COHOMOLOGIE DES GROUPES DISCRETS

Jean-Pierre Serre

INTRODUCTION

Soit Γ un *sous-groupe discret* d'un groupe localement compact G. Lorsque G est un groupe de Lie réel connexe, de sous-groupe compact maximal K, l'espace $T = G/K$ est homéomorphe à un espace euclidien $\mathbf{R}^n$ et l'action de Γ sur T peut être utilisée pour l'étude de groupes de cohomologie $H^q(\Gamma)$ de Γ. Si par exemple Γ est sans torsion, il opère librement sur T, et les $H^q(\Gamma)$ s'identifient aux groupes de cohomologie correspondants de la variété $X_\Gamma = \Gamma\backslash T$; la *dimension cohomologique de* Γ est $\leq n$. Si de plus G/Γ est compact, la formule de Gauss-Bonnet, appliquée à X_Γ, permet d'exprimer la caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi(\Gamma)$ de Γ comme le volume $\mu_G(G/\Gamma)$ de G/Γ par rapport à une certaine mesure invariante μ_G sur G, indépendante de Γ; on peut appeler μ_G la *mesure d'Euler-Poincaré* de G.

Ce qui précède s'applique en particulier au *groupe des points entiers* d'un groupe algébrique L sur le corps $\mathbf{Q}$: on prend pour G le groupe $L(\mathbf{R})$ des points réels de L. Par contre, cela ne s'applique pas aux groupes plus généraux que sont les *groupes* S-*arithmétiques*, où l'on accepte des dénominateurs non triviaux. Ainsi, le groupe $\Gamma = \mathbf{SL}_2(\mathbf{Z}[\frac{1}{p}])$ n'est pas un sous-groupe discret de $\mathbf{SL}_2(\mathbf{R})$; c'est un sous-groupe discret du produit

$$G = \mathbf{SL}_2(\mathbf{R}) \times \mathbf{SL}_2(\mathbf{Q}_p),$$

où $\mathbf{Q}_p$ est le corps des nombres p-adiques. Le but de ce mémoire est d'étendre à de tels produits G les résultats bien connus rappelés au début. L'outil essentiel, dans le cas p-adique, est *l'immeuble de Bruhat-Tits* qui rend les mêmes services que l'espace G/K de la théorie réelle: comme lui, il est contractile, et le groupe G y opère proprement; lorsque $G = SL_2(Q_p)$, c'est simplement *l'arbre* défini dans [38], chap. II.

Il y a trois §. Voici leur contenu:

Le §1 est préliminaire; le groupe G n'y apparaît pas. Les n^{os}1.1 à 1.4 rappellent divers résultats et définitions standard sur la cohomologie d'un groupe discret Γ, sa dimension cohomologique (notée $cd(\Gamma)$), la propriété de finitude (FL) et la caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi(\Gamma)$; le lien avec la topologie est indiqué au n^o1.5. Lorsque Γ agit sur un CW-complexe contractile T, il existe certaines relations simples entre la cohomologie de Γ et celle des stabilisateurs Γ_σ des cellules σ de T; ces relations, qui m'ont été signalées par Quillen, jouent un rôle essentiel dans les §§2, 3; elles sont données au n^o1.6. Le n^o1.7 contient la démonstration, par voie topologique, de la formule $cd(\Gamma) = cd(\Gamma')$, valable lorsque Γ est sans torsion et Γ' d'indice fini dans Γ. Le n^o1.8 est consacré aux définitions "virtuelles": par exemple, un groupe Γ est dit de dimension cohomologique virtuelle $\leq$ n s'il contient un sous-groupe d'indice fini Γ' tel que $cd(\Gamma') \leq n$. L'utilité de telles notions provient de ce que les groupes arithmétiques les plus naturels, tels $SL_n(Z)$, ont de la torsion et sont donc de dimension cohomologique infinie; mais leur dimension cohomologique virtuelle est finie. Le §1 s'achève par le cas des *groupes de Coxeter*, et notamment la détermination de leur caractéristique d'Euler-Poincaré.

Le §2 contient surtout des majorations (et quelques calculs) de dimensions cohomologiques. Il s'agit de sous-groupes discrets Γ de groupes $G = \Pi\, G_\alpha$, où les G_α sont, soit des groupes de Lie réels à nombre fini de composantes connexes, soit des groupes semi-simples (ou réductifs) sur des corps locaux. Lorsque G_α est du second type, l'action de Γ sur l'immeuble de G_α permet de ramener l'étude de la cohomologie de Γ à celle de certains sous-groupes discrets du produit des autres G_β.

Par récurrence, on se trouve ainsi ramené au cas réel, qui est bien connu. Tout cela fait l'objet des n^{os}2.1 à 2.3. Le n^o2.4 applique ces résultats aux groupes S-arithmétiques (sur un corps de nombres ou sur un corps de fonctions sur un corps fini); on obtient en particulier le fait que tout sous-groupe sans torsion de type fini d'un $GL_n(Q)$ est de dimension cohomologique finie.

Le §3 démontre l'existence, sur un groupe G du type ci-dessus, d'une *mesure d'Euler-Poincaré* μ_G ayant la propriété indiquée au début: si Γ est un sous-groupe discret à quotient compact de G, on a $\chi(\Gamma) = \mu_G(G/\Gamma)$. Le cas réel se traite, on l'a vu, au moyen de la formule de Gauss-Bonnet (n^o3.2). Le cas p-adique utilise l'immeuble T: si μ est une mesure de Haar sur G, on pose

$$\chi(\mu) = \sum_{\sigma \in \Sigma} (-1)^{\dim(\sigma)} \frac{1}{\mu(G_\sigma)} ;$$

dans cette formule, Σ désigne un système de représentants des cellules de T modulo l'action de G, et G_σ désigne le stabilisateur de σ, qui est un sous-groupe ouvert compact de G. Le produit $\mu_G = \chi(\mu)\mu$ est indépendant du choix de μ et c'est la mesure d'Euler-Poincaré cherchée (n^o3.3). Lorsque G est semi-simple, μ_G est > 0 (resp. < 0) si le rang relatif de G est pair (resp. impair), cf. n^o 3.4. L'application de ces résultats aux groupes S-arithmétiques à quotient compact est faite au n^o 3.6. Le cas d'un quotient non compact, nettement plus délicat, vient d'être traité par Harder [19]; ses résultats sont rappelés aux n^{os}3.6 et 3.7. Le §3 se termine par une application des caractéristiques d'Euler-Poincaré à l'estimation des dénominateurs des valeurs des fonctions zêta aux entiers négatifs.

Les principaux résultats de ce travail ont été résumés dans une Note aux Comptes-Rendus [37].

§1. DIMENSION COHOMOLOGIQUE ET PROPRIÉTÉS DE FINITUDE

1.1. *Résolutions projectives et résolutions libres.*

Soit R un anneau et soit E un R-module (à gauche, pour fixer les idées). Une *résolution projective* (P_n) de E est une suite exacte de R-modules et de R-homomorphismes

$$\ldots \to P_n \to P_{n-1} \to \ldots \to P_1 \to P_0 \to E \to 0$$

telle que P_n soit *projectif* pour tout $n \geq 0$; il revient au même de dire que $P_\bullet = (P_n)$ est un *complexe acyclique, projectif,* muni d'un isomorphisme $H_0(P_\bullet) \to E$.

On dit que (P_n) est *de longueur* $\leq m$ si $P_n = 0$ pour $n > m$. Pour qu'il existe une telle résolution, il faut et il suffit que E soit de dimension projective $\leq m$, ou encore que $\mathrm{Ext}^q_R(E,F) = 0$ pour tout $q > m$ et tout R-module F ([13], p. 110, prop. 2.1); on peut même alors choisir pour P_n des modules *libres,* pourvu que m soit ≥ 1 (cela résulte de ce que, si P est projectif, il existe un module libre L tel que $P \oplus L \simeq L$, cf. Bourbaki, *Alg.* II, §2, exerc. 3).

Une résolution (P_n) est dite *de type fini* (resp. *libre*) si tous les modules P_n sont de type fini (resp. libres); on dit que (P_n) est *finie* si elle est à la fois de type fini et de longueur finie.

Le résultat suivant est bien connu:

PROPOSITION 1. *Soit* $0 \to E_q \to \ldots \to E_1 \to E_0 \to E \to 0$ *une suite exacte de* R-*modules. Pour tout* i *compris entre* 0 *et* q, *soit* $(P_{i,n})$ *une résolution projective de* E_i. *Il existe alors une résolution projective* (P_n) *de* E *telle que*

$$P_n \simeq \coprod_{i+j=n} P_{i,j}$$

pour tout $n \geq 0$.

Un raisonnement par récurrence permet de se ramener au cas $q = 1$. On a alors une suite exacte

$$0 \to E_1 \xrightarrow{f} E_0 \to E \to 0.$$

On "relève" le morphisme f en un morphisme de résolutions

$$(f_n) : (P_{1,n}) \to (P_{0,n}),$$

et l'on prend pour (P_n) le "mapping-cylinder" de (f_n), cf. par exemple [13], p. 73, exerc. 3. On a bien $P_n = P_{1,n-1} \oplus P_{0,n}$ pour tout $n \geq 0$, et (P_n) est une résolution projective de E.

COROLLAIRE. *Soit* m *un entier* ≥ 0. *Si chaque* E_i *a une résolution projective (resp. libre) finie de longueur* $\leq m-i$, *alors* E *a une résolution projective (resp. libre) finie de longueur* $\leq m$.

Supposons maintenant qu'il existe un homomorphisme $R \to k$ de l'anneau R dans un corps k. Si L est un R-module libre de type fini, isomorphe à A^d, on a $d = \dim_k(L \otimes_R k)$ ce qui montre que d ne dépend que de L; l'entier d s'appelle le *rang* du module L; nous le noterons rgL. Si

$$0 \to L_n \to \ldots \to L_0 \to E \to 0$$

est une résolution libre finie d'un module E, nous poserons

$$\chi_R(E) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \, \mathrm{rg}(L_i).$$

On a

$$\chi_R(E) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \dim_k \mathrm{Tor}_i^R(E,k),$$

ce qui montre que l'entier $\chi_R(E)$ ne dépend pas de la résolution libre finie (L_i) choisie; on l'appelle la *caractéristique d'Euler-Poincaré* de E.

PROPOSITION 2. *Soit* $0 \to E_q \to \dots \to E_1 \to E_0 \to E \to 0$ *une suite exacte de* R-*modules. Supposons que chaque* E_i *possède une résolution libre finie. Il en est alors de même de* E, *et l'on a*

$$\chi_R(E) = \sum_{i=0}^{q} (-1)^i \chi_R(E_i).$$

On applique la prop.1 en prenant pour $(P_{i,n})$ une résolution libre finie de E_i. D'où une résolution libre finie (P_n) de E, avec

$$P_n \simeq \coprod_{i+j=n} P_{i,j}$$

et

$$\chi_R(E) = \sum_{i,j} (-1)^{i+j} \operatorname{rg} P_{i,j} = \sum_i (-1)^i \chi_R(E_i).$$

REMARQUE. Soit K(R) le *groupe de Grothendieck* de la catégorie des R-modules projectifs de type fini; si P est un tel module, soit [P] son image dans K(R). L'homomorphisme $R \to k$ définit un homomorphisme $e : K(R) \to K(k) = \mathbf{Z}$ tel que $e([R]) = 1$.

Si E est un R-module possédant une résolution projective finie (P_i), soit [E] l'élément de K(R) défini par

$$[E] = \sum_i (-1)^i [P_i].$$

On sait que [E] ne dépend pas de la résolution choisie. Pour que E

admette une résolution *libre* finie, il faut et il suffit que [E] soit un multiple de [R], et l'on a alors

$$[E] = \chi_R(E)\cdot[R], \quad e([E]) = \chi_R(E),$$

ce qui donne une caractérisation de $\chi_R(E)$ au moyen de [E]. De ce point de vue, la prop. 2 ne fait qu'exprimer *l'additivité* de la fonction $E \mapsto [E]$.

1.2. *Dimension cohomologique.*

Soit Γ un groupe, et soit $R = \mathbf{Z}[\Gamma]$ son algèbre sur $\mathbf{Z}$. Un R-module est également appelé un Γ-*module*. L'anneau R admet un homomorphisme dans un corps (par exemple le composé $R \to \mathbf{Z} \to \mathbf{Q}$); on peut donc lui appliquer les définitions et résultats du n°1.1. En particulier, si E est un Γ-module admettant une résolution libre finie, la *caractéristique d'Euler-Poincaré* $\chi_R(E)$ est définie; on la note également $\chi_\Gamma(E)$.

Dans tout ce que suit, $\mathbf{Z}$ est muni de la structure de Γ-module *triviale*, i.e. telle que $\gamma.n = n$ pour tout $\gamma \in \Gamma$ et tout $n \in \mathbf{Z}$.

PROPOSITION 3. *Soit* n *un entier* ≥ 0. *Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(a) *Le* Γ-*module* $\mathbf{Z}$ *possède une résolution projective de longueur* $\leq n$.

(b) *Tout* Γ-*module qui est libre sur* $\mathbf{Z}$ *possède une résolution projective de longueur* $\leq n$.

(c) *Pour tout* Γ-*module* M, *et tout entier* $q > n$, *le groupe de cohomologie* $H^q(\Gamma, M)$ *est réduit à* 0.

L'équivalence de (a) et (c) résulte de [13], p. 110, prop. 2.1, compte tenu de ce que $H^q(\Gamma, M) = \mathrm{Ext}_R^q(\mathbf{Z}, M)$, avec $R = \mathbf{Z}[\Gamma]$. L'équivalence de (a) et (b) résulte du lemme suivant:

LEMME 1. *Soit* (P_n) *une résolution projective (resp. libre) du* Γ-*module* $\mathbf{Z}$, *et soit* M *un* Γ-*module libre sur* $\mathbf{Z}$. *Alors* $(P_n \otimes M)$ *est une résolution projective (resp. libre) de* M.

(Précisons que, si A et B sont deux Γ-modules, on munit $A \otimes B$ de la structure de Γ-module "produit", i.e. que l'on a $s(a \otimes b) = s(a) \otimes s(b)$ si $s \in \Gamma$, $a \in A$, $b \in B$.)

Comme M est libre sur $\mathbf{Z}$, la suite

$$\dots \to P_n \otimes M \to \dots \to P_0 \otimes M \to M \to 0$$

est exacte. Tout revient donc à voir que $P \otimes M$ est un Γ-module projectif (resp. libre) si P est projectif (resp. libre); par décomposition en somme directe, il suffit de considérer le cas où P est libre de rang 1, avec pour base $\{p\}$; dans ce cas, si M a pour $\mathbf{Z}$-base (m_i), on vérifie tout de suite que $(p \otimes m_i)$ est une $\mathbf{Z}[\Gamma]$-base de $P \otimes M$.

DÉFINITION. *On appelle dimension cohomologique du groupe* Γ *la borne inférieure des entiers* n *tels que les conditions de la prop. 3 soient satisfaites.*

On note $cd(\Gamma)$ la dimension cohomologique de Γ; on a $0 \leq cd(\Gamma) \leq \infty$, avec $cd(\Gamma) = \infty$ si et seulement si les conditions de la prop. 3 ne sont vérifiées pour *aucune* valeur de n.

On peut également caractériser $cd(\Gamma)$ comme la borne supérieure (finie ou infinie) des entiers q tels qu'il existe un Γ-module M avec $H^q(\Gamma, M) \neq 0$.

DÉFINITION. *On dit que* Γ *est de type* (FL) *si le* Γ*-module* $\mathbf{Z}$ *possède une résolution libre finie.*

Soit Γ un tel groupe. On a $cd(\Gamma) < \infty$. De plus, $\chi_\Gamma(\mathbf{Z})$ est définie; on l'appelle la *caractéristique d'Euler-Poincaré de* Γ, et on la note $\chi(\Gamma)$. On a, par définition,

$$\chi(\Gamma) = \sum_i (-1)^i \, rg_\Gamma L_i,$$

si (L_i) est une résolution libre finie du Γ-module $\mathbf{Z}$.

PROPOSITION 4. *Supposons* Γ *de type* (FL), *et soit* M *un* Γ*-module.*

(a) *Si* M *est limite inductive de* Γ*-modules* (M_i), *et si* q *est un entier* ≥ 0, *l'homomorphisme canonique de* $\varinjlim H^q(\Gamma, M_i)$ *dans* $H^q(\Gamma, M)$ *est un isomorphisme.*

(b) *Si* M *est de type fini sur* $\mathbf{Z}$, *il en est de même des* $H^q(\Gamma, M)$ *et l'on a*

$$\sum_q (-1)^q \, rg\, H^q(\Gamma, M) = \chi(\Gamma) . rg\, M.$$

(c) *Si* M *est* $\mathbf{Z}$*-libre de type fini,* M *possède une résolution* $\mathbf{Z}[\Gamma]$*-libre finie, et l'on a*

$$\chi_\Gamma(M) = \chi(\Gamma) . rg\, M.$$

Soit $L_\bullet = (L_n)$ une résolution $\mathbf{Z}[\Gamma]$-libre finie de $\mathbf{Z}$. Les groupes $H^q(\Gamma, M)$ sont les groupes de cohomologie du complexe $\mathrm{Hom}(L_\bullet, M)$, d'où aussitôt (a) et (b). De même, (c) résulte de ce que $L_\bullet \otimes M$ est une résolution libre finie de M, cf. lemme 1.

REMARQUES

1) Soit k un corps, et soit M un $k[\Gamma]$-module qui soit de dimension finie sur k. Le même argument que ci-dessus montre que les $H^q(\Gamma, M)$ sont des k-espaces vectoriels de dimension finie, et que l'on a

$$\sum_q (-1)^q \dim_k H^q(\Gamma, M) = \chi(\Gamma) . \dim_k M.$$

De plus M possède une résolution $k[\Gamma]$-libre finie, de caractéristique d'Euler-Poincaré égale à $\chi(\Gamma) . \dim_k M$.

2) On peut démontrer que le Γ-module $\mathbf{Z}$ possède une résolution libre finie *de longueur égale à* $cd(\Gamma)$.

QUESTION

Soit Γ un groupe tel que le Γ-module $\mathbf{Z}$ possède une résolution *projective* finie. Le groupe Γ est-il de type (FL)?

1.3. *Sous-groupes, extensions, amalgames.*

Sous-groupes

PROPOSITION 5. *Soit* Γ' *un sous-groupe du groupe* Γ.

(a) *On a* $cd(\Gamma') \leq cd(\Gamma)$.

(b) *Si* $cd(\Gamma) < \infty$ *et si* Γ' *est d'indice fini dans* Γ, *on a* $cd(\Gamma') = cd(\Gamma)$.

(c) *Si* Γ *est de type* (FL) *et si* Γ' *est d'indice fini dans* Γ, *alors* Γ' *est de type* (FL) *et l'on a* $\chi(\Gamma') = (\Gamma:\Gamma').\chi(\Gamma)$.

Comme $Z[\Gamma]$ est un $Z[\Gamma']$-module libre de rang $(\Gamma:\Gamma')$, toute résolution $Z[\Gamma]$-libre (L_n) de Z est aussi une résolution $Z[\Gamma']$-libre; d'où (a). Si en outre (L_n) est $Z[\Gamma]$-finie, et si $(\Gamma:\Gamma') < \infty$, on voit que (L_n) est $Z[\Gamma']$-finie, et l'on a

$$\chi(\Gamma') = \sum_n (-1)^n \, rg_{\Gamma'} L_n = \sum_n (-1)^n (\Gamma:\Gamma') \, rg_\Gamma L_n$$
$$= (\Gamma:\Gamma') \, \chi(\Gamma),$$

d'où (c).

Reste à prouver (b). Supposons donc que $(\Gamma:\Gamma')$ soit *fini*, et posons $n = cd(\Gamma)$. Par hypothèse, il existe un Γ-module M tel que $H^n(\Gamma, M) \neq 0$. Nous allons voir que $H^n(\Gamma', M)$ est $\neq 0$; cela montrera que $cd(\Gamma') \geq n$, d'où $cd(\Gamma') = n$ d'après (a).

La non-nullité de $H^n(\Gamma', M)$ résulte du lemme suivant:

LEMME 2 (Tate). *L'homomorphisme de corestriction*

$$\mathrm{Cor}: H^n(\Gamma', M) \to H^n(\Gamma, M)$$

est surjectif si $n = cd(\Gamma)$.

La démonstration est la même que dans le cas profini ([35], p. I-20, lemme 4). On identifie $H^n(\Gamma', M)$ à $H^n(\Gamma, M^*)$, où M^* désigne le *module*

induit de M, ensemble des fonctions $f: \Gamma \to M$ telles que $f(sx) = sf(x)$ si $s \in \Gamma'$, $x \in \Gamma$; on fait opérer Γ sur M^* par $(tf)(x) = f(xt)$. On définit un homomorphisme surjectif $\pi: M^* \to M$ par

$$\pi(f) = \sum_{x \in \Gamma/\Gamma'} x \, . \, f(x^{-1}),$$

cf. [35], p. I-13. Par passage à la cohomologie, π donne la corestriction

$$\mathrm{Cor}: H^q(\Gamma', M) = H^q(\Gamma, M^*) \to H^q(\Gamma, M).$$

Le fait que Cor soit surjectif en dimension n résulte alors simplement de ce que le foncteur $E \mapsto H^n(\Gamma, E)$ est exact à droite, vu la nullité de $H^{n+1}(\Gamma)$.

REMARQUE. Supposons que Γ' soit d'indice fini dans Γ. D'après (a) et (b), on a les deux possibilités suivantes:

(b_1) $cd(\Gamma') = cd(\Gamma)$;

(b_2) $cd(\Gamma') < \infty$ et $cd(\Gamma) = \infty$.

Nous verrons plus loin (n^o1.7, th. 1) que (b_2) ne peut se produire que *si* Γ *a de la torsion.*

Extensions

PROPOSITION 6. *Soit* Γ' *un sous-groupe distingué de* Γ.

(a) *On a* $cd(\Gamma) \leq cd(\Gamma') + cd(\Gamma/\Gamma')$.

(b) *Si* Γ' *et* Γ/Γ' *sont de type* (FL), *il en est de même de* Γ, *et l'on a*

$$\chi(\Gamma) = \chi(\Gamma').\chi(\Gamma/\Gamma').$$

Supposons Γ' de type (FL), et soit

$$0 \to L'_n \to \dots \to L'_0 \to Z \to 0$$

une résolution $Z[\Gamma']$-libre finie de Z. Par produit tensoriel avec $Z[\Gamma]$, on en déduit une résolution $Z[\Gamma]$-libre finie du Γ-module

$$Z[\Gamma] \otimes_{Z[\Gamma']} Z = Z[\Gamma/\Gamma'] :$$

$$0 \to L_n \to \dots \to L_0 \to \mathbf{Z}[\Gamma/\Gamma'] \to 0,$$

où $L_i = \mathbf{Z}[\Gamma] \otimes_{\mathbf{Z}[\Gamma']} L_i'$. On a donc $\chi_\Gamma(\mathbf{Z}[\Gamma/\Gamma']) = \chi(\Gamma')$.

Supposons maintenant Γ/Γ' de type (FL), et soit

$$0 \to L_m'' \to \dots \to L_0'' \to \mathbf{Z} \to 0$$

une résolution $\mathbf{Z}[\Gamma/\Gamma']$-libre finie de $\mathbf{Z}$. Vu ce qui précède, chaque L_i'' admet une résolution $\mathbf{Z}[\Gamma]$-libre finie; de plus, on a

$$\chi_\Gamma(L_i'') = \chi(\Gamma')\ \mathrm{rg}_{\Gamma/\Gamma'}(L_i'').$$

En appliquant les propositions 1 et 2, on en déduit que $\mathbf{Z}$ admet une résolution $\mathbf{Z}[\Gamma]$-libre finie, et que l'on a

$$\chi(\Gamma) = \chi_\Gamma(\mathbf{Z}) = \sum_i (-1)^i \chi_\Gamma(L_i'') = \chi(\Gamma').\chi(\Gamma/\Gamma'),$$

ce qui démontre (b).

L'assertion (a) se démontre de manière analogue (ou se déduit de la suite spectrale des extensions de groupes, cf. [13], p. 350).

Amalgames

Soient Γ_1 et Γ_2 deux groupes contenant comme sous-groupe un même groupe A, et soit $\Gamma = \Gamma_1 *_A \Gamma_2$ la somme de Γ_1 et Γ_2 *amalgamée* suivant A (cf. Bourbaki, *Alg.* I, n^{elle} éd., p. 83 ou [38], I, §1). Soit M un Γ-module. D'après un résultat de Lyndon [28] (voir aussi Swan [44], th. 2.3), on a une suite exacte "de Mayer-Vietoris":

$$\dots \to H^q(\Gamma,M) \xrightarrow{\alpha} H^q(\Gamma_1,M) \oplus H^q(\Gamma_2,M) \xrightarrow{\beta} H^q(A,M) \to H^{q+1}(\Gamma,M) \to \dots$$

où α = (Res, Res) et β = (Res, - Res). On en déduit:

PROPOSITION 7. *Soit* n *un entier. Si* $\mathrm{cd}(\Gamma_1) \le n$, $\mathrm{cd}(\Gamma_2) \le n$ *et* $\mathrm{cd}(A) \le n-1$, *on a* $\mathrm{cd}(\Gamma_1 *_A \Gamma_2) \le n$.

De plus:

PROPOSITION 8. *Si* A, Γ_1 *et* Γ_2 *sont de type* (FL), *il en est de même de* $\Gamma_1 *_A \Gamma_2$, *et l'on a*

$$\chi(\Gamma_1 *_A \Gamma_2) = \chi(\Gamma_1) + \chi(\Gamma_2) - \chi(A).$$

Si B est un sous-groupe de $\Gamma = \Gamma_1 *_A \Gamma_2$, notons $\mathbf{Z}[\Gamma/B]$ le groupe abélien libre de base l'ensemble Γ/B; on munit $\mathbf{Z}[\Gamma/B]$ de l'unique structure de Γ-module prolongeant l'action naturelle de Γ sur Γ/B. D'après Lyndon et Swan ([44], Lemme 2.1), on a une suite exacte

$$0 \to \mathbf{Z}[\Gamma/A] \to \mathbf{Z}[\Gamma/\Gamma_1] \oplus \mathbf{Z}[\Gamma/\Gamma_2] \to \mathbf{Z} \to 0.$$

(L'exactitude de cette suite exprime simplement le fait que *l'arbre* associé à l'amalgame Γ ([38], I-50) est acyclique.)

Par hypothèse, le A-module $\mathbf{Z}$ admet une résolution libre finie (L_n). Par produit tensoriel avec $\mathbf{Z}[\Gamma]$, on en déduit une résolution libre finie du Γ-module $\mathbf{Z}[\Gamma/A]$ et l'on voit en même temps que la caractéristique d'Euler-Poincaré de ce module est égale à $\chi(A)$. On a des résultats analogues pour $\mathbf{Z}[\Gamma/\Gamma_1]$ et $\mathbf{Z}[\Gamma/\Gamma_2]$. On conclut alors en appliquant les prop. 1 et 2.

1.4. *Exemples.*

a) *On a* $\mathrm{cd}(\Gamma) = 0$ *si et seulement si* $\Gamma = \{1\}$. En effet, si $\mathrm{cd}(\Gamma) = 0$, $\mathbf{Z}$ est Γ-projectif, et l'homomorphisme canonique $\mathbf{Z}[\Gamma] \xrightarrow{\alpha} \mathbf{Z}$ admet une section. Il existe donc un élément $u \in \mathbf{Z}[\Gamma]$, invariant par Γ, et tel que $\alpha(u) = 1$; il est immédiat que cela entraîne $\Gamma = \{1\}$.

Plus généralement, soit A un anneau commutatif $\neq 0$. Définissons $\mathrm{cd}_A(\Gamma)$ comme la dimension projective du $A[\Gamma]$-module A; c'est aussi la