Topology Vol. 3, pp. 413–420. Pergamon Press, 1965. Printed in Great Britain

SUR LA DIMENSION COHOMOLOGIQUE DES GROUPES PROFINIS

JEAN-PIERRE SERRE

(*Received* 12 *June* 1964)

§1. ENONCÉ DU THÉORÈME

SOIT p un nombre premier, et soit G un groupe profini (i.e. une limite projective de groupes finis, cf. [2], [4]). Nous noterons $cd_p(G)$ la *p-dimension cohomologique* de G au sens de Tate; rappelons (cf. [2], p. 189–07 ou [4], p. I–17) que c'est la borne supérieure, finie ou infinie, des entiers n tels qu'il existe un G-module discret fini A annulé par p avec $H^n(G, A) \neq 0$. Si U est un sous-groupe fermé de G, on a

$$cd_p(U) \leqq cd_p(G),$$

et Tate a montré qu'il y a égalité lorsque U est ouvert et que $cd_p(G) < \infty$ (cf. [2], p. 189–08 ou [4], p. I–20). Nous nous proposons de démontrer le théorème suivant, qui complète celui de Tate:

THÉORÈME. *Soit G un groupe profini sans élément d'ordre p, et soit U un sous-groupe ouvert de G. On a $cd_p(U) = cd_p(G)$.*

(L'hypothèse faite sur G est raisonnable; en effet, si G contient un élément d'ordre p, on a $cd_p(G) = \infty$.)

Le résultat suivant répond à une question posée par Lazard:

COROLLAIRE (1). *Soit G un groupe analytique p-adique compact, de dimension n, et sans élément d'ordre p. On a $cd_p(G) = n$.*

En effet, Lazard a montré que G contient un sous-groupe ouvert U qui est "p-valué complet de rang n" et que l'on a $cd_p(U) = n$ (cf. [3], III-3-2 et V-2-2).

COROLLAIRE (2). *Tout pro-p-groupe sans élément d'ordre p qui contient un sous-groupe ouvert libre est libre.*

Cela résulte de la caractérisation des pro-p-groupes libres au moyen de l'inégalité $cd_p \leqq 1$ (cf. [4], p. I–37).

Remarque. J'ignore si l'analogue "discret" du corollaire 2 est vrai: un groupe G sans torsion qui contient un sous-groupe d'indice fini libre est-il nécessairement libre?

§2. RELATIONS ENTRE CLASSES DE COHOMOLOGIE

Soit $S = \mathbf{F}_p[X_1, \ldots, X_n]$ l'algèbre des polynômes en n variables sur le corps à p éléments $\mathbf{F}_p$; soit θ l'endomorphisme de S qui applique X_i sur $X_i + X_i^p$ pour $1 \leqq i \leqq n$; soit k une clôture algébrique de $\mathbf{F}_p$.

Proposition (1). *Soit $\mathfrak{a}$ un idéal homogène de S, stable par θ, et soit $X(k)$ la sous-variété algébrique de k^n définie par $\mathfrak{a}$. Toutes les composantes irréductibles de $X(k)$ sont des sous-espaces vectoriels de k^n rationnels sur $\mathbf{F}_p$.*

(Rappelons qu'un sous-espace vectoriel de k^n est dit *rationnel sur* $\mathbf{F}_p$ s'il peut être défini par des équations linéaires à coefficients dans $\mathbf{F}_p$, cf. Bourbaki, *Alg.*, Chap. II, 3ème éd., §8.)

Soit F l'endomorphisme de Frobenius de k^n; il est défini par la formule:

$$Fx = (x_1^p, \ldots, x_n^p) \qquad \text{si } x = (x_1, \ldots, x_n).$$

Le m-ième itéré de F sera noté F^m.

Lemme (1). *Soit $x \in X(k)$, et soit $W(x)$ le sous-espace vectoriel de k^n engendré par les $F^m x$ pour $m \geqq 0$. On a $W(x) \subset X(k)$.*

Soit $W_r(x)$ le sous-espace vectoriel de k^n engendré par les $F^m x$ pour $0 \leqq m \leqq r$. On a $W(x) = \bigcup W_r(x)$. Montrons par récurrence sur r que $W_r(x) \subset X(k)$. C'est clair pour $r = 0$ puisque $x \in X(k)$ et que $X(k)$ est un *cône* ($\mathfrak{a}$ étant homogène). Supposons donc que l'on ait $W_{r-1}(x) \subset X(k)$ et montrons que $W_r(x) \subset X(k)$. Un élément de $W_r(x)$ s'écrit:

$$y = y_0 x + y_1 Fx + \ldots + y_r F^r x, \qquad \text{avec} \quad y_i \in k.$$

Vu le fait que $\mathfrak{a}$ est homogène et stable par θ, $X(k)$ contient tous les éléments de la forme $z_0(z + Fz)$, avec $z_0 \in k$ et $z \in X(k)$, et en particulier avec $z \in W_{r-1}(x)$. Si l'on écrit un tel élément z sous la forme:

$$z = z_1 x + z_2 Fx + \ldots + z_r F^{r-1} x,$$

on a:

$$Fz = z_1^p Fx + \ldots + z_r^p F^r x.$$

Pour que l'élément donné $y \in W_r(x)$ soit égal à $z_0(z + Fz)$, il suffit donc que $z_0, \ldots, z_r$ vérifient les $r + 1$ équations:

$$\begin{gathered} z_0 z_1 = y_0 \\ z_0(z_2 + z_1^p) = y_1 \\ \cdots \\ z_0(z_r + z_{r-1}^p) = y_{r-1} \\ z_0 z_r^p = y_r. \end{gathered}$$

On vérifie par un calcul élémentaire que ce système est résoluble lorsque y_0 et l'un des $y_1, \ldots, y_r$ sont non nuls. Comme l'ensemble des y correspondants est dense dans $W_r(x)$ (pour la topologie de Zariski), on en conclut bien que $W_r(x) \subset X(k)$, ce qui démontre le lemme.

La Proposition (1) est maintenant immédiate. En effet, le Lemme (1) montre que $X(k)$ est réunion de sous-espaces vectoriels W_α stables par F, donc rationnels sur $\mathbf{F}_p$. L'ensemble de ces sous-espaces étant fini, toute composante irréductible de $X(k)$ est égale à l'un d'eux, *cqfd.*

COROLLAIRE. *Soit* $\mathfrak{a}$ *un idéal vérifiant les hypothèses de la Proposition* (1). *Supposons* $\mathfrak{a} \neq 0$. *Alors* $\mathfrak{a}$ *contient un élément* u *de la forme*

$$u = \prod u_i$$

où les u_i *sont des éléments homogènes non nuls de degré* 1 *de* S.

Soit T l'ensemble des éléments homogènes non nuls de degré 1 de S. C'est un ensemble *fini*. Posons

$$v = \prod_{t \in T} t.$$

Le polynôme v *s'annule sur la variété* $X(k)$ *de l'idéal* $\mathfrak{a}$. En effet, d'après la Proposition (1), $X(k)$ est réunion finie de sous-espaces vectoriels W_α rationnels sur $\mathbf{F}_p$, et l'on a $W_\alpha \neq k^n$ pour tout α puisque $\mathfrak{a} \neq 0$. Chaque W_α est donc contenu dans au moins un hyperplan H_α rationnel sur $\mathbf{F}_p$, c'est-à-dire d'équation $t_\alpha = 0$, avec $t_\alpha \in T$; on voit bien que v s'annule sur $X(k)$. D'après le théorème des zéros de Hilbert, on en déduit qu'il existe une puissance u de v qui appartient à $\mathfrak{a}$, ce qui démontre le corollaire.

L'utilité de la Proposition (1) provient du résultat suivant:

PROPOSITION (2). *Soit* G *un groupe profini* (*resp. un espace topologique*), *et soient* $x_1, \dots, x_n$ *des éléments de* $H^2(G, \mathbf{F}_p)$; *si* $p = 2$ *supposons que* $Sq^1 x_i = 0$ *pour tout* i. *Soit* $\mathfrak{a} \subset S$ *l'idéal des relations entre les* x_i (considérés comme éléments de l'algèbre de cohomologie de G à coefficients dans $\mathbf{F}_p$). *L'idéal* $\mathfrak{a}$ *vérifie les hypothèses de la Proposition* (1).

Soit

$$H^*(G) = \sum_{q=0}^{\infty} H^q(G, \mathbf{F}_p)$$

l'algèbre de cohomologie de G. Supposons d'abord $p \neq 2$. Nous utiliserons les *puissances réduites* de Steenrod P^i $(i = 0, 1, \dots)$, cf. [6], Chapitre VI. Ces opérations sont définies sur $H^*(G)$: c'est là un fait bien connu lorsqu'il s'agit de groupes discrets, et le cas d'un groupe profini en résulte par passage à la limite. Soit T l'application de $H^*(G)$ dans lui-même définie par la formule:

$$T = \sum_{i=0}^{\infty} P^i.$$

Cette formule a un sens, car, pour tout $x \in H^*(G)$, on a $P^i x = 0$ pour i assez grand. De plus, la *formule de Cartan* montre que T est un *endomorphisme* de l'algèbre $H^*(G)$. Si $x \in H^2(G, \mathbf{F}_p)$, on a:

$$Tx = x + x^p, \qquad \text{cf. [6], Lemme (2.2), p.78.}$$

Si l'on note π l'homomorphisme de $S = \mathbf{F}_p[X_1, \dots, X_n]$ dans $H^*(G)$ qui applique X_i sur x_i, on a donc $\pi \circ \theta = T \circ \pi$. Le noyau $\mathfrak{a}$ de π est donc bien stable par θ; il est clair que c'est un idéal homogène de S.

Pour $p = 2$, on raisonne de la même façon, en posant:

$$T = \sum_{i=0}^{\infty} Sq^i.$$

Si $x \in H^2(G, \mathbf{F}_2)$ est tel que $Sq^1 x = 0$, on a $Tx = x + x^2$. Le reste du raisonnement s'applique sans changement.

§3. RELATIONS ENTRE CLASSES DE COHOMOLOGIE DE DEGRÉ 1 D'UN PRO-p-GROUPE.

Nous écrirons à partir de maintenant $H^q(G) = H^q(G, \mathbf{F}_p)$ et nous noterons β l'opération de Bockstein $H^*(G) \to H^*(G)$. On sait (cf. [6], p. 76) que c'est une antidérivation de degré $+1$ de l'algèbre $H^*(G)$. Si $p = 2$, on a $\beta = Sq^1$.

PROPOSITION (3). *Soit G un pro-p-groupe, et soit $(y_i)_{i \in I}$ une base de $H^1(G)$, l'ensemble d'indices I étant muni d'une structure d'ordre total. Les deux conditions suivantes sont alors équivalentes*:

(i) *G est isomorphe au groupe produit $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^I$.*

(ii) *Les éléments $y_i y_j$ $(i, j \in I, i < j)$ et $\beta(y_k)$ $(k \in I)$ sont des éléments linéairement indépendants de $H^2(G)$.*

Le fait que (i) $\Rightarrow$ (ii) résulte de la détermination classique de la cohomologie du groupe $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, et de la formule de Künneth. On a même un résultat plus précis: pour $p = 2$, $H^*(G)$ s'identifie à l'algèbre des polynômes en les y_i; pour $p \neq 2$, $H^*(G)$ s'identifie au produit tensoriel de l'algèbre extérieure engendrée par les y_i et de l'algèbre des polynômes engendrée par les $\beta(y_k)$.

Montrons que (ii) $\Rightarrow$ (i). Soit G^* le "sous-groupe de Frattini" de G, autrement dit l'adhérence de $(G, G)G^p$, ou encore l'intersection des noyaux des homomorphismes $y : G \to \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$. Le groupe G/G^* s'identifie au dual topologique de $H^1(G)$, c'est-à-dire au produit $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^I$. Si φ désigne la projection canonique de G sur G/G^*, l'homomorphisme $\varphi_1^* : H^1(G/G^*) \to H^1(G)$ est un isomorphisme, et *la condition* (ii) *équivaut à dire que* $\varphi_2^* : H^2(G/G^*) \to H^2(G)$ *est injectif.* L'implication (ii) $\Rightarrow$ (i) résulte donc du lemme suivant (comparer avec Stallings [5]):

LEMME (2). *Soit $\varphi : G \to G'$ un homomorphisme de pro-p-groupes.*
Si $\varphi_1^* : H^1(G') \to H^1(G)$ est bijectif, et si $\varphi_2^* : H^2(G') \to H^2(G)$ est injectif, φ est un isomorphisme.

Tout d'abord, le fait que φ_1^* soit injectif montre que φ est surjectif (cf. [4], Proposition (23), p. I–35). Si $R = \mathrm{Ker}(\varphi)$, la suite spectrale des extensions de groupes montre que $H^0(G', H^1(R)) = 0$. Or $H^1(R)$ est un G'-module discret, annulé par p; il est réunion de sous-G'-modules finis T_α. Puisque $H^0(G', H^1(R)) = 0$, on a $H^0(G', T_\alpha) = 0$, d'où $T_\alpha = 0$ (cf. [4], cor. à la Proposition (20), p. I–32) et $H^1(R) = 0$. Comme R est un pro-p-groupe, cela entraîne $R = \{1\}$, *cqfd.*

PROPOSITION (4). *Les notations étant celles de la Proposition* (3), *on suppose que le pro-p-groupe G ne vérifie pas les conditions* (i) *et* (ii). *Il existe alors une famille finie $(z_1, \ldots, z_m)$*

d'éléments non nuls de $H^1(G)$ telle que l'élément

$$u = \prod_{i=1}^{i=m} \beta(z_i)$$

de $H^{2m}(G)$ soit nul.

Puisque (ii) n'est pas vérifiée, il existe une relation non triviale de la forme:

$$(*) \qquad \sum_{i<j} a_{ij} y_i y_j + \sum_{k \in I} b_k \beta(y_k) = 0, \qquad \text{avec} \quad a_{ij},\ b_k \in \mathbf{F}_p.$$

Si tous les a_{ij} sont nuls, on peut prendre

$$m = 1, \qquad z_1 = \sum b_k y_k,$$

et l'on a bien $z_1 \neq 0$, $\beta(z_1) = 0$. Supposons donc que l'un au moins des a_{ij} ne soit pas nul; posons $x_k = \beta(y_k)$. Appliquons à $(*)$ l'opération $\beta P^1 \beta$ (pour $p = 2$, c'est l'opération $Sq^1 Sq^2 Sq^1$). Le calcul se fait sans difficultés, en utilisant les formules:

$$\beta(x_k) = 0, \qquad P^1(y_k) = 0, \qquad P^1(x_k) = x_k^p.$$

On trouve la relation:

$$(**) \qquad \sum_{i<j} a_{ij}(x_i^p x_j - x_i x_j^p) = 0.$$

Cette relation est non triviale; de plus, elle ne fait intervenir qu'un nombre fini des x_i; soit J la partie de I correspondante. L'idéal $\mathfrak{a}$ des relations entre les x_i $(i \in J)$ est non nul, puisqu'il contient le polynôme

$$\sum_{i<j} a_{ij}(X_i^p X_j - X_i X_j^p).$$

En lui appliquant la Proposition (2) et le corollaire à la Proposition (1), on en déduit qu'il existe une famille finie $(u_i)_{1 \leqq i \leqq m}$ de combinaisons linéaires non triviales des x_j telle que le polynôme $u = \prod u_i$ appartienne à $\mathfrak{a}$. Ecrivons chaque u_i sous la forme

$$u_i = \sum_{j \in J} c_{ij} x_j,$$

avec $c_{ij} \in \mathbf{F}_p$. Par hypothèse, pour tout i, il existe au moins un $j \in J$ tel que $c_{ij} \neq 0$. Si l'on pose

$$z_i = \sum_{j \in J} c_{ij} y_j$$

on a donc $z_i \neq 0$ pour $1 \leqq i \leqq m$, et $\beta(z_i) = u_i$, d'où $\prod \beta(z_i) = 0$ dans $H^{2m}(G)$, *cqfd.*

§4. UN RÉSULTAT DE PÉRIODICITÉ

PROPOSITION (5). *Soient G un groupe profini, z un élément non nul de $H^1(G)$, et U le noyau de z* (z étant considéré comme un homomorphisme de G sur $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$). *On suppose que $cd_p(U)$ est finie. Alors, si A est un G-module discret annulé par p, le cup-produit par $\beta(z)$ définit un isomorphisme de $H^q(G, A)$ sur $H^{q+2}(G, A)$ pour tout $q > cd_p(U)$ (resp. une surjection pour $q = cd_p(U)$).*

Soit $R = \mathbf{F}_p[\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}]$ l'algèbre du groupe $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ sur le corps $\mathbf{F}_p$. Si σ désigne le générateur canonique de $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, l'homothétie λ de rapport $1 - \sigma$ dans R a un noyau et un conoyau de dimension 1. On en déduit une suite exacte de R-modules:

$$(*) \qquad 0 \to \mathbf{F}_p \to R \to R \to \mathbf{F}_p \to 0.$$

L'homomorphisme $z : G \to \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ permet de considérer cette suite comme une *suite exacte de G-modules.* En tensorisant par A, on obtient la suite exacte:

$$(**) \qquad 0 \to A \to R \otimes A \to R \otimes A \to A \to 0.$$

Le G-module $R \otimes A$ est isomorphe au module *induit* $M_G^U(A)$, cf. [4], p. I–12, et l'on a donc des isomorphismes:

$$H^q(G, R \otimes A) \simeq H^q(U, A) \qquad (q \geqq 0).$$

D'autre part, $H^q(U, A) = 0$ pour $q > cd_p(U)$. On en déduit facilement que le double cobord

$$\delta\delta : H^q(G, A) \to H^{q+2}(G, A),$$

associé à la suite exacte (**), est bijectif pour $q > cd_p(U)$ et surjectif pour $q = cd_p(U)$. D'après les propriétés des cup-produits (cf. Cartan–Eilenberg [1], Chap. XI, §2 et Chap. XII, §4), on a:

$$\delta\delta\,(a) = \delta\delta\,(1).\,a \quad \text{pour tout} \quad a \in H^q\,(G,A),$$

où $\delta\delta(1) \in H^2(G)$ est défini par la suite exacte (*). Il ne nous reste plus qu'à montrer que $\delta\delta(1)$ est égal à $c\,.\,\beta(z)$, avec $c \neq 0$. Cela pourrait se faire par un calcul direct (qui fournirait également la valeur de c). On peut aussi remarquer que, par fonctorialité, il suffit de prouver l'existence de c lorsque $G = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, auquel cas il est évident que $\beta(z)$ et $\delta\delta(1)$ sont deux éléments non nuls de $H^2(G)$, et l'on sait que $\dim.H^2(G) = 1$.

COROLLAIRE. *Pour que $cd_p(G)$ soit finie, il faut et il suffit qu'une puissance de $\beta(z)$ soit nulle.*

En effet, si $cd_p(G) = n$, on a $\beta(z)^m = 0$ pour $2m > n$. Inversement, si $\beta(z)^m = 0$, la Proposition (5) montre que $H^q(G, A) = 0$ pour $q > cd_p(U) + 2m$, d'où

$$cd_p(G) \leqq cd_p(U) + 2m < \infty.$$

(Noter que, d'après le théorème de Tate cité au n°. 1, on a alors $cd_p(G) = cd_p(U)$.)

Remarque. La démonstration de la Proposition (5) donnée ci-dessus m'a été indiquée par Tate (qui s'était servi du résultat pour démontrer un cas particulier du théorème du n°. 1). On aurait pu également utiliser le fait que le cup-produit par $\beta(z)$ est un *endomorphisme de bidegré* (2, 0) de la suite spectrale associée à l'extension $G/U = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, et que cet endomorphisme est un *isomorphisme* en degrés assez grands (périodicité de la cohomologie de $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$).

§5. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME

LEMME (3). *Soit G un pro-p-groupe. Supposons que tous ses sous-groupes ouverts d'indice p soient de dimension cohomologique finie. Alors G est de dimension cohomologique finie ou est isomorphe à $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$.*

Notons d'abord que, si G est isomorphe à un produit $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^I$, l'hypothèse faite sur ses sous-groupes ouverts d'indice p n'est vérifiée que si $\mathrm{Card}(I) \leqq 1$. Ce cas trivial étant écarté, on peut appliquer la Proposition (4) au groupe G. Il existe donc une famille finie

$(z_1, \dots, z_m)$ d'éléments non nuls de $H^1(G)$ telle que l'élément

$$u = \prod_{i=1}^{i=m} \beta(z_i)$$

de $H^{2m}(G)$ soit nul. Chacun des z_i a pour noyau un sous-groupe ouvert U_i de G, qui est d'indice p dans G, donc de dimension cohomologique finie. En appliquant la Proposition (5), on voit que le cup-produit par $\beta(z_i)$ est un isomorphisme de $H^k(G)$ sur $H^{k+2}(G)$ pour k assez grand; le cup-produit par u est donc un isomorphisme de $H^k(G)$ sur $H^{k+2m}(G)$ pour k assez grand. Comme $u = 0$, cela signifie que $H^k(G) = 0$ pour k assez grand, ce qui entraîne que $cd_p(G) < \infty$ (cf. [4], Proposition (21), p. I–32).

LEMME (4). *Soit G un groupe profini, contenant un sous-groupe ouvert distingué U d'indice p, avec $cd_p(U) < \infty$. Soit Σ l'ensemble des sous-groupes fermes V de G tels que $cd_p(V) = \infty$. Si $\Sigma \neq \varnothing$, Σ contient un élément minimal.*

D'après le théorème de Zorn, il suffit de prouver que Σ est un ensemble *inductif* pour la relation d'inclusion décroissante. Soit donc $(V_\lambda)_{\lambda \in L}$ une famille totalement ordonnée d'éléments de Σ, et montrons que $V_0 = \bigcap V_\lambda$ appartient à Σ. Par hypothèse, il existe un élément non nul $z \in H^1(G)$ tel que $U = \mathrm{Ker}(z)$. Soit z_λ la restriction de z à V_λ, et soit $U_\lambda = U \bigcap V_\lambda$ le noyau de z_λ. Puisque $U_\lambda \bigcap U$, on a $cd_p(U_\lambda) < \infty$, d'où $U_\lambda \neq V_\lambda$, c'est à-dire $z_\lambda \neq 0$. En appliquant au couple (V_λ, z_λ) le corollaire à la Proposition (5), on en déduit que $\beta(z_\lambda)^m \neq 0$ pour tout $m \geqq 0$. Mais $V_0 = \bigcap V_\lambda = \varprojlim V_\lambda$, d'où $H^*(V_0) = \varinjlim H^*(V_\lambda)$, cf. [4], Proposition (8), p. I–9. Pour chaque $m \geqq 0$, le système des $\beta(z_\lambda)^m$ est un élément non nul de $\varinjlim H^{2m}(V_\lambda)$. On a donc $H^{2m}(V_0) \neq 0$, ce qui montre bien que $cd_p(V_0) = \infty$.

Fin de la démonstration du théorème

Soit (G, U) un couple vérifiant les hypothèses du théorème. Si P est un p-sous-groupe de Sylow de G, $P \cap U$ est un p-sous-groupe de Sylow de U, et l'on a:

$$cd_p(G) = cd_p(P), \qquad cd_p(U) = cd_p(P \cap U), \qquad \text{cf. [4], p. I–21.}$$

On est donc ramené à démontrer le théorème pour le couple $(P, P \cap U)$, autrement dit on peut supposer que *G est un pro-p-groupe*. Vu le théorème de Tate déjà cité, tout revient à montrer que l'on ne peut pas avoir à la fois $cd_p(U) < \infty$ et $cd_p(G) = \infty$. Supposons que ce soit le cas. D'après un résultat classique sur les p-groupes finis, on peut trouver une suite croissante de sous-groupes ouverts $U_0 \subset U_1 \subset \dots \subset U_k$ de G vérifiant les conditions:

$$U_0 = U, \qquad (U_i : U_{i-1}) = p, \qquad U_k = G.$$

De plus, U_{i-1} est un sous-groupe *distingué* de U_i.

Soit r le plus petit entier tel que $cd_p(U_r) = \infty$; on a $r \geqq 1$. En appliquant le Lemme (4, au couple (U_r, U_{r-1}), on voit qu'il existe un sous-groupe fermé V de U_r tel que $cd_p(V) = \infty$) et minimal pour cette propriété. En particulier, tout sous-groupe ouvert d'indice p de V est de p-dimension cohomologique finie. D'après le Lemme (3), V est donc isomorphe à $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, ce qui contredit l'hypothèse que G ne contient pas d'élément d'ordre p, *cqfd*.

BIBLIOGRAPHIE

1. H. Cartan et S. Eilenberg: Homological algebra. *Princeton Math. Ser., No. 19*, Princeton, 1956.
2. A. Douady: Cohomologie des groupes compacts totalement discontinus, *Séminaire Bourbaki*, 1959–60, exposé 189.
3. M. Lazard: Groupes analytiques p-adiques. *Publ. Inst. Hautes Études Sci., Paris* (1965), No. 26.
4. J-P. Serre: *Cohomologie galoisienne. Lecture Notes in Mathematics*, n° 5, Springer-Verlang, Berlin, 1964.
5. J. Stallings: *On the homological nature of the lower central series of a group.* Non publié.
6. N. Steenrod: Cohomology operations (written and revised by D. Epstein). *Annals Math. Stud., No. 50*, Princeton, 1962.

Paris.