 (b). On a donc

$$\mu_G(L_0(O_k)) = W_Y(q)\, \mu_G(B).$$

Mais W_Y est égal à W_R, et l'on a

$$W_R(q) = \prod_{i=1}^{i=\ell} (1 + q + \dots + q^{m_i}),$$

cf. [23], [9], *loc. cit.* D'où le résultat cherché.

Groupes réductifs

Passons maintenant au cas d'un groupe L *réductif* sur k (non nécessairement simple), et soit $G = L(k)$.

PROPOSITION 28. *La mesure canonique de* G *est* $\neq 0$ *si et seulement si le rang sur* k *du centre de* L *est nul* (i.e. si le centre de G est compact). *Dans ce cas, son signe est* $(-1)^{\ell}$, *où* ℓ *est le rang* L *sur* k.

Soit $G' \to G$ une *isogénie* et soit n (resp. c) le nombre d'éléments de son noyau (resp. l'indice de son image). Comme G et G′ sont localement isomorphes, la mesure canonique μ_G de G définit une mesure $(\mu_G)'$. Un calcul facile montre que *la mesure canonique* $\mu_{G'}$ *de* G′ *est égale à* $\frac{c}{n}(\mu_G)'$; elle est donc nulle (resp. positive, négative) si et seulement si μ_G l'est.

D'autre part, si $L = L_1 \times L_2$ et si $G = G_1 \times G_2$ est la décomposition correspondante de G, on a $\mu_G = \mu_{G_1} \otimes \mu_{G_2}$, c'est immédiat.

En combinant les deux faits ci-dessus, on est ramené à vérifier la proposition dans les trois cas particuliers suivants:

a) L est simple et simplement connexe;

b) $L = G_m$;

c) L est un tore de rang 0 sur k.

Le premier cas a été traité plus haut; dans le second, on a $\mu_G = 0$ et dans le troisième G est compact et μ_G est la mesure de Haar canonique de G. D'où la proposition.

3.5. *Passage aux produits.*

Soit $(G_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille finie de groupes de Lie. On suppose que chaque G_α est de l'un des types suivants (cf. n° 2.3):

(i) un groupe de Lie réel unimodulaire ayant un nombre fini de composantes connexes;

(ii) le groupe $L_\alpha(k_\alpha)$ des k_α-points d'un groupe algébrique réductif connexe L_α sur un corps local localement compact k_α.

On désigne par G_∞ (resp. G_f) le produit des G_α de type (i) (resp. de type (ii)), et l'on pose

$$G = \prod_{\alpha \in A} G_\alpha = G_\infty \times G_f .$$

Les groupes G_∞, G_f et G sont des groupes localement compacts unimodulaires. On sait (prop. 22) que G_∞ possède une mesure d'Euler-Poincaré; soit μ_∞ une telle mesure. D'autre part, si G_α est de type (ii), nous avons défini au n° 3.3 une mesure canonique μ_{G_α} sur G_α; par passage aux produits, cela définit une mesure μ_f sur G_f. D'où finalement une mesure

$$\mu = \mu_\infty \otimes \mu_f$$

sur $G = G_\infty \times G_f$.

THÉORÈME 7. *La mesure* μ *définie ci-dessus est une mesure d'Euler-Poincaré sur* G.

On raisonne par récurrence sur le nombre de G_α de type (ii) et l'on applique le corollaire à la prop. 25 du n° 3.3.

COROLLAIRE. *Soient* Γ *et* Γ' *deux sous-groupes discrets sans torsion de* G, *à quotient compact. Si* $\mu \neq 0$, *le rapport des volumes de* G/Γ *et* G/Γ' *est un nombre rationnel.*

En effet, ce rapport est égal à $\mu(G/\Gamma)/\mu(G/\Gamma') = \chi(\Gamma)/\chi(\Gamma')$.

REMARQUES

1) Lorsque G_∞ est réductif, les prop. 23 et 28 permettent de déterminer si la mesure μ est > 0, nulle, ou < 0.

2) Si $\mu = 0$, on ne sait à peu près rien sur la nature arithmétique des volumes des G/Γ compacts. Par exemple, soient Γ et Γ' deux sous-groupes discrets à quotient compact de $G = SL_n(\mathbf{R})$, $n \geq 3$. Est-il vrai que le rapport des volumes de G/Γ et G/Γ' soit un nombre rationnel? C'est très improbable, mais on ne connaît aucun contre-exemple; la question est liée à celle des valeurs des fonctions zêta aux entiers positifs impairs.

QUESTION

Soit Γ un sous-groupe discret sans torsion de G tel que G/Γ soit *de volume fini,* mais pas nécessairement compact. *Est-il vrai que* Γ *est de type* (FL) *et que* $\chi(\Gamma) = \mu(G/\Gamma)$? Cela paraît probable, vu les résultats récents de Harder sur les groupes arithmétiques (cf. n° 3.6). Il suffirait en tout cas de résoudre la question lorsque G est un groupe de Lie réel, la prop. 25 permettant de passer de là au cas général.

3.6. *Sous-groupes* S-*arithmétiques.*

Reprenons les notations et hypothèses du n° 2.4 : L est un groupe algébrique réductif sur un *corps global* k, et S est un ensemble fini non vide de places de k contenant les places archimédiennes. Pour tout $v \in S$, on note k_v le complété de k pour v, et l'on pose

$$G = \prod_{v \in S} G_v \quad \text{où} \quad G_v = L(k_v).$$

Soit μ la mesure définie au n° précédent sur le groupe G.

THÉORÈME 8. *Soit* Γ *un sous-groupe* S-*arithmétique de* L(k). *Si le rang de* L *sur* k *est nul, on a* $\chi(\Gamma) = \mu(G/\Gamma)$.

(L'expression $\chi(\Gamma)$ a un sens car Γ est de type (WFL) d'après le th. 4 du n° 2.4.)

Cela résulte du th. 7, puisque l'on sait que G/Γ est *compact.*

Dans les corollaires ci-dessous, on suppose L *semi-simple.*

COROLLAIRE 1. *Si tous les* G_v *correspondant aux places archimédiennes sont compacts, on a* $\chi(\Gamma) \neq 0$, *et le signe de* $\chi(\Gamma)$ *est* $(-1)^{d(G)}$.

(Ceci s'applique notamment lorsque k est un corps de fonctions sur un corps fini.)

Le facteur archimédien G_∞ de G est compact; sa mesure d'Euler-Poincaré est donc > 0 (et même de masse 1). D'autre part, si v est ultramétrique, la prop. 28 montre que la mesure canonique de G_v est non nulle, et que son signe est $(-1)^{d(G_v)}$, où $d(G_v)$ désigne le rang de L sur k_v ; la mesure d'Euler-Poincaré de G est donc $\neq 0$, et son signe est

COROLLAIRE 2. *Si l'une des places de* k *est complexe, et si* $\dim(L) \geq 1$, *on a* $\chi(\Gamma) = 0$.

En effet, on a vu (cf. n° 3.2, exemple 2) que la mesure d'Euler-Poincaré de L(C) est *nulle*; il en est donc de même de celle de G.

Groupes semi-simples de rang ≥ 1

Supposons maintenant que L soit *semi-simple* et *de rang* ≥ 1 sur k. Soit Γ un sous-groupe S-arithmétique de L(k). Le quotient G/Γ n'est pas compact, mais il est *de volume fini.* Si μ désigne comme ci-dessus la mesure canonique de G, le nombre réel $\mu(G/\Gamma)$ a donc un sens. Il s'impose de l'interpréter. Distinguons deux cas:

i) k *est un corps de fonctions sur un corps fini*

L'existence dans L de sous-groupes isomorphes au groupe additif G_a montre que Γ n'est pas de type (WFL) et les définitions du §1 ne s'appliquent plus; on ne peut pas parler de $\chi(\Gamma)$. Pour retrouver des propriétés de finitude, il est probablement nécessaire d'introduire une *cohomologie relative* mesurant en quelque sorte la déviation entre Γ et ses sous-groupes unipotents (par exemple); on peut alors espérer que, si Γ est sans p′-torsion, $\chi(\Gamma)$ est égal à la caractéristique d'Euler-Poincaré de cette cohomologie relative (ce qui montrerait en particulier que $\chi(\Gamma)$ est *entier*); c'est en tout cas ainsi que les choses se passent pour SL_2, cf. [38], chap. II, §2.

ii) k *est un corps de nombres algébriques*

Ici la situation est satisfaisante: *le groupe* Γ *est de type* (WFL) *et l'on a*

$$\chi(\Gamma) = \mu(G/\Gamma)$$

d'après un résultat récent[8] de Harder [19]. [Lorsque $S = \Sigma^\infty$ et que Γ

---

[8] On connaissait divers cas particuliers de ce résultat, notamment celui où L est un *groupe orthogonal* (Siegel [40], t. III, p. 453-456).

est sans torsion, Harder montre que la variété $X_\Gamma = \Gamma\backslash T$ est réunion croissante de pièces compactes $A(t)$ $(t \to \infty)$, ayant même type d'homotopie que X_Γ, et jouissant de la propriété suivante: si l'on écrit la formule de Gauss-Bonnet[9] pour $A(t)$

$$\chi(A(t)) = \int_{A(t)} \Omega + \int_{\partial A(t)} \Pi \quad \text{, cf. n}^\circ 3.2,$$

le terme provenant du bord $\int_{\partial A(t)} \Pi$ *tend vers zéro* quand $t \to \infty$. Par passage à la limite, il en déduit que

$$\chi(\Gamma) = \chi(X_\Gamma) = \int_{X_\Gamma} \Omega,$$

d'où la formule cherchée $\chi(\Gamma) = \mu(G/\Gamma)$ dans le cas considéré. Le cas général se ramène à celui-là au moyen de la prop. 25.]

Lorsque L est *déployé*, Harder donne également une formule explicite pour $\chi(\Gamma)$, voir ci-après.

3.7. *Caractéristiques d'Euler-Poincaré et valeurs de fonctions zêta.*

Conservons les notations et hypothèses du n° précédent, et supposons que k soit un corps de nombres *totalement réel* (i.e. tous les k_v, $v \in \Sigma^\infty$, sont isomorphes à $\mathbf{R}$). Notons r le *degré* de k sur $\mathbf{Q}$, et d la valeur absolue de son *discriminant*. Soit S une partie finie de Σ contenant Σ^∞ et soit O_S l'anneau des éléments de k qui sont entiers en toutes les places de $\Sigma - S$. Définissons la *fonction zêta* de k relativement à S par le produit eulérien

$$\zeta_{k,S}(s) = \prod_{v \in \Sigma - S} \frac{1}{1 - Nv^{-s}},$$

9 On suppose ici que l'espace symétrique T est de dimension *paire*. Lorsqu'il est de dimension impaire, le raisonnement est analogue: on remplace Ω par 0 et Π par la moitié de la forme de Gauss-Bonnet de $\partial A(t)$.

où Nv désigne le nombre d'éléments du corps résiduel de k_v. La fonction $\zeta_{k,S}$ ne diffère de la fonction zêta usuelle ζ_k du corps k que par l'omission des facteurs locaux relatifs à $S - \Sigma^\infty$. Elle se prolonge en une fonction méromorphe dans tout le plan complexe. D'après un théorème de Siegel ([40], t. I, p. 545-546 – voir aussi Klingen [24]) les nombres

$$d^{-1/2}\, \pi^{-rn}\, \zeta_{k,S}(n), \qquad n \text{ entier pair } \geq 2,$$

sont *rationnels*; vu l'équation fonctionnelle de ζ_k, cela équivaut à dire que $\zeta_{k,S}(s)$ prend des *valeurs rationnelles* lorsque s est un entier < 0, valeurs qui sont $\neq 0$ si et seulement si l'entier s est *impair*. Comme Siegel l'a montré sur divers exemples, ces valeurs rationnelles peuvent être interprétées en termes de *volumes* de groupes arithmétiques, donc aussi de *caractéristiques d'Euler-Poincaré*. Indiquons cette interprétation, en nous bornant au cas déployé, qui vient d'être traité complètement par Harder:

Soit L_0 un schéma en groupes simple, simplement connexe et déployé sur l'anneau O_S, soit $L = L_0 \times_{O_S} k$ et soit $\Gamma_S = L_0(O_S)$ le groupe des points O_S-entiers de L_0; le groupe Γ_S est un sous-groupe S-arithmétique de $L(k)$.

Soient d'autre part ℓ, R, W_R le rang de L, son système de racines et son groupe de Weyl; soient $m_1, \ldots, m_\ell$ les exposants de W_R ([9], p. 118); soit W_K le groupe de Weyl d'un sous-groupe compact maximal K de $L(\mathbf{R})$ et posons

$$c = \mathrm{Card}(W_R)/2^\ell\, \mathrm{Card}(W_K).$$

On a alors (Harder [19], n° 2.2):

$$(*) \qquad \chi(\Gamma_S) = \mu(G/\Gamma_S) = c^r \prod_{i=1}^{i=\ell} \zeta_{k,S}(-m_i).$$

[D'après Langlands [26], le *nombre de Tamagawa* de L est égal à 1. On en déduit facilement que $\omega(G/\Gamma_S)$ est égal au produit des $\zeta_{k,S}(1+m_i)$, ω étant une certaine mesure "arithmétique" sur G. Il faut ensuite déterminer le rapport μ/ω ; c'est ce que fait Harder, *loc. cit.*, lorsque $S = \Sigma^\infty$; le cas général se ramène à celui-là en utilisant le th. 7 du n° 3.4. On obtient ainsi une expression de $\mu(G/\Gamma_S)$ en fonction des $\zeta_{k,S}(1+m_i)$; en appliquant l'équation fonctionnelle de $\zeta_{k,S}$, on en déduit[10] la formule (*).]

Exemples

(i) Si L est de type A_ℓ ($\ell \geq 2$), D_ℓ (ℓ impair ≥ 3) ou E_6, le groupe W_R ne contient pas -1, et la mesure canonique μ est nulle, cf. n° 3.2; d'autre part, l'un des exposants m_i est pair ([9], p. 123) de sorte que le nombre $\zeta_{k,S}(-m_i)$ correspondant est nul. On trouve ainsi (de deux façons différentes) la formule $\chi(\Gamma_S) = 0$.

(ii) Si L est de type F_4, le sous-groupe compact maximal K de $L(\mathbf{R})$ est de type D_4; on a $\mathrm{Card}(W_R)/\mathrm{Card}(W_K) = 6$, $c = 3/8$, et (*) s'écrit:

$$\chi(\Gamma_S) = (3/8)^r\ \zeta_{k,S}(-1)\ \zeta_{k,S}(-5)\ \zeta_{k,S}(-7)\ \zeta_{k,S}(-11).$$

(iii) Si L est de type C_ℓ, on a $L(R) = Sp_{2\ell}(R)$, $K = U_\ell(C)$, $c = 1$, et $\{m_1, \ldots, m_\ell\} = \{1, 3, \ldots, 2\ell - 1\}$. D'où

$$\chi(Sp_{2\ell}(O_S)) = \zeta_{k,S}(-1)\ \zeta_{k,S}(-3) \ldots \zeta_{k,S}(-2\ell+1).$$

Par exemple:

$$\chi(Sp_4(Z[\tfrac{1}{p}])) = (1-p)(1-p^3)\ \zeta(-1)\ \zeta(-3) = -\frac{(p-1)(p^3-1)}{2^5 3^2 5}.$$

[10] Lorsque k est un *corps de fonctions* sur un corps fini, la même méthode montre que

$$\mu(G/\Gamma_S) = \tau \prod_{i=1}^{i=\ell} \zeta_{k,S}(-m_i),$$

où τ est le nombre de Tamagawa de L.

(iv) En appliquant (iii) au cas $\ell = 1$ on obtient le résultat suivant, qui généralise celui du n° 1.8, relatif à $k = \mathbf{Q}$:

$$(**) \qquad \chi(SL_2(O_S)) = \zeta_{k,S}(-1) = \zeta_k(-1) \prod_{v \in S - \Sigma^\infty} (1 - Nv).$$

[Noter que, dans ce cas, la détermination de la mesure canonique μ n'offre pas de difficultés (cf. n^{os} 3.1 et 3.2), pas plus que celle du nombre de Tamagawa ([50], n° 3.4); le seul point un peu délicat est l'égalité $\chi(\Gamma_S) = \mu(G/\Gamma_S)$, que l'on peut vérifier au moyen de la compactification donnée dans [7], §17.]

Estimation du dénominateur de $\zeta_k(-1)$

La formule (**) ci-dessus permet de majorer le dénominateur du nombre rationnel $\zeta_{k,S}(-1)$; en effet, si Γ est un sous-groupe sans torsion de $SL_2(O_S)$, d'indice fini N, on a

$$N \cdot \zeta_{k,S}(-1) = N \cdot \chi(SL_2(O_S)) = \chi(\Gamma),$$

et $\chi(\Gamma)$ est *entier* puisque Γ est de type (FL), cf. th. 4. Ainsi, le dénominateur de $\zeta_{k,S}(-1)$ est un *diviseur de* N. En choisissant convenablement Γ, on peut tirer de là une estimation assez précise du dénominateur en question:

Soit ℓ un nombre premier. Si n est un entier ≥ 0, soit F_n le corps des racines ℓ^n-ièmes de l'unité, et soit E_n le sous-corps réel maximal de F_n. Identifions k à un sous-corps de $\mathbf{R}$. et notons $n(\ell)$ la plus grande valeur de n telle que E_n soit contenu dans k (ou que $[F_n k : k]$ soit ≤ 2, cela revient au même). On a $n(\ell) = 0$ pour presque tout ℓ. Posons

$$w = 2^{n(2)+1} \prod_{\ell \neq 2} \ell^{n(\ell)}.$$

PROPOSITION 29. *Le produit* $w \cdot \zeta_{k,S}(-1)$ *est un entier.*

Soit ℓ un nombre premier, et soit $n = n(\ell)$; posons $m = n$ si $\ell \neq 2$ et $m = n+1$ si $\ell = 2$. Vu l'argument donné ci-dessus, on est ramené à prouver le résultat suivant:

LEMME 8. *Il existe un sous-groupe sans torsion de* $SL_2(O_S)$ *dont l'indice est fini et n'est pas divisible par* ℓ^{m+1}.

(L'hypothèse "sans torsion" pourrait être affaiblie en "sans ℓ-torsion", cf. n° 1.8, prop. 13.)

Soit i un entier ≥ 0, et soit $Gal(F_i/Q)$ le groupe de Galois de F_i/Q. On sait que ce groupe s'identifie à $(Z/\ell^i Z)^*$, et que cette identification transforme $Gal(F_i/E_i)$ en $\{\pm 1\}$. Soit V_i le sous-groupe de $(Z/\ell^i Z)^*$ correspondant à $F_i \cap k$. On a

$$V_i = Gal(F_i/(F_i \cap k)) = Gal(F_i k/k).$$

Du fait que k est réel, -1 appartient à V_i. Vu la définition de n, on a $V_i = \{\pm 1\}$ si et seulement si $i \leq n$. Il existe donc un élément $s \in V_{n+1}$ qui est *distinct de* ± 1. Soit Σ_ℓ l'ensemble des $v \in \Sigma - \Sigma^\infty$ dont la caractéristique résiduelle p_v est distincte de ℓ. Si $v \in \Sigma_\ell$, v est non ramifiée dans $F_i k$ et la substitution de Frobenius $\sigma_v \in V_i$ correspondante est l'image de Nv dans $(Z/\ell^i Z)^*$. Prenons $i = n+1$ et appliquons le théorème de densité de Čebotarev à l'extension $F_i k/k$. On en déduit qu'il existe une infinité de $v \in \Sigma_\ell$ tels que $\sigma_v = s$. Vu le choix de s, on a donc

$$Nv \not\equiv \pm 1 \pmod{\ell^{n+1}}.$$

On vérifie facilement que cela entraîne

$$(***) \qquad \begin{aligned} Nv^2 &\not\equiv 1 \pmod{\ell^{n+1}} \quad \text{si } \ell \neq 2 \\ Nv^2 &\not\equiv 1 \pmod{2^{n+2}} \quad \text{si } \ell = 2. \end{aligned}$$

Choisissons un tel v, et supposons en outre que $v \notin S$, que v est non ramifiée sur Q, et que $p_v \neq 2$; c'est possible, puisque cela n'écarte qu'un nombre fini de v. Soit $\mathfrak{p}_v$ l'idéal maximal de O_S défini par v, et soit Γ_v le sous-groupe de $SL_2(O_S)$ formé des matrices congrues à 1 modulo $\mathfrak{p}_v$. Un argument classique, dû à Minkowski [31], montre que le groupe de congruence Γ_v est *sans torsion*. Son indice est $Nv(Nv^2 - 1)$; vu (***) ci-dessus, il n'est pas divisible par ℓ^{m+1}, ce qui démontre le lemme.

REMARQUE

D'après une conjecture de Bass, Birch et Tate, la valeur absolue de l'entier $w\zeta_k(-1)$ de la prop. 23 devrait être égale à l'ordre d'un certain sous-groupe du "K_2" du corps k (l'intersection des noyaux des "symboles modérés"). Comme l'a remarqué Tate, cette conjecture suggère diverses propriétés de divisibilité de $w\zeta_k(-1)$, que l'on peut essayer d'interpréter en termes de caractéristiques d'Euler-Poincaré. En voici un exemple:

PROPOSITION 30. *Soit* S *la réunion de* Σ^∞ *et des places ultramétriques* v *telles que* $p_v = 2$. *Soit* C_S *le groupe des classes d'idéaux de* O_S *de carré égal à* 1. *Posons*

$$Card(O_S^*/O_S^{*2}) = 2^e \quad \textit{et} \quad Card(C_S) = 2^c.$$

L'entier $w\zeta_k(-1)$ *est divisible par* 2^{e+c-1}.

Noter que, d'après le théorème des unités, on a $e = Card(S) \geq r+1$. D'où le résultat suivant, démontré également par Harder et Hirzebruch:

COROLLAIRE. *On a* $w\zeta_k(-1) \equiv 0 \pmod{2^r}$, *où* $r = [k:Q]$.

La démonstration de la proposition 30 utilise un certain sous-groupe S-arithmétique du groupe adjoint $PGL_2 = SL_2/\{\pm 1\}$. De facon plus précise, notons Λ le réseau $O_S \oplus O_S$ de k^2, de sorte que $SL(\Lambda) = SL_2(O_S) = \Gamma$; notons Γ' le sous-groupe $\Gamma/\{\pm 1\}$ de $PGL_2(k)$. Soit d'autre part $\tilde{\Gamma}''$

le sous-groupe de $GL_2(k)$ formé des éléments g tels qu'il existe un idéal $\mathfrak{a}$ de O_S avec $g(\Lambda) = \mathfrak{a}\cdot\Lambda$; le groupe $\tilde{\Gamma}''$ contient k^*; soit $\Gamma'' = \tilde{\Gamma}''/k^*$ son image dans $PGL_2(k)$. On a $\Gamma' \subset \Gamma''$; de plus, Γ'' s'identifie au groupe des automorphismes de l'algèbre de matrices $M_2(O_S)$, donc est un *sous-groupe* S-*arithmétique de* $PGL_2(k)$. En raisonnant comme dans la démonstration de la prop. 29, on en déduit que le produit $w\cdot\chi(\Gamma'')$ est *entier* (noter que, pour tout corps fini $\tilde{k}$, $SL_2(\tilde{k})$ et $PGL_2(\tilde{k})$ ont même nombre d'éléments).

D'autre part, soit $g \in \tilde{\Gamma}''$, et soit $c(g)$ la classe de l'idéal $\mathfrak{a}$ tel que $g(\Lambda) = \mathfrak{a}\cdot\Lambda$; par passage au quotient, l'application $g \mapsto c(g)$ définit un homomorphisme de Γ''/Γ' sur le groupe C_S, et le noyau de cet homomorphisme est isomorphe à O_S^*/O_S^{*2}. On en conclut que $(\Gamma'':\Gamma') = 2^{e+c}$, d'où $\chi(\Gamma'') = \chi(\Gamma')/2^{e+c}$. Mais tout sous-groupe sans torsion d'indice fini N dans Γ est isomorphe à son image dans Γ', qui est d'indice $N/2$ dans Γ'. On en déduit que $\chi(\Gamma') = 2\chi(\Gamma) = 2\zeta_{k,S}(-1)$, d'où

$$\chi(\Gamma'') = \zeta_{k,S}(-1)/2^{e+c-1}.$$

Comme $w\chi(\Gamma'')$ est entier, cela montre que $w\zeta_{k,S}(-1)$ est divisible par 2^{e+c-1}. Mais $\zeta_{k,S}(-1)$ diffère de $\zeta_k(-1)$ par le facteur $\prod_{p_v=2} (1 - Nv)$, qui est un entier *impair*. On voit donc que $w\zeta_k(-1)$ est divisible par 2^{e+c-1}, d'où la proposition.

Exemples

i) Pour $k = \mathbf{Q}$, on a $w = 2^3 3$, $\zeta(-1) = -1/12$ d'où $w\zeta(-1) = -2$ qui est bien divisible par $2^{e+c-1} = 2$.

ii) Pour $k = \mathbf{Q}(\sqrt{5})$, on a $w = 2^3 3.5$ et $\zeta_k(2) = 2\pi^4/75\sqrt{5}$, cf. Siegel [41], p. 32. La formule

$$\zeta_k(-1) = d^{3/2}\zeta_k(2)/(-2\pi^2)^r$$

montre alors que $\zeta_k(-1) = 1/2.2.5$ d'où $w\zeta_k(-1) = 2^2$, qui est bien divisible par $2^{e+c-1} = 2^2$.

iii) Pour $k = \mathbf{Q}(\sqrt{15})$, on trouve de même $w\zeta_k(-1) = 2^4 3$, qui est bien divisible par $2^{e+c-1} = 2^2$.

iv) Prenons pour k le sous-corps réel maximal du corps des racines 7-ièmes de l'unité; c'est un corps cubique cyclique. On a $w = 2^3 3.7$ et $\zeta_k(2) = 2^3\pi^6/3.7^4$, cf. [41], p. 100-101. On en tire $\zeta_k(-1) = -1/3.7$, d'où $w\zeta_k(-1) = -2^3$ qui est bien divisible par $2^{e+c-1} = 2^3$.

Dénominateurs des $\zeta_k(1-2n)$

On peut appliquer au groupe Sp_{2n} la même méthode que ci-dessus. L'indice du groupe de congruence associé à une place ultramétrique v est égal à $Nv^{n^2} \prod_{i=1}^{i=n} (Nv^{2i} - 1)$. On en déduit que le produit des $(Nv^{2i} - 1)\,\zeta_k(1-2i)$, $1 \leq i \leq n$, a pour dénominateur une puissance de p_v. Pour tout nombre premier ℓ, et tout entier pair $2i$, notons alors $m(i,\ell)$ le plus grand entier m tel que ℓ^m divise tous les $(Nv^{2i} - 1)$, avec $p_v \neq \ell$, et soit w_i le produit des $\ell^{m(i,\ell)}$. En raisonnant comme dans la démonstration du lemme 8, on obtient:

PROPOSITION 31. *Pour tout* $n \geq 1$, *le nombre rationnel* $\prod_{i=1}^{i=n} w_i\zeta_k(1-2i)$ *est un entier.*

Il est facile de déterminer explicitement les w_i en fonction de l'intersection de k avec le corps de toutes les racines de l'unité; nous laissons ce soin au lecteur.

Questions

1) Est-il vrai que chacun des $w_i\zeta_k(1-2i)$ soit un *entier?* En d'autres termes, si v est une place ultramétrique de k, de caractéristique résiduelle p, est-il vrai que *le produit de* $\zeta_k(1-2i)$ *par* $(Nv^{2i}-1)$ *appartienne à* $Z[\frac{1}{p}]$? Si oui, peut-on interpréter les entiers $w_i\zeta_k(1-2i)$ en termes de caractéristiques d'Euler-Poincaré?

2) Y a-t-il des congruences reliant les $w_i\zeta_k(1-2i)$ pour différentes valeurs de i, et généralisant les congruences de Kummer sur les nombres de Bernoulli? La question est liée à celle, fort mystérieuse, d'une éventuelle extension des résultats de Kubota-Leopoldt à tous les corps totalement réels.

3) Peut-on interpréter en termes de caractéristiques d'Euler-Poincaré les valeurs aux entiers négatifs des fonctions zêta relatives aux *classes d'idéaux* (modulo un conducteur) d'un corps de nombres quelconque? On sait que ces valeurs sont rationnelles et l'on a une majoration de leurs dénominateurs (Siegel [41]); on peut espérer l'améliorer.

Collège de France
Paris, France

BIBLIOGRAPHIE

[1] W. L. BAILY et A. BOREL – *Compactification of arithmetic quotients of bounded symmetric domains,* Ann. of Math., 84, 1966, p. 442-528.

[2] H. BEHR – *Über die endliche Definierbarkeit verallgemeinerter Einheitengruppen,* J. Crelle, 211, 1962, p. 123-135.

[3] H. BEHR – *Endliche Erzeugbarkeit arithmetischer Gruppen über Funktionenkörpern,* Invent. Math., 7, 1969, p. 1-32.

[4] A. BOREL – *Ensembles fondamentaux pour les groupes arithmétiques,* Colloque sur la théorie des gr. alg., Bruxelles, 1962, p. 23-40.

[5] A. BOREL – *Compact Clifford-Klein forms of symmetric spaces,* Topology, 2, 1963, p. 111-122.

[6] A. BOREL – *Some finiteness properties of adele groups over number fields,* Publ. Math. I.H.E.S., 16, 1963, p. 5-30.

[7] A. BOREL – Introduction aux groupes arithmétiques, Hermann, Paris, 1969.

[8] A. BOREL et J. TITS – *Groupes réductifs,* Publ. Math. I.H.E.S., 27, 1965, p. 55-151.

[9] N. BOURBAKI – Groupes et Algèbres de Lie, chap. IV-V-VI, Hermann, Paris, 1968.

[10] F. BRUHAT et J. TITS – *Un théorème de point fixe,* I.H.E.S., 1966 (notes polycopiées).

[11] F. BRUHAT et J. TITS – *Groupes algébriques simples sur un corps local*, Proc. Conf. Local Fields, Springer-Verlag, 1967. (Voir aussi C. R. Acad. Sci. Paris, 263, 1966, p. 598-601, 766-768, 822-825 et 867-869.)

[12] F. BRUHAT et J. TITS – *Groupes algébriques semi-simples sur un corps local. Chap. I. Systèmes de Tits de type affine.* A paraître aux Publ. Math. I.H.E.S.

[13] H. CARTAN et S. EILENBERG – Homological Algebra, Princeton Univ. Press, Princeton, 1956.

[14] S. S. CHERN – *A simple intrinsic proof of the Gauss-Bonnet formula for closed Riemannian manifolds*, Ann. of Math., 45, 1944, p. 747-752.

[15] C. DELAROCHE et A. KIRILLOV – *Sur les relations entre l'espace dual d'un groupe et la structure de ses sous-groupes fermés (d'après* D. A. KAJDAN), Sém. Bourbaki, 1967/68, exposé 343, Benjamin, New York, 1969.

[16] S. EILENBERG et T. GANEA – *On the Lusternik-Schnirelmann category of abstract groups*, Ann. of Math., 65, 1957, p. 517-518.

[17] H. GARLAND et M. S. RAGHUNATHAN – *Fundamental domains for lattices in rank one semi-simple Lie groups*, Ann. of Math., 92, 1970, p. 279-326.

[18] G. HARDER – *Minkowskische Reduktionstheorie über Funktionenkörpern*, Invent. Math., 7, 1969, p. 33-54.

[19] G. HARDER – *A Gauss-Bonnet formula for discrete arithmetically defined groups*, Annales Sci. E.N.S., à paraître.

[20] H. HIJIKATA – *On the arithmetic of $\mathfrak{p}$-adic Steinberg groups*, Yale Univ., 1964 (notes polycopiées).

[21] H. HOPF et H. SAMELSON – *Ein Satz über die Wirkungsräume*

[22] Y. IHARA – *On discrete subgroups of the two by two projective linear group over $\mathfrak{p}$-adic fields*, J. Math. Soc. Japan, 18, 1966, p. 219-235.

[23] N. IWAHORI et H. MATSUMOTO – *On some Bruhat decomposition and the structure of the Hecke ring of p-adic Chevalley groups*, Publ. Math. I.H.E.S., 25, 1965, p. 5-48.

[24] H. KLINGEN – *Über die Werte der Dedekindschen Zetafunktion*, Math. Ann., 145, 1962, p. 265-272.

[25] S. KOBAYASHI et K. NOMIZU – Foundations of differential geometry, vol. II, Intersc. Publ., New York, 1969.

[26] R. P. LANGLANDS – *The volume of the fundamental domain for some arithmetical subgroups of Chevalley groups*, Proc. Symp. Pure Maths., vol. IX, p. 143-148, Amer. Math. Soc., Providence, 1966.

[27] M. LAZARD – *Groupes analytiques $\mathfrak{p}$-adiques*, Publ. Math. I.H.E.S., 26, 1965, p. 5-219.

[28] R. C. LYNDON – *Cohomology theory of groups with a single defining relation*, Ann. of Math., 52, 1950, p. 650-665.

[29] H. MATSUMOTO – *Fonctions sphériques sur un groupe semi-simple $\mathfrak{p}$-adique*, C. R. Acad. Sci. Paris, 269, 1969, p. 829-832.

[30] J. MILNOR – Morse theory. Princeton Univ. Press, Princeton, 1963.

[31] H. MINKOWSKI – *Zur Theorie der positiven quadratischen Formen*, J. Crelle, 101, 1887, p. 196-202 [Gesamm. *Abhandlungen*, I, p. 212-218].

[32] T. ONO – *On algebraic groups and discontinuous groups*, Nagoya Math. J., 27, 1966, p. 279-332.

[33] M. S. RAGHUNATHAN – *A note on quotients of real algebraic groups by arithmetic subgroups*, Invent. Math., 4, 1968, p. 318-335.

[34] I. SATAKE – *The Gauss-Bonnet Theorem for* V-*manifolds*, J. Math. Soc. Japan, 9, 1957, p. 464-492.

[35] J-P. SERRE – Cohomologie galoisienne, 3ème éd., Lecture Notes in Maths., n° 5, Springer-Verlag, 1965.

[36] J-P. SERRE – *Sur la dimension cohomologique des groupes profinis*, Topology, 3, 1965, p. 413-420.

[37] J-P. SERRE – *Cohomologie des groupes discrets*, C. R. Acad. Sci. Paris, 268, 1969, p. 268-271.

[38] J-P. SERRE – Arbres, amalgames et SL_2, notes polycopiées rédigées avec la collaboration de H. BASS, à paraître aux Lecture Notes in Maths.

[39] J-P. SERRE – *Le problème des groupes de congruence pour* SL_2, Ann. of Math., 92, 1970, p. 489-527.

[40] C. L. SIEGEL – Gesammelte Abhandlungen, Springer-Verlag, 1966.

[41] C. L. SIEGEL – *Bernoullische Polynome und quadratische Zahlkörper*, Göttingen Nach., 2, 1968, p. 7-38; *Berechnung von Zetafunktionen an ganzzahligen Stellen*, ibid., 10, 1969, p. 87-102; *Über die Fourierschen Koeffizienten von Modulformen*, ibid., 3, 1970, p. 15-56.

[42] L. SOLOMON – *The orders of the finite Chevalley groups*, J. of Algebra, 3, 1966, p. 376-393.

[43] J. STALLINGS – *On torsion free groups with infinitely many ends*, Ann. of Math., 88, 1968, p. 312-334.

[44] R. SWAN – *Groups of cohomological dimension one*, J. of Algebra, 12, 1969, p. 585-601.

[45] J. TITS – *Groupes et géométries de Coxeter*. I.H.E.S., 1961 (notes polycopiées).

[46] E. B. VINBERG – *Groupes discrets engendrés par des réflexions de l'espace de Lobačevski* (en russe), Mat. Sbornik, 72, 1967, p. 471-488 [trad. anglaise: Math. USSR-Sbornik, 1, 1967, p. 429-444].

[47] C. T. C. WALL – *Rational Euler characteristics*, Proc. Cambridge Phil. Soc., 57, 1961, p. 182-183.

[48] C. T. C. WALL – *Finiteness conditions for CW-complexes*, Ann. of Math., 81, 1965, p. 56-69.

[49] C. T. C. WALL – *Finiteness conditions for CW-complexes* II, Proc. Royal Soc., A, 295, 1966, p. 129-139.

[50] A. WEIL – Adèles and algebraic groups (notes by M. DEMAZURE and T. ONO), Inst. Adv. Study, Princeton, 1961.

[51] J. H. C. WHITEHEAD – *Combinatorial homotopy* I, Bull. Amer. Math. Soc., 55, 1949, p. 213-245 [*Mathematical Works*, Pergamon Press, Vol. III, p. 85-117].