Oberwolfach Reports vol.3 (2006), 1787-1790 juin 2006

Coordonnées de Kac

§ 1. Notations

Soit G un groupe algébrique quasi-simple, simplement connexe, sur un corps algébriquement clos k. On note $Z(G)$ le centre de G, et l'on pose $G^{ad} = G/Z(G)$. On choisit un sous-groupe de Borel B de G et un tore maximal T de B, d'où un système de racines R, muni d'une base $(\alpha_i)_{i\in I}$; les α_i appartiennent au groupe P des caractères de T, et forment une base de $P \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$.

La plus grande racine $\tilde{\alpha}$ de R s'écrit

$$\tilde{\alpha} = \sum n_i\alpha_i, \quad \text{avec} \quad n_i \in \mathbf{Z}, \quad n_i \geq 1. \tag{1}$$

On pose $\alpha_0 = -\tilde{\alpha}, n_0 = 1$ et $I_0 = I \cup \{0\}$, de sorte que (1) se récrit :

$$\sum_{i\in I_0} n_i\alpha_i = 0. \tag{2}$$

L'ensemble I (resp. I_0) est l'ensemble des sommets du graphe de Dynkin (resp. du graphe de Dynkin complété) de R, cf. [1], Chap. VI.

§ 2. Le cas de caractéristique 0

Supposons que k soit de caractéristique 0, et choisissons une paramétrisation des racines de l'unité de k, autrement dit un homomorphisme $\mathbf{e} : \mathbf{Q} \to K^*$ de noyau $\mathbf{Z}$. (Lorsque $K = \mathbf{C}$, un choix naturel est $\mathbf{e}(x) = e^{2\pi ix}$.)

Soit $x = (x_i)_{i\in I_0}$ une famille d'éléments de $\mathbf{Q}$ indexée par I_0. On associe à x l'élément t_x de $T(k)$ caractérisé par la propriété suivante : pour tout $\omega \in P$, on a

$$\omega(t_x) = \mathbf{e}(\sum_{i\in I} c_i(\omega)x_i), \tag{3}$$

où les $c_i(\omega)$ sont les coordonnées de ω par rapport à la base (α_i) de $P \otimes \mathbf{Q}$.

Les t_x sont des éléments d'ordre fini, et l'on a

$$\alpha_i(t_x) = \mathbf{e}(x_i) \quad \text{pour tout} \quad i \in I, \tag{4}$$

ce qui suffit à caractériser t_x lorsque $Z(G) = 1$.

Notons C l'ensemble des $x = (x_i)$ satisfaisant aux deux conditions suivantes :

$$x_i \geq 0 \quad \text{pour tout } i \in I_0, \tag{5}$$

$$(6) \qquad \sum n_i x_i = 1,$$

les n_i ($i \in I_0$) étant les entiers définis dans (2) ci-dessus.

Théorème 1 (Kac [3], [4], [5]). *Tout élément d'ordre fini de $G(k)$ est conjugué d'un t_x ($x \in C$), et d'un seul.*

L'ensemble C fournit ainsi une paramétrisation des classes de conjugaison de G d'ordre fini.

§ 3. Démonstration du théorème 1

Lorsque $k = \mathbf{C}$, le théorème 1 peut se traduire en termes de groupes de Lie compacts ; on constate qu'il devient alors un corollaire de la description (due à Elie Cartan, cf. [2]) des classes de conjugaison au moyen du *simplexe fondamental* de l'algèbre de Lie de T. Les $(n_i x_i)$ s'interprètent comme les coordonnées barycentriques de ce simplexe.

Le cas général se traite de façon analogue. Les ingrédients principaux sont :

– le fait que tout élément semi-simple de $G(k)$ est conjugué d'un élément de $T(k)$, et que ce dernier est bien déterminé modulo l'action du groupe de Weyl sur $T(k)$.

– la description d'un domaine fondamental du groupe de Weyl affine donnée dans [1], VI, §2 et dans [2].

§ 4. Quelques propriétés des coordonnées (x_i)

Les plus importantes sont les suivantes (on en trouvera d'autres dans Kac, *loc.cit.*) :

(i) Soit $x = (x_i)$ un élément de C, et soit m le plus petit commun dénominateur des x_i, de sorte que l'on a $x_i = s_i/m$, avec $s_i \in \mathbf{N}, m \geq 1$, pgcd $(s_i) = 1$ et :

$$(7) \qquad \sum_{i \in I_0} n_i s_i = m.$$

Alors m est l'ordre de l'image de t_x dans G^{ad} : c'est *l'ordre adjoint* de t_x. (D'habitude, ce sont les s_i qui sont appelées les "coordonnées de Kac" de la classe de conjugaison considérée.)

(ii) Soit $x \in C$, et soit G_x le centralisateur de t_x. Alors G_x est un sous-groupe connexe de G, réductif, contenant T, et dont le graphe de Dynkin a pour sommets les $i \in I_0$ tels que $x_i = 0$.

En particulier, t_x est régulier si et seulement si $x_i > 0$ pour tout i ; l'ordre adjoint d'un tel élément est au moins égal au nombre de Coxeter $h = \sum n_i$.

Ces propriétés sont très commodes pour énumérer les classes de conjugaison d'ordre fixé. Ainsi, si G est de type G_2, et si l'on s'intéresse aux classes d'ordre 5, les entiers (n_i) sont : (1, 2, 3) et l'équation (7) s'écrit

$$s_0 + 2s_1 + 3s_2 = 5 \ , \ \text{ avec } \ s_i \in \mathbf{N}, \ \ \mathrm{pgcd}(s_0, s_1, s_2) = 1 \ .$$

Il y a quatre solutions : (3, 1, 0), (2, 0, 1), (1, 2, 0), (0, 1, 1). Dans chaque cas le centralisateur est de dimension 4 : son rang semi-simple est égal à 1.

§ 5. Reformulation et extension à la caractéristique $p > 0$

La présentation donnée ci-dessus a deux inconvénients : elle dépend du choix de la paramétrisation $\mathbf{e} : \mathbf{Q} \to k^*$, et, si caract$(k) = p$, elle ne s'applique qu'aux éléments d'ordre premier à p.

On peut remédier à ces deux défauts en introduisant les "μ-éléments" de G. Alors qu'un élément d'ordre n peut être vu comme un plongement du schéma en groupes (étale) $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ dans G, un μ-élément d'ordre n est (par définition) un plongement $\mu_n \to G$, où μ_n est le schéma en groupes des racines n-ièmes de l'unité (autrement dit le groupe dual du groupe $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$).

Si l'on note $M_n(G)$ l'ensemble des μ-éléments d'ordre n de G, la réunion $M(G)$ des $M_n(G)$ est un substitut de l'ensemble des éléments d'ordre fini de G ; on a $M(G) = \mathrm{Hom}\ (\varprojlim \mu_n, G)$. On transpose alors sans difficulté ce qui a été fait au §2 : tout $x = (x_i)$ définit un μ-élément θ_x de $M(T)$, et le th. 1 est remplacé par :

Théorème 1′. *Tout μ-élément de G est conjugué d'un θ_x $(x \in C)$ et d'un seul.*

La démonstration est la même.

Exemple. Supposons que k soit de caractéristique $p > 0$. Un élément de $M_p(G)$ s'identifie à un élément non nul X de la p-algèbre de Lie de G tel que $X^p = X$. On obtient ainsi la classification de ces éléments : leurs classes de conjugaison sont décrites par les mêmes coordonnées de Kac que celles des éléments d'ordre p en caractéristique 0, et leurs centralisateurs sont donnés par la même recette.

Références

[1] N. Bourbaki, *Groupes et Algèbres de Lie*, chap. IV-V-VI, Hermann, Paris, 1968.

[2] E. Cartan, *La géométrie des groupes simples*, Annali di Mat. 4 (1927), 209-256 (= Oe.I.2, 793-840).

[3] V. Kac, *Automorphismes d'ordre fini des algèbres de Lie semi-simples* [en russe], Funkt.analys i ego prilozh. 3 (1969), 94-96 ; traduction anglaise : Funct.Anal.Appl. 3 (1969), 252-254.

[4] V. Kac, *Simple Lie groups and the Legendre symbol*, LN 848 (1981), 110-123.

[5] V. Kac, *Infinite dimensional Lie algebras*, Birkhäuser, 1986 ; 3-ième édition, Cambridge Univ. Press, 1990.