SÉMINAIRE N. BOURBAKI

JEAN-PIERRE SERRE

Classes des corps cyclotomiques

Séminaire N. Bourbaki, 1958-1960, exp. n° 174, p. 83-93

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1958-1960__5__83_0>

Séminaire BOURBAKI
(Décembre 1958)

CLASSES DES CORPS CYCLOTOMIQUES

par Jean-Pierre SERRE

(d'après K. IWASAWA [2], [3], [4], [5])

1. Enoncé des principaux résultats.

Soit p un nombre premier, qui restera fixé dans tout ce qui suit, et soit K_n le corps des racines p^{n+1}-ièmes de l'unité. C'est une extension abélienne de $\mathbb{Q}$; le groupe de Galois $G(K_n/\mathbb{Q})$ est isomorphe au groupe multiplicatif des éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}/p^{n+1}\mathbb{Z}$.

Soit h_n l'ordre du groupe des classes d'idéaux de K_n, et soit p^{e_n} la plus grande puissance de p divisant h_n.

THÉORÈME 1 (IWASAWA [2]). - *Si $e_1 = 0$ (i.e. si p est un nombre premier "régulier" au sens de Kummer), on a $e_n = 0$ pour tout n.*

Pour $p = 2$, on retrouve un résultat de Weber (cf. HASSE [1], paragraphe 34).

THÉORÈME 2 (IWASAWA [3]). - *Pour chaque nombre premier p, il existe des entiers m, ℓ, c avec $m \geqslant 0$ et $\ell \geqslant 0$ tels que :*

$$(*) \qquad e_n = mp^n + \ell n + c \quad \text{pour } n \text{ assez grand.}$$

Comme on le verra au n° 4, ces deux théorèmes se déduisent d'un théorème de structure pour un certain groupe à opérateurs. Ce groupe se construit ainsi : soit X_n la p-composante du groupe des classes d'idéaux de K_n ; c'est un p-groupe abélien fini, d'ordre p^{e_n}, sur lequel opère le groupe de Galois $G(K_n/\mathbb{Q})$ et en particulier son sous-groupe $\Gamma_n = G(K_n/K_0)$. En passant à la limite projective sur n au moyen des homomorphismes $X_{n+1} \to X_n$ définis par la norme, on obtient un p-groupe abélien compact totalement discontinu X, sur lequel opère le groupe $\Gamma = \varprojlim \Gamma_n$, groupe de Galois de L/K_0, où L est la réunion des K_n. Si $p \neq 2$, le groupe Γ_n est cyclique d'ordre p^n, et Γ est isomorphe au groupe additif $\mathbb{Z}_p$ des entiers p-adiques. Pour $p = 2$, il faut utiliser K_1 à la place de K_0.

Dans tout ce qui suit, on notera γ un générateur de Γ, et on posera $\omega_n = 1 - \gamma^{p^n}$. La connaissance du groupe à opérateurs X permet de récupérer

X_n , grâce à la formule :

$$(**) \qquad X_n = X/\omega_n X \ .$$

La structure de X sera déterminée grâce au théorème suivant :

THÉORÈME 3 (IWASAWA [3]). - Soit A la limite projective des algèbres sur $\mathbb{Z}_p$ des groupes Γ_n . Le groupe X est un A-module de type fini et de torsion.

De tels modules peuvent se décrire complètement ("modulo" les groupes finis), et c'est ainsi que l'on aboutit à la définition des entiers ℓ et m . On a $m = 0$ si et seulement si X est un $\mathbb{Z}_p$-module de type fini ; le rang de ce module est alors ℓ , et γ définit une matrice carrée d'ordre ℓ , à coefficients dans $\mathbb{Z}_p$. On ne sait presque rien sur les valeurs propres de cette matrice, et c'est dommage : sur les corps de fonctions, dans la situation analogue, ces valeurs propres sont certains zéros d'une fonction ζ .

Les démonstrations des trois théorèmes qui précèdent utilisent uniquement la théorie du corps de classes (pour interpréter X_n comme le groupe de Galois de la p-extension abélienne non ramifiée maximale de K_n). Dans [4], IWASAWA utilise la formule analytique donnant h_n pour donner un critère permettant d'affirmer que $m > 0$: il faut et il suffit que les nombres de Bernoulli vérifient certaines congruences en nombre infini. Le calcul explicite a été fait, paraît-il, pour les trois premiers nombres irréguliers, $p = 37$, 59 et 67. Dans les trois cas, on a trouvé $m = 0$. Comme dit IWASAWA, cela ne suffit pas pour faire une conjecture ...

Signalons que la limite inductive des X_n est isomorphe à la p-composante de $H^1(\Omega, \mathcal{F})$, où Ω est l'ensemble des valuations de L (muni d'une topologie convenable), et $\mathcal{F}$ le faisceau des unités. Pour plus de détails, voir [5].

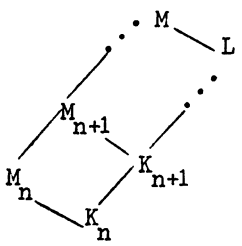
2. Groupes de décomposition et d'inertie.

Soit L/K une extension galoisienne, finie ou infinie, de groupe de Galois $G(L/K)$; soit v une valuation de K , et soit w un prolongement de v à K ; on sait que tout autre prolongement de v est transformé de w par une opération de $G(L/K)$. Soit A_w l'anneau de w , et soit $\overline{L}_w$ son corps des restes. Le groupe de décomposition $D_w(L/K)$ de w est l'ensemble des $\sigma \in G(L/K)$ tels que $\sigma(A_w) = A_w$; le groupe d'inertie $T_w(L/K)$ est l'ensemble des $\sigma \in D_w(L/K)$ qui opèrent trivialement sur $\overline{L}_w$. Ces groupes sont fermés dans $G(L/K)$, topologisé à la manière habituelle ; ils jouissent de propriétés fonctorielles simples

(passage au sous-groupe et au groupe quotient notamment). On dit que v est non ramifiée dans L si $T_w(L/K) = 0$, cette propriété ne dépendant pas de l'extension w choisie.

On appliquera ce qui précède à des corps de nombres algébriques (non nécessairement finis sur $\mathbb{Q}$). Les seules valuations de ces corps sont celles qui prolongent les valuations p-adiques de $\mathbb{Q}$. Si K est un corps de nombres, et L/K une extension galoisienne de K, on dit que L/K est non ramifiée si toutes les valuations de K sont non ramifiées dans L. La notion d'extension non ramifiée est de caractère fini. Plus précisément :

LEMME 1. - Soit L la réunion d'une suite croissante de corps K_n finis sur $\mathbb{Q}$ et soit M/L une extension finie, galoisienne, non ramifiée. Pour n assez grand, il existe alors une extension finie, galoisienne, non ramifiée M_n/K_n telle que $M = M_n \otimes_{K_n} L$.



On construit facilement des extensions galoisiennes M_n/K_n avec $M_n \otimes_{K_n} L = M$ (pour n assez grand). Tout revient à voir que $M_n \cdot K_{n+i}$ est extension non ramifiée de K_{n+i} pour i assez grand, ce qui est un simple exercice de limites projectives (il faut se servir du fait qu'il n'y a qu'un nombre fini de valuations de K_n qui se ramifient dans M_n). Pour plus de détails, voir [3], théorème 6.1.

3. Γ-extensions.

Soit Γ un groupe topologique isomorphe au groupe $\mathbb{Z}_p$ des entiers p-adiques ; comme au n° 1, nous désignons par γ un générateur de Γ.

Une extension algébrique L/K est dite une Γ-extension si elle est galoisienne et si son groupe de Galois est Γ. Il revient au même de dire que L est réunion d'une suite croissante de corps K_n, chaque K_n étant une extension cyclique de K de degré p^n ; les K_n correspondent par la théorie de Galois aux sous-groupes $H_n = p^n\Gamma$ de Γ, et l'on sait que ce sont les seuls sous-groupes fermés de Γ (avec 0).

LEMME 2. - Soit L/K une Γ-extension, et supposons K fini sur $\mathbb{Q}$. Il existe alors au moins une valuation de K qui se ramifie dans L, et une telle valuation induit sur $\mathbb{Q}$ la valuation p-adique.

D'après la théorie du corps de classes, toute extension abélienne non ramifiée de K est finie ; comme L/K est une extension infinie, il existe au moins une valuation v de K qui se ramifie dans L. Soit T le groupe d'inertie correspondant ; c'est un sous-groupe fermé $\neq 0$ de Γ, donc c'est un groupe isomorphe à $\mathbb{Z}_p$. D'après la théorie de la ramification supérieure, T est produit d'un groupe fini par un ℓ-groupe, où ℓ est la caractéristique de $\overline{K}_v$. On a donc nécessairement $\ell = p$, ce qui signifie bien que v induit sur $\mathbb{Q}$ la valuation p-adique.

EXEMPLE. - Le corps L défini au n° 1 est une Γ-extension de K_0 (on suppose $p \neq 2$) ; la seule valuation de K_0 qui soit ramifiée est l'unique valuation v prolongeant la valuation p-adique de $\mathbb{Q}$. Cette valuation est d'ailleurs totalement ramifiée, i.e. on a $T = \Gamma$.

4. Structure de la p-extension abélienne non ramifiée maximale d'une Γ-extension. Cas totalement ramifié.

Si K est un corps de nombres algébriques nous noterons $A_p(K)$ la p-extension abélienne non ramifiée maximale de K, c'est-à-dire la composée des extensions finies M/K, où M/K est une extension abélienne non ramifiée dont le groupe de Galois est un p-groupe.

Soit L/K une Γ-extension, avec K fini sur $\mathbb{Q}$, et soit $M = A_p(L)$. Nous

$$\begin{matrix} X \\ \\ \\ \Gamma \\ \\ \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} M \\ | \\ L \\ | \\ K \end{matrix} \right.$$

noterons X le groupe de Galois $G(M/L)$; c'est une limite projective de p-groupes abéliens finis. L'extension M/K est galoisienne résoluble ; le groupe $\Gamma = G(L/K)$ opère sur $X = G(M/L)$ par automorphismes intérieurs.

D'après le lemme 1, le corps M est réunion des corps $M_n = A_p(K_n)$; le groupe X est donc limite projective des groupes $X_n = G(M_n/K_n)$. D'après la théorie du corps de classes, X_n est isomorphe à la p-composante du groupe des classes d'idéaux du corps K_n ; nos notations sont donc cohérentes avec celles du n° 1. Le groupe X_n est un p-groupe abélien fini, sur lequel opère le groupe $\Gamma_n = G(K_n/K) = \Gamma/p^n\Gamma$; on peut donc munir canoniquement X_n d'une structure de module sur l'anneau $A_n = \mathbb{Z}_p[\Gamma_n]$, algèbre du groupe Γ_n à coefficients dans les entiers p-adiques. Par passage à la limite projective, on munit X d'une structure de module topologique sur l'anneau A limite projective des anneaux A_n ; on verra d'ailleurs au n° 6 que A est isomorphe à l'anneau de séries formelles $\mathbb{Z}_p[[T]]$, l'isomorphisme faisant correspondre au générateur γ de Γ la série formelle $1 - T$.

On se propose maintenant de reconstruire X_n à partir du A-module X (et de certains éléments privilégiés de X) :

Soient v_1 , ... , v_k les valuations de K qui se ramifient dans L (cf. lemme 2), et soient $T_i \subset \Gamma$ les groupes d'inertie correspondants. On a $T_i = p^{n_i}\Gamma$, avec $n_i \geqslant 0$. Nous supposerons dans ce numéro que $n_i = 0$ pour tout i , autrement dit que les valuations v_i sont <u>totalement ramifiées</u> ; le cas général se ramène facilement à celui-là, cf. n° 5.

Pour tout i , soit w_i un prolongement de v_i à M , et soit $S_i \subset G(M/K)$ le groupe d'inertie correspondant ; puisque M/L est non ramifié, on a $S_i \cap X = 0$; puisque v_i est totalement ramifié dans L , l'image de S_i dans Γ est Γ tout entier. Donc chacun des S_i est un <u>supplémentaire</u> de X dans $G(M/K)$, et $G(M/K)$ est produit semi-direct de S_i par X . Si $\sigma_i \in S_i$ se projette en γ , on peut écrire $\sigma_i = a_i \sigma_1$, avec $a_i \in X$.

THÉORÈME 4. - <u>Avec les hypothèses et notations précédentes, on a</u> $X_n = X/Y_n$, <u>où</u> Y_n <u>est le sous-Z_p-module de</u> X <u>défini de la façon suivante</u> :

i. Y_o <u>est engendré par les</u> a_i <u>et par</u> $(1 - \gamma)X$.

ii. $Y_n = \nu_n Y_o$, <u>avec</u> $\nu_n = 1 + \gamma + \gamma^2 + \ldots + \gamma^{p^n-1}$.

DÉMONSTRATION de (i). - Le corps M_o est évidemment la plus grande extension abélienne non ramifiée de $K_o = K$ contenue dans M . Son groupe de Galois X_o est donc égal à $G(M/K)/Z_o$, où Z_o est le plus petit sous-groupe de $G(M/K)$ contenant le sous-groupe des commutateurs $G(M/K)'$ ainsi que les S_i . La décomposition de $G(M/K)$ en produit semi-direct de S_1 par X montre que $G(M/K)' = (1 - \gamma)X$, d'où aussitôt le résultat.

DÉMONSTRATION de (ii). - Comme L est une Γ-extension de K_n , le résultat ci-dessus s'applique à X_n , à condition de remplacer γ par γ^{p^n} et les σ_i par les $\sigma_i^{p^n}$. Cela a pour effet de remplacer les a_i par les $\nu_n a_i$, car, pour tout entier k , on a :

$$(\sigma_i)^k = (a_i \sigma_1)^k = a_i \cdot \sigma_1 a_i \sigma_1^{-1} \cdot \sigma_1^2 a_i \sigma_1^{-2} \cdots \sigma_1^{k-1} a_i \sigma_1^{-k+1} \cdot \sigma_1^k$$

et en particulier, pour $k = p^n$, cela donne :

$$(\sigma_i)^{p^n} = a_i^{\nu_n} \cdot (\sigma_1)^{p^n} .$$

On a donc $Y_n = (1 - \gamma^{p^n})X + \nu_n H$, où H est engendré par les a_i. Comme $\nu_n(1-\gamma) = (1 - \gamma^{p^n})$, ceci s'écrit aussi $Y_n = \nu_n Y_o$, ce qui achève la démonstration.

EXEMPLE. - Lorsque $k = 1$, c'est-à-dire lorsqu'une seule valuation de K se ramifie dans L, on a $a_i = 0$, et le théorème 4 montre que $X_n = X/\omega_n X$; c'est la formule $(* *)$ du n° 1. Si en outre $X_o = 0$, on a $X = \omega_o X$, et comme ω_o est dans l'idéal maximal $\mathfrak{m}$ de Λ, ceci entraîne $X = 0$ (lemme de Nakayama, cf. n° 6), d'où $X_n = 0$ pour tout n, ce qui démontre le théorème 1.

THÉORÈME 5. - *Le Λ-module X est un module de torsion de type fini.*

On sait que X_n est un groupe fini ; le théorème 4 montre donc que $X/\omega_n X$ est un $\underset{\sim}{Z}_p$-module de type fini, et de rang $\leq k - 1$ (donc indépendant de n). Le théorème en résulte (cf. n° 6, lemmes 4 et 7).

Le résultat ci-dessus permet d'appliquer les théorèmes de structure du n° 6 ; si $\mathcal{C}$ désigne la catégorie des groupes finis, on en conclut que X est $\mathcal{C}$-isomorphe à la somme directe d'un $\underset{\sim}{Z}_p$-module libre de rang fini ℓ stable par γ, et de modules isomorphes à $\underset{\sim}{Z}/p^{m_i}\underset{\sim}{Z}[[T]]$. On pose $m = \sum m_i$.

THÉORÈME 6. - *Si p^{e_n} est l'ordre de X_n, on a $e_n = mp^n + \ell n + c$ pour n grand, c étant une constante.*

Si Y est un p-groupe abélien fini, nous noterons $p^{e(Y)}$ son ordre ; $e(Y)$ peut aussi être considéré comme la longueur du Λ-module Y. D'après le théorème 4, on a $e_n = e(X_n) = e(X/\nu_n Y_o) = e(X/Y_o) + e(Y_o/\nu_n Y_o)$. Comme $X/Y_o = X_o$ est fini, le Λ-module Y_o a les mêmes invariants ℓ et m que X, et en lui appliquant le théorème 8 du n° 6, on obtient le résultat cherché.

5. Structure de la p-extension abélienne non ramifiée maximale d'une Γ-extension. Cas général.

Revenons aux notations du début du n° 4, et soient $T_i = p^{n_i}\Gamma$ les groupes d'inertie des valuations de K qui se ramifient dans L. Choisissons un entier $n' \geq n_i$ pour tout i, et posons $K' = K_{n'}$. Le groupe de Galois Γ' de L/K' est isomorphe à $\underset{\sim}{Z}_p$, et l'on peut appliquer à cette extension les résultats du numéro précédent. Le groupe X est donc un Λ'-module de type fini et de torsion, et *a fortiori* un Λ-module de type fini et de torsion. Le théorème 5 est donc valable sans modification, et un raisonnement analogue s'applique au théorème 6.

6. Structure de l'anneau A et des A-modules.

Soit $\Lambda = \mathbb{Z}_p[[T]]$, et posons $\gamma = 1 - T$, $\gamma_n = \gamma^{p^n}$, $\omega_n = 1 - \gamma_n$. On a donc $\omega_0 = T$; l'idéal maximal $\mathfrak{m}$ de Λ est l'idéal (p, T). On voit facilement que le développement de ω_n est de la forme :

$$\omega_n = \pm T^{p^n} + \sum a_i T^i \text{, avec } i < p^n \text{ et } a_i \equiv 0 \bmod p .$$

Dans la terminologie des anneaux locaux, ω_n est un polynôme distingué (au signe près). Il s'ensuit que $\Lambda/\omega_n\Lambda$ s'identifie à $\mathbb{Z}_p[T]/(\omega_n)$, anneau qui n'est autre que l'algèbre sur $\mathbb{Z}_p$ du groupe cyclique $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$, c'est-à-dire A_n avec les notations du n° 4. On a donc défini pour chaque entier n un homomorphisme surjectif $\Lambda \to A_n$, d'où, par passage à la limite un homomorphisme canonique

$$\xi : \Lambda \to A = \varprojlim A_n .$$

LEMME 3. - L'homomorphisme ξ est un isomorphisme.

Le noyau de ξ est l'intersection des $\omega_n\Lambda$. Or, si l'on pose :

$$\nu'_n = 1 + \gamma_n + \gamma_n^2 + \dots + \gamma_n^{p-1} ,$$

on a évidemment $\nu'_n \equiv 0 \bmod \mathfrak{m}$, et $\omega_{n+1} = \nu'_n \omega_n$. Par récurrence on en conclut que $\omega_n \in \mathfrak{m}^n$, et $\bigcap \omega_n\Lambda \subset \bigcap \mathfrak{m}^n = 0$. Donc ξ est injectif ; comme Λ et A sont tous deux compacts, et que l'image de ξ est dense dans A, ξ est bien un isomorphisme.

A partir de maintenant on identifiera Λ et A au moyen de ξ. On observera que l'anneau A est un anneau local régulier complet de dimension 2.

Soit X une limite projective de p-groupes finis munis de structures de $\mathbb{Z}_p[\Gamma_n]$-modules compatibles entre elles (cf. n° 4) ; comme on l'a déjà remarqué, ceci permet de définir sur X une structure de A-module topologique, évidemment compact.

LEMME 4. - Pour que X soit un A-module de type fini il faut et il suffit que $X/\mathfrak{m}X$ soit un p-groupe fini.

La nécessité est évidente. Supposons donc que des éléments $a_i \in X$, $1 \leq i \leq k$, engendrent X modulo $\mathfrak{m}X$, et soit Z le sous-module qu'ils engendrent ; ce

sous-module est fermé, puisque c'est l'image continue de A^k, qui est compact. Dans $Y = X/Z$ on a $\mathfrak{m}Y = Y$; montrons que cette relation entraîne $Y = 0$, ce qui établira le lemme. Soit U un voisinage de 0 dans Y ; puisque Y est un A-module topologique, pour tout $y \in Y$ il existe un voisinage V_y de y et une puissance $\mathfrak{m}^{n_y}$ de $\mathfrak{m}$ tels que $\mathfrak{m}^{n_y} V_y \subset U$; par compacité on en déduit qu'il existe un n tel que $\mathfrak{m}^n Y \subset U$. Mais $\mathfrak{m}Y = Y$ entraîne $\mathfrak{m}^n Y = Y$; on a donc $Y \subset U$ pour tout U, d'où $Y = 0$ puisque Y est séparé.

REMARQUE. - Supposons que X soit de type fini. Alors sa topologie coïncide avec sa topologie $\mathfrak{m}$-adique ; en effet, l'une est plus fine que l'autre, et toutes deux sont des topologies d'espace compact.

Nous allons maintenant nous occuper uniquement de A-modules de type fini, et donner un théorème de structure pour ces modules.

De façon générale, soit A un anneau noethérien intègre et intégralement clos, et soit $\mathcal{C}$ la catégorie des A-modules de type fini dont l'annulateur n'est contenu dans aucun idéal premier de hauteur 1 de l'anneau A ; pour $A = Z_{(p)}[[T]]$ c'est la catégorie des A-modules qui sont des groupes finis.

On veut raisonner "modulo $\mathcal{C}$" ; on dira donc qu'un homomorphisme $f : M \to M'$ est un $\mathcal{C}$-isomorphisme si son noyau et son conoyau appartiennent à $\mathcal{C}$; définitions analogues pour $\mathcal{C}$-injectif et $\mathcal{C}$-bijectif.

D'autre part, on dira qu'un module M est réflexif s'il est égal à son bidual $M^{**} = \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(M , A) , A)$.

LEMME 5. - *Pour tout A-module X de type fini, il existe un $\mathcal{C}$-isomorphisme $f : X \to X'$ où X' est somme directe d'un module réflexif et de modules de la forme $A/\mathfrak{p}^n$, où $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de hauteur 1 de A. De plus X' est déterminé de manière unique par X.*

La démonstration est un simple exercice de localisation. Si T désigne le sous-module de torsion de X on commence par démontrer (en regardant la localisation de $\mathrm{Hom}(X , T)$) qu'il existe un $\mathcal{C}$-isomorphisme de X dans $T \times X/T$, ce qui nous ramène aux deux cas suivants :

i. X est sans torsion. - On prend alors $X' = X^{**}$ et pour f l'application canonique $X \to X^{**}$; en localisant en $\mathfrak{p}$ de hauteur 1, et en tenant compte de ce que $A_{\mathfrak{p}}$ est un anneau de valuation discrète on voit qu'on obtient un $\mathcal{C}$-isomorphisme.

ii. X est de torsion. - Chacun des $X_{\mathfrak{p}}$ est alors somme directe de modules de la forme $A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}^n A_{\mathfrak{p}}$, et $X_{\mathfrak{p}} = 0$ pour presque tout $\mathfrak{p}$. D'où facilement le résultat.

La structure des modules réflexifs n'est pas facile à élucider dans le cas général. Heureusement, l'anneau $\mathbb{Z}_p[[T]]$ est un anneau local régulier de dimension 2, et l'on peut appliquer le résultat suivant :

LEMME 6. - Si A est un anneau local régulier de dimension 2, tout A-module réflexif est libre.

Soit X un tel module ; on peut le plonger dans un module libre L de même rang, et dire que X est réflexif signifie que, dans la décomposition primaire de X dans L, les idéaux premiers qui interviennent sont de hauteur 1 (c'est essentiellement la "quasigleichheit" d'Artin, cf. par exemple [7], chapitre III, où est traité le cas des idéaux, celui des modules est identique). Avec les notations de [8], on a alors $\mathrm{codh}(L/X) \geqslant 1$, d'où $\mathrm{dh}(L/X) = \dim(A) - \mathrm{codh}(L/X) \leqslant 1$; comme L est libre, on a $\mathrm{dh}(X) = \mathrm{dh}(L/X) - 1$, d'où $\mathrm{dh}(X) \leqslant 0$, ce qui signifie que X est libre.

C. Q. F. D.

(L'analogue du lemme 6 pour les anneaux gradués redonne le théorème de Grothendieck sur les fibrés à fibre vectorielle de base la droite projective).

Les lemmes 5 et 6, appliqués à $A = \mathbb{Z}_p[[T]]$ donnent le théorème de structure d'IWASAWA ([3], théorème 1) ; on doit seulement observer que les idéaux premiers de hauteur 1 de A sont de deux types (cf. [6], p. 60) :

a. L'idéal pA engendré par p.

b. Un idéal engendré par un polynôme distingué irréductible :

$$F(T) = T^n + a_1 T^{n-1} + \ldots + a_n , \quad a_i \equiv 0 \bmod p .$$

Dans le cas (a), le quotient $A/\mathfrak{p}^n$ est simplement $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}[[T]]$. Dans le cas (b), c'est un $\mathbb{Z}_p$-module libre de type fini. On obtient donc finalement :

THÉORÈME 7. - Soit $\mathcal{C}$ la catégorie des A-modules de longueur finie. Tout A-module de type fini X est $\mathcal{C}$-isomorphe à une somme directe de modules qui sont, soit isomorphe à $\mathbb{Z}_p[[T]]$, soit isomorphe à $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}[[T]]$, soit des $\mathbb{Z}_p$-modules libres de type fini.

De plus ces modules types sont déterminés par X de manière unique, à l'ordre près.

LEMME 7. - Soit X un A-module de type fini. Supposons que $X/\omega_n X$ soit un Z_{mp}-module de type fini dont le rang reste borné quand $n \to +\infty$. Alors X est un module de torsion.

On voit tout de suite que l'hypothèse est invariante par C-isomorphisme. On peut donc supposer que X est somme directe des modules types énumérés dans le théorème 7, et tout revient à voir que le rang de $A/\omega_n A$ n'est pas borné. Or $A/\omega_n A$ est l'algèbre sur Z_{mp} du groupe Γ_n, et son rang sur Z_{mp} est p^n qui tend vers l'infini avec n.

C. Q. F. D.

Si X est un A-module de torsion de type fini, on définit ses invariants m et ℓ comme on l'a expliqué à la fin du n° 4.

THÉORÈME 8. - Soit X un A-module de type fini, et supposons que pour tout entier n, $X/\nu_n X$ soit un groupe fini, d'ordre p^{e_n}. Le module X est alors un module de torsion, et si m et ℓ sont ses invariants on a :

$$(*) \quad e_n = mp^n + \ell n + c \text{ pour } n \text{ grand, } c \text{ étant une constante.}$$

Ici encore, la question est invariante par C-isomorphisme, et l'on est ramené aux trois cas suivants :

i. $X = A$. - Dans ce cas $X/\nu_n X$ n'est pas un groupe fini, contrairement à l'hypothèse.

ii. $X = A/p^m A$. - On écrit la suite exacte :

$$X/\omega_0 X \xrightarrow{\nu_n} X/\omega_n X \longrightarrow X/\nu_n X \longrightarrow 0 ,$$

et comme $X/\omega_n X = Z/p^m Z[\Gamma_n]$, on a $e(X/\omega_n X) = mp^n$, d'où $e(X/\nu_n X) = mp^n - c$ pour n grand.

iii. X est un Z_{mp}-module libre de rang ℓ. - La structure de Γ-module de X est définie par l'automorphisme associé à γ, c'est-à-dire par une matrice carrée M, de degré ℓ, à coefficients dans Z_{mp} ; pour que cette opération définisse sur X une structure de A-module il est nécessaire et suffisant que M soit unipotente mod p, c'est-à-dire qu'une puissance de $(M - 1)$ soit $\equiv 0 \bmod p$. Pour n assez grand, on aura $\gamma_n \equiv 1 \bmod p$, d'où $\gamma_{n+1} \equiv 1 \bmod p^2$

Si l'on pose $\nu'_n = 1 + \gamma_n + \gamma_n^2 + \ldots + \gamma_n^{p-1}$, on en déduit $\nu'_n \equiv p \bmod p^2$,

c'est-à-dire $\nu'_n = p.u_n$, où u_n est inversible. Comme $\nu_n = \nu'_n \nu_{n-1}$, on a donc $\nu_n X = p\, \nu_{n-1} X$ pour $n \geq n_o$, d'où $\nu_n X = p^{n-n_o} \nu_{n_o} X$ si $n \geq n_o$. On en tire, en posant $Y = \nu_{n_o} X$:

$$e(X/\nu_n X) = e(X/Y) + e(Y/p^{n-n_o} Y) = c_1 + \ell(n - n_o) \quad ,$$

puisque Y a même rang sur $\mathbb{Z}_p$ que X , d'où le résultat cherché.

BIBLIOGRAPHIE

[1] HASSE (Helmut). - Über die Klassenzahl Abelscher Zahlkörper. - Berlin, Akademie Verlag, 1952.

[2] IWASAWA (Kenkichi). - A note on class numbers of algebraic number fields, Abh. math. Sem. Hamburg, t. 20, 1956, p. 257-258.

[3] IWASAWA (Kenkichi). - On Γ-extensions of algebraic number fields, Bull. Amer. math. Soc., t. 65, 1959 (à paraître).

[4] IWASAWA (Kenkichi). - On some invariants of cyclotomic fields, Amer. J. of Math., t. 80, 1958, p. 773-783.

[5] IWASAWA (Kenkichi). - Sheaves for algebraic number fields, Annals of Math., Series 2, t. 69, 1959, p. 408-413.

[6] SAMUEL (Pierre). - Algèbre locale. - Paris, Gauthier-Villars, 1953 (Mém. Sc. math., 123).

[7] SAMUEL (Pierre). - Commutative algebra (Notes by D. Hertzig). - Ithaca, Cornell University, 1953.

[8] SERRE (Jean-Pierre). - Sur la dimension homologique des anneaux et des modules noethériens, Proc. intern. Symp. on alg. number theory [1955. Tokyo et Nikko]. - Tokyo, Science Council of Japan, 1956 ; p. 175-189.