Topology Vol. 15, pp. 211–232. Pergamon Press, 1976. Printed in Great Britain

COHOMOLOGIE D'IMMEUBLES ET DE GROUPES S-ARITHMÉTIQUES

A. BOREL et J.-P. SERRE

(*Received* 10 *July* 1975)

INTRODUCTION

CE TRAVAIL se divise en deux parties, consacrées l'une (§§1 à 5) à la cohomologie de deux immeubles associés à un groupe réductif sur un corps local, et l'autre (§6) à la cohomologie des groupes S-arithmétiques, ou, plus généralement, de certains sous-groupes discrets de produits de groupes définis sur des corps locaux. Nous montrons que de tels groupes, lorsqu'ils sont sans torsion, ont une dualité homologique qui généralise celle des groupes arithmétiques[5: §11].

Soient k un corps local non archimédien, G un k-groupe réductif et X l'immeuble de Bruhat–Tits de G (§4). L'espace X est de dimension égale au k-rang $l = rg_k G$ de G. Notre principal objectif, dans la première partie, est d'en déterminer les groupes de cohomologie à supports compacts $H_c^i(X;\mathbf{Z})$: on trouve que $H_c^i(X;\mathbf{Z})$ est nul si $i \neq l$, et que c'est un groupe libre $\neq 0$ si $i = l$ (5.6, 5.9). Pour la démonstration, on se ramène tout de suite au cas où G est semi-simple et simplement connexe. On considère d'abord l'immeuble Y des k-sous-groupes paraboliques de G (§1). Il est simplicial, de dimension $l-1$, mais non localement fini (à moins que $l = 0$, auquel cas il est vide); on sait qu'il a le type d'homotopie d'un bouquet de sphères; cependant, ce n'est pas sa topologie usuelle qui nous intéresse ici, mais une autre topologie, provenant de celle de k, qui en fait un espace compact et métrisable Y_t (§1). Soient P un k-sous-groupe parabolique minimal de G, et U son radical unipotent; utilisant une filtration de Y_t déduite de la décomposition de Bruhat de $G(k)/P(k)$, nous montrons au §2 que le i-ième groupe de cohomologie[1] réduite $\tilde{H}^i(Y_t;\mathbf{Z})$ de Y_t est nul pour $i \neq l-1$, et que, pour $i = l-1$, ce groupe est isomorphe au groupe $C_c^\infty(U(k);\mathbf{Z})$ des fonctions localement constantes, à valeurs dans $\mathbf{Z}$, et à support compact, sur $U(k)$ (2.6). On montre ensuite (§5) que l'on peut compactifier X par Y_t de manière à obtenir un espace compact contractile Z_t. Le théorème 5.6 résulte alors de 2.6 par la suite exacte de cohomologie de Z_t mod Y_t.

Soient maintenant F un corps de nombres, S un ensemble fini de places de F contenant l'ensemble S^∞ des places archimédiennes de F, et $S' = S - S^\infty$. Si $v \in S$, on note F_v le complété de F en v. Soit G un F-groupe réductif. Notons $\bar{X}$ la variété à coins associée dans [5: §9] au $\mathbf{Q}$-groupe $R_{F/\mathbf{Q}}G$ obtenu à partir de G par restriction des scalaires de F à $\mathbf{Q}$. Si $v \in S'$, soit X_v l'immeuble de G sur F_v [17: 2.2], autrement dit le produit de l'immeuble de Bruhat–Tits du groupe dérivé $\mathscr{D}G$ de G par un espace euclidien de dimension égale à celle du plus grand F_v-tore déployé central de G. Soient enfin $\bar{X}_S = \bar{X} \times \Pi_{v \in S'} X_v$ et Γ un sous-groupe S-arithmétique de G. Alors Γ opère proprement sur $\bar{X}_S$ et $\bar{X}_S/\Gamma$ est compact (6.10). Soit $d = \dim X + \Sigma_{v \in S'} \dim X_v - rg_F G$. Il résulte de 5.9 et [5: §9] que $H_c^i(\bar{X}_S;\mathbf{Z})$ est nul pour $i \neq d$ et libre pour $i = d$. Si Γ est sans torsion, cela entraîne que Γ est un groupe à dualité au sens de [2], de module dualisant $I_S = H_c^d(\bar{X}_S;\mathbf{Z})$. On a en particulier un isomorphisme canonique

$$H^i(\Gamma; M) \xrightarrow{\sim} H_{d-i}(\Gamma; I_S \otimes M), \tag{1}$$

quels que soient $i \in \mathbf{Z}$ et le Γ-module M (6.2). On obtient également un résultat semblable pour les sous-groupes cocompacts sans torsion des produits finis $\Pi_v L_v(k_v)$, où k_v est un corps local et L_v un k_v-groupe réductif.

Les principaux résultats de ce travail ont été annoncés dans[4].

Notations et conventions. Si A est un groupe et B une partie de A, on note $\mathscr{Z}(B)$ ou $\mathscr{Z}_A(B)$ le

[1] Il s'agit ici de la cohomologie "d'Alexander–Spanier", i.e. de celle de la théorie des faisceaux, et non de la cohomologie singulière.

centralisateur de B dans A et $\mathcal{N}(B)$ ou $\mathcal{N}_A(B)$ le normalisateur de B dans A. On a donc

$$\mathcal{Z}_A(B) = \{a \in A \mid ab = ba (b \in B)\}, \qquad \mathcal{N}_A(B) = \{a \in A \mid a \cdot B = B \cdot a\};$$

le centre $\mathcal{Z}_A(A)$ de A est aussi noté $C(A)$. Si $\{B_i\}_{i \in I}$ est une famille de parties de A, on note $\langle (B_i)_{i \in I} \rangle$ le sous-groupe engendré par les B_i.

Si G est un groupe algébrique, G^0 désigne la composante connexe de e dans G, que l'on appelle aussi composante neutre de G, et $\mathcal{D}G$ le groupe dérivé de G. Si k est un corps de définition pour G et si G^0 est réductif, le k-rang $rg_k G$ de G est par définition celui de G^0, au sens de [6: §5].

Un *corps local* est, dans ce travail, $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ ou un corps complet pour une valuation discrète à corps résiduel fini; un tel corps est localement compact.

Dans les §§1 à 4, k est un corps local non archimédien, G un k-groupe connexe semi-simple, $\tilde{G}$ le revêtement universel de G et l le k-rang $rg_k\, G$ de G.

§1. L'immeuble topologisé des sous-groupes paraboliques

1.1. On note $\mathfrak{P}$ l'ensemble des k-sous-groupes paraboliques de G, T un tore k-dépolyé maximal de G, et Φ le système des k-racines de G par rapport à T. Le quotient $W = \mathcal{N}(T)/\mathcal{Z}(T)$ est le groupe de Weyl de Φ. On a $\Phi \neq \emptyset$ et $W \neq \{1\}$ si et seulement si $l \geqq 1$.

On note P un k-sous-groupe parabolique minimal contenant T, et Δ la base de Φ associée à P. Les racines de P par rapport à T sont donc les combinaisons linéaires à coefficients positifs d'éléments de Δ. Pour $I \subset \Delta$, soient $T_I = (\bigcap_{a \in I} \ker a)^0$ et P_I le k-sous-groupe parabolique engendré par P et $\mathcal{Z}(T_I)$. On sait que $I \mapsto P_I$ est une bijection entre l'ensemble des parties de Δ et celui des éléments de $\mathfrak{P}$ contenant P, que tout $Q \in \mathfrak{P}$ est conjugué à un et un seul P_I et que cette conjugaison peut être effectuée à l'aide d'un élément de $G(k)$ [6, §§4, 5].

On sait que $G(k)/P(k)$, muni de sa structure d'espace homogène du groupe topologique $G(k)$, est compact. Plus précisément, $G(k)/P(k)$ s'identifie à $(G/P)(k)$, donc à l'ensemble des k-points d'une k-variété projective lisse.

On note π_I la projection canonique de G/P sur G/P_I et $\pi_{I,J} (I \subset J)$ celle de G/P_I sur G/P_J.

1.2. L'immeuble Y

Si $l = 0$, on pose $Y = Y_t = \emptyset$. Supposons $l \geqslant 1$. Les sous-groupes $Q(k)$, $(Q \in \mathfrak{P})$ sont les sous-groupes paraboliques d'un système de Tits $\boldsymbol{T} = (G(k), B, N, S)$ de $G(k)$, dans lequel $B = P(k)$, $N = \mathcal{N}(T)(k)$ et $S \subset W$ est l'ensemble des réflexions associées aux éléments de Δ. Dans la suite on identifie Δ à S en associant à un élément $a \in \Delta$ la réflexion s_a qui, vue comme automorphisme de T, fixe $T_{\{a\}}$. On a $B \cap N = \mathcal{Z}(T)(k)$ et W s'identifie au groupe de Weyl de $\boldsymbol{T}$.

On note Y l'immeuble de Tits de $\boldsymbol{T}$. C'est un complexe simplicial de dimension $l-1$, sur lequel $G(k)$ opère. Le groupe d'isotropie G_σ d'une face σ de Y est le groupe $P_\sigma(k)$ des points rationnels d'un k-sous-groupe parabolique $\neq G$ et $\sigma \mapsto P_\sigma$ est une bijection entre l'ensemble des faces de Y et $\mathfrak{P} - \{G\}$. De plus, $P_\sigma(k)$ laisse fixe tout point de σ. Pour $g \in G(k)$, on a $P_{g(\sigma)} = g \cdot P_\sigma \cdot g^{-1}$. Soit C le simplexe fixe par $P(k)$. Pour $I \subset S$, $I \neq S$, on note C_I la face de C formée des points fixés par $P_I(k)$. Avec cette convention, les faces de codimension 1 de C sont les $C_{\{s\}} (s \in S)$, et $C_\emptyset = C$. On a:

$$C_I \subset \partial C_J \Leftrightarrow J \underset{\neq}{\subset} I \Leftrightarrow P_J \underset{\neq}{\subset} P_I. \tag{1}$$

Soit $\mathring{C}_I = C_I - \bigcup_{J \underset{\neq}{\supset} I} C_J$ l'intérieur de C_I. On a une partition

$$Y = \coprod_{I \underset{\neq}{\subset} S} Y_I, \quad \text{où} \quad Y_I = G(k)/P_I(k) \times \mathring{C}_I. \tag{2}$$

Soient

$$G(k) \times C \xrightarrow{\lambda} Y \xrightarrow{\tau} C \cong Y/G(k), \tag{3}$$

les applications définies respectivement par l'action de $G(k)$ sur Y et par la projection de Y_I sur son deuxième facteur ($I \underset{\neq}{\subset} S$). Comme $P(k)$ fixe C, λ se factorise en

$$G(k) \times C \xrightarrow{\pi \times Id.} (G(k)/P(k)) \times C \xrightarrow{\lambda'} Y, \tag{4}$$

où π est la projection canonique de $G(k)$ sur $G(k)/P(k)$.

1.3. Topologie sur Y. On munit $(G(k)/P(k)) \times C$ de la topologie produit et on note Y_t l'immeuble Y muni de la topologie quotient de $(G(k)/P(k)) \times C$ par la relation d'équivalence définie par λ'.

Comme C est un domaine fondamental pour $G(k)$, il résulte de 1.2(1) que la relation d'équivalence définie par λ' a un graphe fermé, donc Y_t est séparé. Il est compact puisque $(G(k)/P(k))\times C$ l'est. Montrons que $G(k)$ opère continûment sur Y_t. L'action de $G(k)$ sur Y est définie par une application $\nu\colon G(k)\times Y\to Y$ qui s'insère dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} G(k)\times(G(k)/P(k))\times C & \xrightarrow{Id.\times\lambda'} & G(k)\times Y \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \rho\times Id.} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \nu} \\ (G(k)/P(k))\times C & \xrightarrow{\lambda'} & Y \end{array} \tag{1}$$

où ρ est l'application canonique de $G(k)\times(G(k)/P(k))$ dans $G(k)/P(k)$. L'application λ' est propre. Il en est donc de même de $Id.\times\lambda'$ [8: I.73, prop. 4] et $G(k)\times Y$ a la topologie quotient de $G(k)\times(G(k)/P(k))\times C$ vu [8: I.74, cor. 4]. La continuité de ν résulte alors de celle des autres applications du diagramme (1). De fait que $P_I(k)$ opère trivialement sur C_I, on déduit immédiatement que la bijection naturelle $Y_I=(G(k)/P_I(k))\times \mathring{C}_I \xrightarrow{\sim} \tau^{-1}(\mathring{C}_I)$, est un homéomorphisme sur un sous-espace localement fermé.

Si $l=0$, on a $Y_t=\emptyset$; si $l=1$, C est un point, $Y=G(k)/P(k)$ et Y_t est simplement $G(k)/P(k)$ muni de sa topologie naturelle.

1.4. *Remarque.* L'espace Y_t peut aussi se définir lorsque k, au lieu d'être ultramétrique, est le corps $\mathbf{R}$ des nombres réels. Soit K un sous-groupe compact maximal de $G(\mathbf{R})$ dont l'algèbre de Lie est orthogonale à celle de $A=T(\mathbf{R})^0$. On a $Y=K\cdot C$ et l'on peut identifier le K-espace Y_t à la *sphère unité* de l'espace tangent à G/K à l'origine, et cela de telle sorte que C soit l'image des vecteurs tangents t à A de longueur 1 tels que $a(t)\geqq 0$ pour tout $a\in\Delta$.

§2. Cohomologie de Y_t

2.1. Soient X un espace localement compact et M un $\mathbf{Z}$-module. On désigne par $H^i(X;M)$ (resp. $H_c^i(X;M)$) le i-ième groupe de cohomologie d'Alexander–Spanier à supports fermés (resp. compacts) de X, à coefficients dans M. On a en particulier $H^0(X;M)=C^\infty(X;M)$ et $H_c^0(X;M)=C_c^\infty(X;M)$, où $C^\infty(X;M)$ (resp. $C_c^\infty(X;M)$) désigne le groupe des fonctions localement constantes (resp. localement constantes à support compact) sur X, à valeurs dans M.

Si X est compact non vide, $\tilde H^i(X;M)$ dénote le i-ième groupe de cohomologie *réduit* de X à coefficients dans M, i.e.

$$\tilde H^i(X;M)=H^i(X;M)\qquad\text{pour}\quad i\neq 0$$
$$\tilde H^0(X;M)=\operatorname{coker}\{M=H^0(\mathrm{pt};M)\to H^0(X;M)\}.$$

Le groupe $\tilde H^0(X;M)$ s'identifie au quotient de $C^\infty(X;M)$ par le sous-groupe formé des fonctions constantes.

Si X est compact et contractile, on a $\tilde H^i(X;M)=0$ pour tout $i\in\mathbf{Z}$.

Si Y est un sous-espace fermé non vide de X, la suite exacte de cohomologie à supports compacts de X mod Y peut s'écrire:

$$\cdots\to H_c^i(X-Y;M)\to\tilde H^i(X;M)\to\tilde H^i(Y;M)\to H_c^{i+1}(X-Y;M)\to\cdots \tag{1}$$

2.2. Lemme. *Soient X un espace localement compact, métrisable, totalement discontinu, et M un $\mathbf{Z}$-module. Alors $C_c^\infty(X;\mathbf{Z})$ est un $\mathbf{Z}$-module libre et $C_c^\infty(X;M)=C_c^\infty(X;\mathbf{Z})\otimes_{\mathbf{Z}}M$.*

On peut écrire X comme réunion disjointe d'ouverts compacts X_α $(\alpha\in J)$, d'où $C_c^\infty(X;M)=\bigoplus_{\alpha\in J}C^\infty(X_\alpha;M)$, ce qui nous ramène au cas où X est compact. L'espace X est alors limite projective dénombrable d'ensembles finis

$$X_1\xleftarrow{f_1}X_2\xleftarrow{f_2}X_3\longleftarrow\cdots\xleftarrow{f_{n-1}}X_n\xleftarrow{f_n}\cdots$$

où les applications f_i sont surjectives. On a donc $C^\infty(X;M)=\lim\cdot\operatorname{ind}\cdot M^{X_n}$ où M^{X_n} désigne l'ensemble des applications de X_n dans M. Evidemment, $M^{X_n}=\mathbf{Z}^{X_n}\otimes_{\mathbf{Z}}M$, d'où la deuxième assertion. Comme f_n est surjective, l'application canonique $M^{X_n}\to M^{X_{n+1}}$ a comme image un facteur direct; si l'on note S_n un supplémentaire, on a $C^\infty(X;M)=M^{X_1}\oplus\bigoplus_{n=1}^{\infty}S_n$, d'où la première assertion.

2.3. On reprend les hypothèses et notations du §1; on écarte le cas trivial $l = 0$. On désigne par $l(w)$ la longueur d'un élément $w \in W$ par rapport à S [9: IV, §1]. Soient $(w_i)_{1 \leq i \leq N}$ les éléments du groupe de Weyl W, numérotés de manière à ce que l'on ait

$$l(w_i) \leqq l(w_j) \quad \text{si} \quad i < j \quad (1 \leq i, j \leq N = |W|). \tag{1}$$

En particulier, $w_1 = 1$. Pour $m \in [1, N]$ entier, soit

$$I_m = \{s \in S \mid l(w_m \cdot s) > l(w_m)\}. \tag{2}$$

Il résulte de [9: IV, §1, Exer. 3, p. 37] que

$$I_1 = S, \quad I_N = \emptyset \quad \text{et} \quad I_m \neq \emptyset, S \text{ pour } 1 < m < N. \tag{3}$$

On a la décomposition de Bruhat

$$G(k) = \amalg_{w \in W} P(k) \cdot w \cdot P(k), \quad \text{cf. [6: §5]}, \tag{4}$$

d'où aussi

$$G(k)/P(k) = \amalg_{w \in W} C(w), \quad \text{avec} \quad C(w) = (P(k) \cdot w \cdot P(k))/P(k). \tag{5}$$

De plus, il existe un k-sous-groupe connexe U_w du radical unipotent U de P tel que $C(w)$ soit un espace homogène principal sous $U_w(k)$, donc homéomorphe à $k^{d(w)}$, où $d(w) = \dim U_w$. En particulier, si $w = w_N$, alors $U_w = U$, donc

$$C(w_N) \approx U(k) = (P/\mathscr{Z}(T))(k) \approx k^d, \quad (d = \dim U). \tag{6}$$

Si $1 \leqq m \leqq N$, posons

$$E_m = \cup_{1 \leqq i \leqq m} C(w_i), \qquad Y_m = \lambda'(E_m \times C) \subset Y_t.$$

D'après [7: 3.15], $C(w_m)$ est ouvert dans E_m et E_m est fermé dans $G(k)/P(k)$. Les Y_m forment donc une suite croissante de sous-espaces fermés de Y_t allant de $Y_1 = C$ à $Y_N = Y_t$.

On va utiliser cette filtration pour déterminer la cohomologie de Y_t.

2.4. Lemme. *Soient* $m \in \mathbf{N}$ $(1 < m \leq N)$ *et* $I \subset S$. *Alors*:

(i) *Si* $I \subset I_m$, *la projection* $\pi_I : G/P \to G/P_I$ *définit un homéomorphisme de* $C(w_m)$ *sur son image dans* G/P_I.

(ii) *Si* $I \not\subset I_m$, *alors* $\pi_I(E_m) = \pi_I(E_{m-1})$.

(iii) $Y_m - Y_{m-1}$ *est homéomorphe à* $C(w_m) \times L_m$ *où* $Lm = \cup_{I \subset I_m} \mathring{C}_I$.

Les assertions (i) et (ii) résultent de [7: 3.16]. La relation 1.2(2) et (ii) montrent que l'on a

$$Y_m - Y_{m-1} = \amalg_{I \subset I_m} \Pi_I(C(w_m)) \times \mathring{C}_I, \tag{1}$$

ce qui, vu (i), entraîne (iii).

2.5. Les appartements de Y sont les sous-ensembles de points fixes des conjugués de $\mathscr{Z}(T)(k)$. Un appartement est un sous-complexe fini, isomorphe au complexe de Coxeter $\boldsymbol{A}$ de W, et en particulier est homéomorphe à la sphère $\mathbf{S}^{l-1}$. L'espace Y est réunion de l'ensemble $\mathscr{A}_P$ des appartements contenant C. Si A_0 est l'appartement fixé par $\mathscr{Z}(T)(k)$, alors $g \mapsto g \cdot A_0$ induit une bijection de $P(k)/\mathscr{Z}(T)(k)$ sur $\mathscr{A}_P$, ce qui permet de munir $\mathscr{A}_P$ d'une structure de variété k-analytique.

La base S définit une chambre $\boldsymbol{C}$ de $\boldsymbol{A}$ et les chambres de $\boldsymbol{A}$ sont les transformés $w \cdot \boldsymbol{C}$ de $\boldsymbol{C}$ par W. Identifions S à $\{1, \ldots, l\}$. Cela fixe une orientation sur $\boldsymbol{C}$, donc aussi sur $\boldsymbol{A}$. On note $[\boldsymbol{A}]$ la classe d'homologie dans $H_{l-1}(\boldsymbol{A}; \mathbf{Z})$ du cycle $\Sigma(-1)^{l(w)} w \cdot \boldsymbol{C}$. Si $l \geqq 2$, c'est la classe fondamentale de la sphère orientée $\boldsymbol{A}$. Si $l = 1$, cette classe appartient au sous-groupe d'homologie réduit $\tilde{H}_0(\boldsymbol{A}; \mathbf{Z}) = \mathrm{Ker}\{H_0(\boldsymbol{A}; \mathbf{Z}) \to H_0(\boldsymbol{A}; \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}\}$. Si $A \in \mathscr{A}_P$, il existe un et un seul isomorphisme $\nu_A : \boldsymbol{A} \to A$ qui prolonge l'isomorphisme canonique de $\boldsymbol{C}$ sur C. On note $[A] \in H_{l-1}(A; \mathbf{Z})$ l'image de $[\boldsymbol{A}]$ par l'isomorphisme associé en homologie. Si $l \geqq 2$, c'est donc la classe fondamentale de A pour l'orientation qui, sur C, coincide avec l'orientation donnée par l'identification de S à $\{1, \ldots, l\}$. Si $l = 1$, on a $[A] \in \tilde{H}_0(A; \mathbf{Z})$.

Soit M un $\mathbf{Z}$-module. Etant donnés $h \in \tilde{H}^{l-1}(Y_t; M)$, et $A \in \mathscr{A}_P$, on note $\tilde{h}(A)$ la valeur sur $[A]$ de la restriction de h à $\tilde{H}^{l-1}(A; \mathbf{Z})$. Cela a un sens puisque, pour $l = 1$, la classe $[A]$ est dans le 0-ème groupe d'homologie réduit de A. A tout $h \in \tilde{H}^{l-1}(Y_t; M)$ est ainsi associée une application $\tilde{h} : \mathscr{A}_P \to M$.

2.6. THÉORÈME. (i) *On a* $H^i(Y_t; M) = 0$ *pour* $i \neq l-1$. (ii) *L'application* $h \mapsto \tilde{h}$ *de* 2.5 *définit un isomorphisme de* $\tilde{H}^{l-1}(Y_t; M)$ *sur* $C_c^\infty(\mathcal{A}_P; M)$. *Le* $\mathbf{Z}$-*module* $\tilde{H}^{l-1}(Y_t; \mathbf{Z})$ *est libre.*

Supposons le théorème démontré pour $M = \mathbf{Z}$. Alors $H^i(Y_t; M) = H^i(Y_t; \mathbf{Z}) \otimes M$ d'après la formule des coefficients universels; comme $C_c^\infty(\mathcal{A}_P; M) = C_c^\infty(\mathcal{A}_P; \mathbf{Z}) \otimes M$ vu 2.2, cela entraîne le théorème pour M quelconque. Il suffit donc de considérer le cas où $M = \mathbf{Z}$.

Pour $1 < m < N$, soit L'_m le complément de L_m dans C, i.e. la réunion des faces de codimension 1 $C_{\{s\}}(s \in S - I_m)$ de C. Comme $I_m \neq \emptyset$, S, le sous-espace L'_m est contractile, donc de cohomologie réduite nulle en toute dimension. La suite exacte de cohomologie de C mod L'_m montre alors que $H_c^*(L_m; \mathbf{Z}) = 0$; vu 2.4 (iii) et la formule de Künneth, il s'ensuit que $H_c^*(Y_m - Y_{m-1}; \mathbf{Z}) = 0$. L'espace Y_1 est égal à C, donc contractile; sa cohomologie réduite est nulle. En utilisant la suite exacte 2.1(1) pour $(X, Y) = (Y_m, Y_{m-1})$ on en tire tout d'abord, par récurrence sur m, que $H^*(Y_m; \mathbf{Z}) = 0$ si $m < N$ et ensuite que

$$\tilde{H}^*(Y_t; \mathbf{Z}) = H_c^*(Y_t - Y_{N-1}; \mathbf{Z}). \tag{1}$$

Mais on a, vu 2.3(6), 2.4(iii) et 2.5

$$Y_t - Y_{N-1} \cong \mathring{C} \times C(w_N) \cong \mathring{C} \times P(k)/\mathscr{X}(T)(k) \cong \mathring{C} \times \mathcal{A}_P. \tag{2}$$

L'espace $\mathring{C}$ est homéomorphe à $\mathbf{R}^{l-1}$, et orienté grâce à l'indexation de S; on a donc

$$H_c^i(\mathring{C}; \mathbf{Z}) = 0 \quad \text{si} \quad i \neq l-1 \quad \text{et} \quad H_c^{l-1}(\mathring{C}; \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}.$$

Appliquant la formule de Künneth, on obtient:

$$H_c^i(Y_t - Y_{N-1}; \mathbf{Z}) = H_c^{l-1}(\mathring{C}; \mathbf{Z}) \otimes H_c^{i-l+1}(\mathcal{A}_P; \mathbf{Z}) = \mathbf{Z} \otimes H_c^{i-l+1}(\mathcal{A}_P; \mathbf{Z}). \tag{3}$$

L'assertion (i) résulte alors de (1) et du fait que $\mathcal{A}_P$ est de dimension 0, donc de cohomologie nulle en dimensions $\neq 0$. De plus, pour $i = l-1$, (1) et (3) donnent un isomorphisme

$$\tilde{H}^{l-1}(Y_t; \mathbf{Z}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Z} \otimes H_c^0(\mathcal{A}_P; \mathbf{Z}) = C_c^\infty(\mathcal{A}_P; \mathbf{Z}). \tag{4}$$

Nous allons montrer que cet isomorphisme est défini par l'application $h \mapsto \tilde{h}$ de (2.5), au signe près. Soit $e \in H_c^{l-1}(\mathring{C}; \mathbf{Z})$ le générateur défini par l'orientation choisie en 2.5 multipliée par $(-1)^N$. Soit $f \in C_c^\infty(\mathcal{A}_P; \mathbf{Z})$. Vu (1) et (4), l'application $f \mapsto e \otimes f$ induit un isomorphisme de $C_c^\infty(\mathcal{A}_P; \mathbf{Z})$ sur $\tilde{H}^{l-1}(Y_t; \mathbf{Z})$. Il reste à voir que cet isomorphisme est l'inverse de l'application $h \mapsto \tilde{h}$ de 2.5, i.e. que l'on a

$$(e \otimes f)[A] = f(A) \text{ quel que soit } A \in \mathcal{A}_P. \tag{5}$$

On a $A \cap (Y - Y_{N-1}) = \mathring{C}_A$, où C_A désigne la chambre de A "opposée" à C, celle qui correspond à $w_N(C)$ par l'isomorphisme $\nu_A : A \to A$ de 2.5. D'autre part, la restriction de $e \otimes f$ à $\mathring{C} \times \{A\}$ est $f(A) \cdot e \in H_c^{l-1}(\mathring{C}; \mathbf{Z})$. Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
H_c^{l-1}(\mathring{C}; \mathbf{Z}) \arrow[r, "\alpha"] & H_c^{l-1}(\mathring{C}_A; \mathbf{Z}) \arrow[r, "\beta"] & H^{l-1}(A; \mathbf{Z}) \\
 & H_c^{l-1}(Y_t - Y_{N-1}; \mathbf{Z}) \arrow[u, "\gamma"] \arrow[r, "\beta'"] & H^{l-1}(Y_t; \mathbf{Z}) \arrow[u, "\gamma'"]
\end{tikzcd}$$

où β, β' sont définis par inclusion, γ, γ' par restriction, et α par l'isomorphisme transporté de $w_N : C \to w_N(C)$ par $\nu_A : A \to A$. Alors $\beta \circ \alpha$ applique e sur la classe duale de $[A]$, i.e. $\beta \circ \alpha(e)[A] = 1$. On a déjà vu que $\alpha^{-1} \circ \gamma$ envoie $e \otimes f$ sur $f(A) \cdot e$, d'où (5), ce qui achève de démontrer (ii).

Remarque. Si $l = 1$, on a $Y_t = G(k)/P(k)$, $\mathcal{A}_P = Y_t - \{P\}$ et $\tilde{H}^0(Y_t; \mathbf{Z})$ s'identifie au quotient de $C_c^\infty(Y_t; \mathbf{Z})$ par le sous-espace des fonctions constantes. Etant donné $h \in \tilde{H}^0(Y_t; \mathbf{Z})$, la fonction $\tilde{h}$ correspondante associe au point Q la différence $h(Q) - h(P)$. On a donc $\tilde{h} \in C_c^\infty(\mathcal{A}_P; \mathbf{Z})$. Le théorème est évident dans ce cas.

§3. Un complexe auxiliaire

Les hypothèses et notations sont celles du §2; on suppose $l \geq 1$. Nous nous proposons de décrire un complexe dont la cohomologie est celle de l'espace Y_t.

Les résultats de ce paragraphe ne seront pas utilisés par la suite (mis à part 5.10).

3.1. Le complexe $\tilde{L}(M)$

Soit M un $\mathbf{Z}$-module et soit (E_r) la suite spectrale de Leray de l'application $\tau: Y_t \to C = Y/G(k)$, cf. 1.2(3), relativement au faisceau constant M. Cette suite spectrale aboutit à $H^*(Y_t; M)$ et son terme E_2 est donné par $E_2^{p,q} = H^p(C; F^q)$, où F^q est le faisceau $R^q\tau M$ associé au préfaisceau $U \mapsto H^q(\tau^{-1}(U); M)$.

La fibre F_x^q de F^q en $x \in C$ est égale à $H^q(\tau^{-1}(x); M)$. Si $x \in \mathring{C}_I$, on a $\tau^{-1}(x) \simeq G(k)/P_I(k)$, d'où:

$$F_x^q = H^q(G(k)/P_I(k); M) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad q \neq 0 \\ C^\infty(G(k)/P_I(k); M) & \text{si} \quad q = 0. \end{cases}$$

Les faisceaux F^q sont nuls pour $q \neq 0$. Si l'on pose $F^0 = F$, on a donc

$$H^p(Y_t; M) = H^p(C; F). \tag{1}$$

De plus, le faisceau F est constant sur chaque face ouverte $\mathring{C}_I$, où $I \subset S = \{1, \dots, l\}$, $I \neq S$. On peut le considérer comme un "faisceau simplicial" sur le simplexe C: il associe à toute face C_I le groupe

$$F_I = C^\infty(G(k)/P_I(k); M), \tag{2}$$

et à toute inclusion $C_J \subset C_I$ $(J \supset I)$ l'homomorphisme

$$\pi^0_{I,J}: F_J \to F_I \tag{3}$$

défini par $f \mapsto f \circ \pi_{I,J}$, cf. 1.1.

On sait que la cohomologie d'un tel faisceau peut se calculer simplicialement (cela résulte, par exemple, de la suite spectrale associée à la filtration de C par ses squelettes). Vu (1), on en déduit que $H^*(Y_t; M)$ est la cohomologie d'un complexe $L(M) = \bigoplus L^m(M)$, où:

$$L^m(M) = \bigoplus F_I, \quad I \subset S, \quad I \neq S, \quad \operatorname{Card}(I) + m = l - 1, \tag{4}$$

le cobord df d'un élément $f \in F_I$ étant donné par

$$df = \sum_{1 \leq i \leq n} (-1)^i \pi^0_{I-j_i, I} f \in \bigoplus_{i=1}^{n} F_{I-j_i}, \tag{5}$$

où $I = \{j_1, \dots, j_n\}$, $j_1 < j_2 < \cdots < j_n$, et $I - j$ désigne $I - \{j\}$.

Le complexe $L(M)$ est nul en degrés <0. Il est commode de "l'augmenter", i.e. de définir un complexe $\tilde{L}(M)$ tel que

$$\begin{cases} \tilde{L}^q(M) = L^q(M) & \text{pour} \quad q \neq -1 \\ \tilde{L}^{-1}(M) = F_S = C^\infty(G(k)/P_S(k); M) = M, \end{cases} \tag{6}$$

l'opérateur d étant encore donné par la formule (5).

La cohomologie de $\tilde{L}(M)$ s'identifie à la cohomologie réduite $\tilde{H}^*(Y_t; M)$ de Y_t. Vu 2.6, on en déduit:

3.2. Théorème. *On a $H^q(\tilde{L}(M)) = 0$ pour $q \neq l - 1$, et $H^{l-1}(\tilde{L}(M))$ est canoniquement isomorphe à $\tilde{H}^{l-1}(Y_t; M)$.*

Pour la structure de $\tilde{H}^{l-1}(Y_t; M)$ et $H^{l-1}(\tilde{L}(M))$, voir 2.6, ainsi que 3.5 et 3.8 ci-après.

3.3. Corollaire. *On a une suite exacte de $G(k)$-modules*

$$0 \to F_S \to \bigoplus_i F_{S-i} \to \cdots \to \bigoplus_i F_{\{i\}} \to F_\emptyset \to \tilde{H}^{l-1}(Y_t; M) \to 0,$$

où $F_I = C^\infty(G(k)/P_I(k); M)$, le groupe $G(k)$ opérant sur F_I grâce à son action sur l'espace homogène $G(k)/P_I(k)$.

Cela résulte de 3.2 et du fait que l'isomorphisme $H^{l-1}(\tilde{L}(M)) \simeq \tilde{H}^{l-1}(Y_t; M)$ commute par construction à l'action de $G(k)$.

(Noter qu'on obtient ainsi une *résolution* du $G(k)$-module $\tilde{H}^{l-1}(Y_t; M)$ au moyen des F_I, cf. 5.10.)

3.4. Explicitation de $H^{l-1}(\tilde{L}(M))$. La composante de degré $l - 1$ du complexe $\tilde{L}(M)$ est

$F_\emptyset = C^\infty(G(k)/P(k); M)$; il en résulte (cf. 3.3) que $H^{l-1}(\tilde{L}(M))$ est le quotient de $F_\emptyset$ par la somme des images des $F_{\{i\}}$, $1 \leq i \leq l$.

L'espace $G(k)/P(k)$ est réunion disjointe des $C(w)$, 2.3 (5). En particulier, la "grosse cellule" $C(w_N)$ est ouverte dans $G(k)/P(k)$. Nous noterons R l'ensemble des fonctions $f \in F_\emptyset$ qui s'annulent sur les $C(w_j)$, $j < N$, i.e. dont le support est contenu dans $C(w_N)$; on a $R = C_c^\infty(C(w_N); M)$.

3.5. Proposition. *L'injection $R \to F_\emptyset$ définit par passage au quotient un isomorphisme de R sur $H^{l-1}(\tilde{L}(M)) = F_\emptyset/(\Sigma \operatorname{Im}(F_{\{i\}})$.*

D'après 2.6 (1), la cohomologie du sous-espace Y_{N-1} de Y_t est triviale, et l'on a $\tilde{H}^{l-1}(Y_t; M) \simeq H_c^{l-1}(Y_t - Y_{N-1}; M)$. Or la cohomologie à supports compacts de $Y_t - Y_{N-1}$ peut se calculer, comme celle de Y_t, au moyen de la suite spectrale de Leray de la projection $Y_t - Y_{N-1} \to C$; cette suite spectrale est ici particulièrement simple, vu que $Y_t - Y_{N-1} \simeq \mathring{C} \times C(w_N)$, cf. 2.6 (2). On en déduit un isomorphisme $H^{l-1}(Y_t - Y_{N-1}; M) \simeq H_c^{l-1}(\mathring{C}, R)$, et le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \tilde{H}^{l-1}(Y_t; M) & \xleftarrow{\sim} & H_c^{l-1}(Y_t - Y_{N-1}; M) \\ \wr\wr & & \wr\wr \\ \tilde{H}^{l-1}(C; F) & \xleftarrow{\sim} & H_c^{l-1}(\mathring{C}; R) \end{array}$$

est commutatif (car provenant d'un homomorphisme de suites spectrales).

On déduit de là que l'injection de R dans le faisceau F définit un isomorphisme de $H_c^{l-1}(\mathring{C}; R) = R$ sur $\tilde{H}^{l-1}(C; F) = H^{l-1}(\tilde{L}(M))$, d'où la proposition.

3.6. *Remarque.* On peut également démontrer 3.5 par le procédé suivant: on définit des sous-complexes L_j $(1 \leq j \leq N)$ de $\tilde{L}(M)$ par la condition qu'un élément f d'un F_I appartient à L_j si et seulement si f, considéré comme fonction sur $G(k)$ invariante à droite par $P_I(k)$, s'annule sur tous les $P(k)w_iP(k)$, pour $i < j$. On a $\tilde{L}(M) = L_1 \supset L_2 \supset \cdots \supset L_N$, et le complexe L_N est égal à 0 en toute dimension $\neq l-1$, et à R en dimension $l-1$. La structure des quotients successifs L_j/L_{j+1}, $1 \leq j < N$, se détermine facilement, grâce à 2.4; on trouve que la cohomologie de ces complexes est nulle en toute dimension. Il en résulte que l'injection de L_N dans $\tilde{L}(M)$ induit un isomorphisme de $H^*(L_N)$ sur $H^*(\tilde{L}(M))$, ce qui démontre à la fois 3.2 et 3.5.

3.7. Projection de $H^{l-1}(\tilde{L}(M))$ sur R. On a défini dans 3.5 un isomorphisme de $R = C_c^\infty(C(w_N); M)$ sur $H^{l-1}(\tilde{L}(M))$. Nous nous proposons d'expliciter l'isomorphisme réciproque.

Soit $f \in F_\emptyset = C^\infty(G(k)/P(k); M)$. Associons à f la fonction $\tilde{f}$ sur $G(k)$ définie par

$$\tilde{f}(x) = \sum_{w \in W} (-1)^{l(w)} f(x \cdot w), \qquad x \in G(k). \tag{1}$$

C'est une fonction localement constante sur $G(k)$, invariante à droite par $\mathscr{Z}(T)(k)$.

Lemme. *S'il existe $s \in S$ tel que f soit invariante à droite par $P_{\{s\}}(k)$, on a $\tilde{f} = 0$.*

Soit $W_s = \{w \in W \mid l(ws) > l(w)\}$. Alors W est réunion disjointe de W_s et $W_s \cdot s$ [9: IV, §1, Exer. 3, p. 37]. Comme

$$f(x \cdot w \cdot s) = f(x \cdot w) \quad \text{et} \quad l(w \cdot s) = l(w) + 1 \qquad (x \in G(k), w \in W_s),$$

les différents termes de la somme (1) se détruisent deux à deux, et l'on a bien $\tilde{f}(x) = 0$.

Le lemme ci-dessus montre que $\tilde{f} = 0$ si $f \in \Sigma \operatorname{Im}(F_{\{i\}})$. Par passage au quotient, l'application $f \mapsto \tilde{f}$ définit donc un homomorphisme θ de $H^{l-1}(\tilde{L}(M)) = F_\emptyset/(\Sigma \operatorname{Im}(F_{\{i\}}))$ dans le groupe $C^\infty(G(k)/\mathscr{Z}(T)(k); M)$; par restriction à $P(k)$, on en déduit un homomorphisme

$$\theta' : H^{l-1}(\tilde{L}(M)) \to C^\infty(P(k)/\mathscr{Z}(T)(k); M).$$

D'autre part, l'application $p \mapsto p \cdot w_N$ définit par passage au quotient un isomorphisme de $P(k)/\mathscr{Z}(T)(k)$ sur $C(w_N)$, d'où un isomorphisme

$$\iota : C^\infty(P(k)/\mathscr{Z}(T)(k); M) \to C^\infty(C(w_N); M).$$

3.8. Proposition. *L'homomorphisme*

$$(-1)^N \iota \circ \theta' : H^{l-1}(\tilde{L}(M)) \to C^\infty(C(w_N); M)$$

est un isomorphisme de $H^{l-1}(\tilde{L}(M))$ sur le sous-espace R de $C^\infty(C(w_N); M)$ formé des fonctions à support compact. Son inverse est l'isomorphisme $R \to H^{l-1}(\tilde{L}(M))$ de 3.5.

Vu 3.5, il suffit de montrer que le composé de $R \to H^{l-1}(\tilde{L}(M))$ et de $(-1)^N\iota \circ \theta'$ est l'application identique de R sur R. Or c'est immédiat: si $f \in R$ et $x \in P(k)$, on a $f(x \cdot w) = 0$ pour $w \neq w_N$, d'où $\bar{f}(x) = (-1)^N f(x \cdot w_N)$; si f' désigne l'image de f dans $H^{l-1}(\tilde{L}(M))$, cela signifie bien que $(-1)^N\iota \circ \theta'(f') = f$.

3.9. COROLLAIRE. *L'application*

$$\theta: H^{l-1}(\tilde{L}(M)) \to C^\infty(G(k)/\mathscr{Z}(T)(k); M)$$

est injective.

C'est immédiat.

Remarque. Il serait intéressant de déterminer explicitement l'image de θ.

3.10. *Remarque.* Les résultats de ce § ont un analogue dans le cas où le corps de base k, au lieu d'être ultramétrique, est le corps **R** des nombres réels, le module M étant pris égal à **R**.

Le complexe $\tilde{L} = \tilde{L}(\mathbf{R})$ est défini comme dans 3.1, en convenant que $C^\infty(G(k)/P_I(k); M)$ désigne l'espace des fonctions *continues*[2] réelles sur l'espace homogène $G(k)/P_I(k)$ (qui est ici une variété compacte). On trouve que la cohomologie de $\tilde{L}$ est la suivante:

(a) $H^q(\tilde{L}) = 0$ pour $q \neq l-1$, où $l = rg_k G$;

(b) $H^{l-1}(\tilde{L})$ s'identifie à l'espace des fonctions continues sur la grosse cellule $C(w_N)$ qui tendent vers 0 à l'infini (i.e. qui se prolongent en une fonction continue sur $G(k)/P(k)$ nulle sur les $C(w_i)$ pour $i < N$).

Cela se démontre par des arguments analogues à ceux du cas ultramétrique, utilisant la filtration de $G(k)/P(k)$ par les $C(w_i)$. De plus, 3.5 et 3.8 restent valables, à condition, ici encore, de remplacer les fonctions localement constantes à support compact par les fonctions continues tendant vers 0 à l'infini.

La cohomologie de $\tilde{L}$ peut aussi s'interpréter comme la cohomologie réduite de l'espace Y_t (1.4) à valeurs dans le faisceau des fonctions continues réelles dont les restrictions à chaque simplexe sont localement constantes; cela résulte, comme dans 3.1, de la suite spectrale associée à $\tau: Y_t \to C$.

§4. L'immeuble de Bruhat–Tits des sous-groupes parahoriques

4.1. Rappelons que G est semi-simple et que $\tilde{G}$ est le revêtement universel de G. Soit $\pi: \tilde{G} \to G$ l'isogénie centrale canonique. Si X est un k-groupe connexe réductif, notons $\mathfrak{P}(X)$ l'ensemble de ses k-sous-groupes paraboliques. On sait que $Q \mapsto \pi(Q)$ et $Q \mapsto \pi^{-1}(Q)$ sont des bijections réciproques de $\mathfrak{P}(\tilde{G})$ et $\mathfrak{P}(G)$ [7: §2]. D'autre part (*loc. cit.*) $\tilde{T} = \pi^{-1}(T)$ est un k-*tore* déployé maximal de $\tilde{G}$, π induit un isomorphisme de $\mathscr{N}(\tilde{T})/\mathscr{Z}(\tilde{T})$ sur $\mathscr{N}(T)/\mathscr{Z}(T)$ et $\Phi(\tilde{T}, \tilde{G})$ s'identifie à Φ. Posons $\tilde{P} = \pi^{-1}(P)$ et $\tilde{N} = \mathscr{N}(\tilde{T})(k)$. Alors $\tilde{\boldsymbol{T}} = (\tilde{G}(k), \tilde{P}(k), \tilde{N}, S)$ est un système de Tits, et l'immeuble correspondant s'identifie à l'immeuble Y de $\boldsymbol{T}$.

Le groupe $\tilde{G}$ s'écrit de manière essentiellement unique comme produit direct de k-groupes presque simples simplement connexes G_j de k-rang>0 $(1 \leqq j \leqq m)$ et d'un k-groupe simplement connexe G_0 de k-rang nul. Le groupe $\tilde{T}$ est le produit de ses intersections T_j avec les $G_j(1 \leqslant j \leqslant m)$ et $\tilde{P}$ (resp. $\mathscr{N}(\tilde{T})$) est le produit de G_0 et de ses intersections P_j (resp. N_j) avec les $G_j(1 \leqq j \leqq m)$. Le système de racines Φ est la somme directe des $\Phi(T_j, G_j)$, W le produit des $W_j = N_j/\mathscr{Z}_{G_j}(T_j)$ et S la réunion disjointe des $S_j = S \cap W_j(1 \leqq j \leqq m)$. Un simplexe σ de Y est une famille $\{\sigma_j\}(1 \leqq j \leqq m)$, où σ_j est, soit vide, soit un simplexe de l'immeuble Y_j des k-sous-groupes paraboliques de G_j, et au moins un σ_j est non vide. Il s'ensuit que Y est le joint des immeubles Y_j et que C est le joint des C_j, où C_j est l'ensemble des points fixes de $P_j(k)$ dans $Y_j(1 \leqslant j \leqslant m)$.

4.2. Dans ce qui suit, nous *admettrons* l'existence du système de Tits $\tilde{\boldsymbol{T}}' = (\tilde{G}(k), B, N', S')$ des sous-groupes "parahoriques" de $\tilde{G}(k)$; cette existence est annoncée dans [10] et démontrée dans [11: §10] pour les groupes classiques. On note X l'immeuble correspondant [11: §2]; c'est un complexe polysimplicial dont les sommets (resp. les faces) correspondent aux sous-groupes compacts maximaux (resp. aux sous-groupes parahoriques) de $\tilde{G}(k)$.

[2] A la place des fonctions continues, on pourrait prendre les fonctions analytiques (ou différentiables); nous ignorons quelle serait alors la cohomologie du complexe $\tilde{L}$ correspondant.

Les données B, N', S' sont supposées compatibles avec les choix déjà faits de $\tilde{T}$, $\tilde{P}$, Φ, S; en particulier, on a un *double système de Tits*, au sens de [11: §5] et $N' = \tilde{N} = \mathcal{N}(\tilde{T})(k)$; le groupe de Weyl W' de T' s'identifie au quotient de N' par le plus grand sous-groupe compact H de $\mathcal{Z}(\tilde{T})(k)$, et est donc extension de W par le sous-groupe $\mathcal{Z}(\tilde{T})(k)/H$, qui est commutatif libre de rang l. On a $B \cap N' = H$. Le groupe B est le sous-groupe parahorique minimal standard ("sous-groupe d'Iwahori"); c'est le produit direct de $G_0(k)$ et des $B_j = B \cap G_j$, $1 \leqslant j \leqslant m$. On a de même des décompositions

$$S' = \coprod_{j=1}^{j=m} S'_j, \qquad W' = \prod_{j=1}^{j=m} W'_j, \qquad X = \prod_{j=1}^{j=m} X_j,$$

où X_j est l'immeuble associé au système de Tits $\mathbf{T}_j = (G_j(k), B_j, N_j, S'_j)$, et W'_j le groupe de Weyl de $\mathbf{T}_j (1 \leqq j \leqq m)$. Les sous-groupes parahoriques de $\tilde{G}(k)$ sont les produits $G_0(k) \times \prod_1{}^m M_j$, où M_j parcourt les sous-groupes parahoriques de $G_j(k)$. En particulier, les sous-groupes parahoriques standard sont les sous-groupes $B_I = B \cdot W'_I \cdot B$ où I parcourt l'ensemble des parties de S' *qui ne contiennent aucun des* S'_j, et W'_I est le sous-groupe de W' engendré par I. Soit C'_j l'ensemble des points fixes de B_j dans $X_j (1 \leqq j \leqq m)$. C'est un simplexe de dimension égale au k-rang l_j de G_j, et l'ensemble C' des points fixes de B dans X est un polysimplexe de dimension l, le produit des C'_j.

On note A l'appartement standard de X; son fixateur est H. On suppose (ce qui est loisible, quitte à modifier le choix de B) qu'il existe un *point spécial* [11: 1.3.7, p. 22] $o = (o_1, \ldots, o_m)$, $o_j \in X_j$, de X ayant les propriétés suivantes (qui le caractérisent):

(a) o est un sommet de C';

(b) le quartier [11: 1.3.11, p. 23] de A de sommet o contenant l'intérieur de C' définit le germe de quartier correspondant à $\tilde{P}(k)$ [11: 5.1.33, p. 96].

On note s'_j l'élément de S'_j correspondant à la réflexion par rapport à la face de C'_j opposée à o_j. L'ensemble $S'_j - \{s'_j\}$ s'identifie à S_j, par la projection $W'_j \to W_j$. L'ensemble S' est réunion disjointe de S et de $\{s'_1, \ldots, s'_m\}$. Le fixateur de o_j dans $G_j(k)$ est $B_{S_j} = B \cdot W'_{S_j} \cdot B$. Le fixateur de o dans $\tilde{G}(k)$ est

$$B_S = B \cdot W \cdot B = G_0(k) \times \prod_{j=1}^{j=m} B_{S_j},$$

qui est un sous-groupe compact maximal spécial de $\tilde{G}(k)$ [11: 3.3.5, p. 66]; on écrira souvent $\tilde{K}$ pour B_S. On a

$$\tilde{G}(k) = \tilde{K} \cdot \tilde{P}(k) \quad \text{et} \quad G_j(k) = B_{S_j} \cdot P_j(k) \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant j \leqslant m. \tag{1}$$

Pour toute partie I de S' ne contenant aucun S'_j, on note C'_I l'ensemble des points fixes de B_I dans X; on obtient ainsi, une fois et une seule, chaque face du polysimplexe C'.

4.3. Appartements. Les appartements de X sont les transformés de l'appartement standard A par $\tilde{G}(k)$. Etant donnés deux appartements A' et A'', il existe un élément de $\tilde{G}(k)$ qui transforme A' en A'' et induit l'identité sur $A' \cap A''$ [11: 2.5.8, p. 45]. Par suite, deux parties E, E' de A' transformées l'une de l'autre par un élément $g \in \tilde{G}(k)$ le sont aussi par un élément qui stabilise A' et coincide avec g sur E. Deux faces quelconques de X sont contenues dans un appartement [11: 2.3.1, p. 37] donc X est réunion des appartements contenant C', et ces derniers sont les transformés de A par B. Le groupe $N' = \mathcal{N}(\tilde{T})(k)$ stabilise A. Comme H opère trivialement sur A, on obtient ainsi une représentation de W' comme groupe d'automorphismes de A. L'application structurale j de [11: 2.2, p. 35] permet de munir A d'une structure d'espace vectoriel de dimension l, d'origine o, telle que Φ s'identifie à un système de racines dans le dual de A, de groupe de Weyl W, de manière à ce que la réflexion $s_a (a \in \Phi)$ soit la réflexion par rapport à l'hyperplan $a = 0$, et que W' soit un groupe de Weyl affine de partie linéaire W (cf. 4.5).

Montrons encore que N' est le normalisateur de H dans $\tilde{G}(k)$ ainsi que le stabilisateur de A dans $\tilde{G}(k)$, et que A est le seul appartement de X fixé par H. Le groupe H est Zariski-dense dans $\mathcal{Z}(\tilde{T})$, et $\tilde{T}$ est le plus grand tore déployé sur k central de $\mathcal{Z}(\tilde{T})$, donc $g \in \tilde{G}(k)$ normalise H si et seulement s'il normalise $\tilde{T}$, d'où l'égalité $N' = \mathcal{N}_{\tilde{G}(k)}(H)$. Par construction, N' stabilise A. D'autre part, comme X est associé à un système de Tits de $\tilde{G}(k)$, le group $\tilde{G}(k)$ y opère par automorphismes spéciaux; en particulier, si $g \in \tilde{G}(k)$ stabilise A, il y induit une transformation du groupe de Weyl de A, donc il existe $n \in N'$ tel que $n \cdot g$ fixe A, i.e. $n \cdot g \in H$, d'où $g \in N'$. Enfin, soit A' un appartement fixé par H. Il existe $g \in \tilde{G}(k)$ tel que

$g \cdot A = A'$. Comme $g \cdot H \cdot g^{-1}$ est le fixateur de A', on a $H \subset g \cdot H \cdot g^{-1}$, d'où, en passant aux adhérences de Zariski, $\mathscr{Z}(\tilde{T}) \subset g \cdot \mathscr{Z}(\tilde{T}) \cdot g^{-1}$ et par suite $\mathscr{Z}(\tilde{T}) = g \cdot \mathscr{Z}(\tilde{T}) \cdot g^{-1}$, d'où $g \in N'$ et $A' = A$. En associant à un appartement A' le plus grand tore déployé sur k du centre de l'adhérence de Zariski du fixateur de A', on établit donc une bijection entre appartements de X et tores déployés sur k maximaux de $\tilde{G}$. Remarquons que H peut avoir des points fixes en dehors de A (par exemple si $\tilde{G} = SL_2$ et $k = \mathbf{Q}_2$).

4.4. Quartiers fermés. Nous appellerons *quatiers fermés* les adhérences des quartiers de X au sens de [11: 7.1.4, p. 157]. Tout quartier fermé Δ est l'adhérence d'un unique quartier $\mathring{\Delta}$ qui est l'intérieur de Δ dans tout appartement de X contenant Δ. Le *sommet* (resp. la *direction*) de Δ est, par définition, le sommet (resp. la direction) de $\mathring{\Delta}$, *loc. cit.*

On note D le quartier fermé de A de sommet o contenant C'. C'est le plus petit cône de A de sommet o contenant C'. C'est un domaine fondamental pour W dans A; utilisant 4.3, on en déduit que c'est aussi un domaine fondamental pour $\tilde{K} = B \cdot W \cdot B$ dans X.

4.5. Racines affines. Les *murs* de A sont les hyperplans de points fixes des réflexions de W' et les *racines affines* sont les demi-espaces fermés de A limités par les murs [11: 1.3.3, p. 20]. On note Σ l'ensemble des racines affines. Il existe dans le dual de A un et un seul système de racines réduit ${}^v\Sigma$ ayant les propriétés suivantes:

(i) étant donné $\alpha \in \Sigma$ il existe un unique ${}^v\alpha \in {}^v\Sigma$ et un entier $r(\alpha)$ tels que α soit l'ensemble de points donnés par ${}^v\alpha + r(\alpha) \geq 0$;

(ii) tous les hyperplans $\beta + m = 0$ ($\beta \in {}^v\Sigma$, $m \in \mathbf{Z}$) sont des murs.

De plus, il existe une unique surjection $\nu: \Phi \to {}^v\Sigma$ commutant à W telle que $a \in \mathbf{R}_+^* \cdot \nu(a)$ pour tout $a \in \Phi$. Le groupe W' est le groupe de Weyl affine de ${}^v\Sigma$; sa partie linéaire est W.

Une partie de X est un *demi-appartement* si elle est transformée d'une racine affine par un élément de $\tilde{G}(k)$.

4.6. Fixateurs. Pour $a \in \Phi$, on note $U_{(a)}$ le plus grand k-sous-groupe unipotent de $\tilde{G}$ normalisé par $\tilde{T}$ et dans lequel les poids de $\tilde{T}$ sont les multiples positifs de a contenus dans Φ [6: §5]. Le radical unipotent U (resp. U^-) de $\tilde{P}$ (resp. du sous-groupe parabolique $\tilde{P}^-$ opposé à $\tilde{P}$ et contenant $\mathscr{Z}(\tilde{T})$) est donc engendré par les $U_{(a)}$ avec $a > 0$ (resp. avec $a < 0$). Etant donné $r \in \mathbf{R}$, on note $U_{(a),r}$ le sous-groupe de $U_{(a)}$ qui fixe le demi-espace fermé $\nu(a) + r \geqq 0$. Les sous-groupes $U_{(a),r}$ sont compacts ouverts dans $U_{(a)}(k)$, d'intersection réduite à $\{e\}$, de réunion égale à $U_{(a)}(k)$, et définissent une filtration décroissante de $U_{(a)}(k)$, qui est en fait discrète, n'ayant de sauts que pour certaines valeurs entières de r. (Si la racine a n'est ni multipliable ni divisible, chaque entier correspond à un tel saut. Sinon, il y a plusieurs possibilités pour a et $2a$, qui sont décrites par un *échelonnage* de Φ par Σ [11: 1.4.1, p. 25].) Si α est une racine affine, on pose $U_\alpha = U_{(a),r}$, où $\nu(a) = {}^v\alpha$ et $r = r(\alpha)$.

Si $M \subset X$, et si E est un groupe opérant sur X, alors E_M dénote le fixateur de M dans E.

Si M est une partie de A, alors $\tilde{G}(k)_M$ est engendré par H et par les groupes U_α associés aux racines affines α contenant M [11: 5.2.28, p. 104].

4.7. LEMME. *Soient $I \subset S$ et Φ_I l'ensemble des éléments de Φ qui sont combinaisons linéaires d'éléments de I. Posons $G_I = \mathscr{Z}(\tilde{T}_I)(k)$, $N_I = N' \cap G_I$ et $K_I = \tilde{K} \cap G_I$. Soit $U_0{}^I$ le groupe engendré par les $U_{(a),0}$ ($a \in \Phi_I$). Alors*

$$G_I = U_0{}^I \cdot N_I \cdot U_0{}^I, \qquad K_I = U_0{}^I \cdot W_I \cdot H \cdot U_0{}^I, \tag{1}$$

et K_I est un sous-groupe compact maximal de G_I.

Le sous-groupe G_I de $\tilde{G}(k)$ satisfait aux conditions imposées au groupe noté G_1 dans [11: 7.6, p. 184] (avec $\Phi_1 = \Phi_I$, $T_1 = \mathscr{Z}(\tilde{T})(k)$). Notre groupe $U_0{}^I$ n'est autre que le $U^1_{\pi(x)}$ de *loc. cit.*, p. 185, pour $x = o$. La première égalité de (1) résulte alors de [11: 7.3.4, p. 165], comme cela est indiqué dans [11: p. 185, l. 21].

Le groupe K_I contient évidemment l'ensemble $U_0{}^I \cdot H \cdot W_I \cdot U_0{}^I$; tout revient donc à montrer qu'un sous-groupe de G_I contenant strictement $U_0{}^I \cdot H \cdot W_I \cdot U_0{}^I$ n'est pas compact. Soit M un tel sous-groupe, et soit $Q = M \cap N_I$. Vu la première égalité de (1), on a $M = U_0{}^I \cdot Q \cdot U_0{}^I$. Le groupe Q contient $K_I \cap N_I$; d'autre part, N_I/H est produit semi-direct de W_I et du groupe de translations $\mathscr{Z}(\tilde{T})(k)/H$. Supposons $M \neq K_I$. Alors $Q \neq W_I \cdot H$, donc Q contient un élément g dont l'image dans N_I/H est une translation non nulle. Par suite, g engendre un sous-groupe discret infini de M, et M n'est pas compact.

4.8. Action de $(\mathrm{Aut}\,\tilde{G})(k)$ et de $G(k)$ sur l'immeuble X. Nous admettrons que π est B–N-adapté [11: 1.2.13, p. 18] et de type connexe [11: 4.1.3, p. 72].

Tout élément de $\mathrm{Aut}\,\tilde{G}(k)$ laisse stable G_0, permute les G_j $(1 \leq j \leq m)$ et les sous-groupes parahoriques de $\tilde{G}(k)$, et laisse stable la classe de conjugaison de H. On en déduit une action de $(\mathrm{Aut}\,\tilde{G})(k)$ sur X qui en préserve la structure polysimpliciale et les appartements; elle est continue et propre. Par la représentation adjointe, G s'envoie dans $\mathrm{Ad}\,G = \mathrm{Ad}\,\tilde{G}$, d'où une action continue de $G(k)$ sur $\tilde{G}(k)$ qui commute à π (le groupe $G(k)$ opérant sur lui-même par automorphismes intérieurs), ainsi qu'une action, également continue et propre, de $G(k)$ sur X. On note $g \cdot x$ le transformé par $g \in G(k)$ d'un élément x de X. Comme X est localement fini, les fixateurs des faces de X dans $G(k)$ ou $\mathrm{Aut}\,\tilde{G}(k)$ sont des sous-groupes ouverts. Comme π commute à $G(k)$, le groupe $\pi(\tilde{G}(k))$ est distingué dans $G(k)$.

Le groupe N est le stabilisateur de A. Son image canonique W'' dans $\mathrm{Aut}\,A$ contient W' comme sous-groupe distingué. Comme π est de type connexe, les fixateurs W'_x et W''_x d'un point $x \in A$ dans W' et W'' sont les mêmes [11: 4.1.3, p. 72]; en particulier $W''_0 = W'_0 = W$.

Le noyau de π est contenu dans H, donc dans tous les conjugués de H, et opère trivialement sur X. Si $M \subset X$ et $g \in \tilde{G}(k)$, on a

$$g \in \tilde{G}(k)_M \Leftrightarrow \pi(g) \in G(k)_M. \tag{1}$$

4.9. Lemme. *Soit K (resp. L) le fixateur de o (resp. A) dans $G(k)$.*

(i) *Le groupe K est compact ouvert dans $G(k)$ et $L = K \cap \mathscr{Z}(T)(k)$.*

(iii) *On a $K = L \cdot \pi(\tilde{K})$, $G(k) = K \cdot P(k)$ et $K \cap P_I = L \cdot \pi(\tilde{K} \cap \tilde{P}_I)$ pour tout $I \subset S$.*

(iii) *L'ensemble D (resp. C) est un domaine fondamental pour K dans X (resp. Y).*

(i) On a déjà remarqué que K est ouvert dans $G(k)$; il est évidemment compact, et contient L. D'autre part, L normalise $\pi(H)$ puisque H est le fixateur de A dans $\tilde{G}(k)$; il normalise donc l'adhérence de $\pi(H)$ pour la topologie de Zariski, qui est $\mathscr{Z}(T)$, donc aussi T qui est le plus grand tore déployé sur k du centre de $\mathscr{Z}(T)$, et l'on a $L \subset N$. Le fait que L fixe A montre en outre que son image dans $W = N/\mathscr{Z}(T)(k)$ est triviale, d'où $L \subset \mathscr{Z}(T)(k)$, et par suite $L \subset K \cap \mathscr{Z}(T)(k)$. Inversement, si $g \in K \cap \mathscr{Z}(T)(k)$, l'élément g stabilise A et induit sur A une translation; comme celle-ci fixe o, c'est l'identité, et l'on a bien $g \in L$.

(ii) Soit $x \in K$. Le groupe $\tilde{K}$ est transitif sur l'ensemble des appartements contenant o, et W'_0 est transitif sur l'ensemble des quartiers fermés de sommet o contenus dans A. Il existe donc $y \in \pi(\tilde{K})$ tel que $y \cdot x$ stabilise o, D et A, donc fixe A puisque π est de type connexe; on a donc $y \cdot x \in L$, d'où $K = L \cdot \pi(\tilde{K})$.

Le groupe $\tilde{G}(k)$ permutant transitivement les appartements de X, on a $G(k) = N \cdot \pi(\tilde{G}(k))$. D'autre part, $\tilde{K} = B \cdot W \cdot B$. Comme N est engendré par W et $\mathscr{Z}(T)(k)$ et que $\pi(\tilde{G}(k))$ est distingué dans $G(k)$, on a

$$G(k) = N \cdot \pi(\tilde{G}(k)) \subset \pi(\tilde{K})(\mathscr{Z}(T)(k)) \cdot \pi(\tilde{G}(k)) = \pi(\tilde{K}) \cdot \pi(\tilde{G}(k)) \cdot (\mathscr{Z}(T)(k)),$$

d'où, vu 4.2(1),

$$G(k) \subset \pi(\tilde{K}) \cdot \pi(\tilde{K}) \cdot \pi(\tilde{P}(k)) \cdot (\mathscr{Z}(T)(k)) \subset K \cdot P(k).$$

Vu (i), on a $L \cdot \pi(\tilde{K} \cap \tilde{P}_I) \subset K \cap P_I$. Soit $x \in K \cap P_I$. Comme $K = L \cdot \pi(\tilde{K})$, on peut écrire x sous la forme $y \cdot \pi(z)$, avec $y \in L$ et $z \in \tilde{K}$. On a $y \in \mathscr{Z}(T) \subset P_I$, d'où $\pi(z) \in P_I$, ce qui entraîne $z \in \tilde{P}_I$, d'où $x \in L \cdot \pi(\tilde{K} \cap \tilde{P}_I)$.

(iii) La chambre C est un domaine fondamental pour $G(k)$ dans Y, fixé par $P(k)$. C'est donc un domaine fondamental pour K. La relation $X = \tilde{K} \cdot D$ (cf. 4.4) entraîne $X = K \cdot D$. Soient d, $d' \in D$ transformés l'un de l'autre par un élément de K. Vu 4.3, ils sont aussi transformés l'un de l'autre par un élément du stabilisateur de A dans K, i.e. par un élément de $W = W'_0 = W''_0$ (4.8). On a donc $d = d'$, ce qui montre que D est un domaine fondamental pour K dans X.

Remarque. Soient $\mu_X : K \times D \to X$ et $\mu_Y : K \times C \to Y$ les applications induites par l'action de K sur X et Y. D'après (iii), μ_X et μ_Y sont *surjectives*. De plus, ce sont des applications *propres*, puisque K est compact, cf. [8: III.28, prop. 2]. Vu [8: I.74, cor. 4], il en résulte que la topologie de X (resp. de Y) s'identifie à la *topologie quotient* de celle de $K \times D$ (resp. de $K \times C$) par la relation d'équivalence définie par μ_X (resp. par μ_Y).

4.10. Fixateurs de parties de D. Soit $I \subset S$. On note D_I l'intersection de D et des murs $\nu(a) = 0$ $(a \in I)$. On a $D_S = \{o\}$ et $D_\emptyset = D$. Une partie M de D_I sera dite *intérieure à* D_I si $M \cap D_J = \emptyset$ quel que soit $J \subset S$ contenant I proprement. Par abus de langage, une demi-droite E issue de o, contenue dans D_I, sera dite intérieure à D_I si tout point de E différent de o est intérieur à D_I.

PROPOSITION. *Soit $I \subset S$, $I \neq S$ et soit E une demi-droite d'origine o intérieure à D_I. Alors*

$$G(k)_E = G(k)_{D_I} = K \cap P_I. \tag{1}$$

Nous reprenons les notations de 4.7, 4.9 et désignons par Ψ_I l'ensemble des racines >0 non contenues dans Φ_I, autrement dit l'ensemble des poids de $\tilde{T}$ dans le radical unipotent U_I de $\tilde{P}_I$.

Comme $G(k)_{D_I}$ est contenu dans $G(k)_E$, tout revient à prouver:

$$G(k)_E \subset K \cap P_I \subset G(k)_{D_I}. \tag{2}$$

Les groupes figurant dans (2) contiennent L et font partie de K. Vu 4.8(1) et 4.9(ii), il suffit donc de montrer:

$$\tilde{G}(k)_E \subset \tilde{K} \cap \tilde{P}_I \subset \tilde{G}(k)_{D_I}. \tag{3}$$

Le groupe $\tilde{G}(k)_E$ est engendré par H et les groupes U_α, où α parcourt l'ensemble des racines affines α qui contiennent E, cf. 4.6. Si α est une telle racine, et si $a \in \Phi$ est tel que $\nu(a) = {}^v\alpha$ (cf. 4.5), on a $a \in \Phi_I \cup \Psi_I$, d'où $U_\alpha \subset \tilde{P}_I$, ce qui démontre la première inclusion de (3).

Le groupe $\tilde{K} \cap \tilde{P}_I$ contient $K_I = \tilde{K} \cap G_I$. Son image dans G_I par la projection canonique de $\tilde{P}_I(k)$ sur $\tilde{P}_I(k)/U_I(k) = G_I$ contient donc aussi K_I. Comme ce dernier est compact maximal dans G_I (4.7), on a

$$\tilde{K} \cap \tilde{P}_I = K_I \cdot (\tilde{K} \cap U_I). \tag{4}$$

Pour établir la deuxième inclusion de (3), il nous suffit donc de montrer que K_I et $\tilde{K} \cap U_I$ fixent D_I.

On a $K_I = U_0{}^I \cdot W_I \cdot H \cdot U_0{}^I$ (4.7). Le groupe $W_I \cdot H$ fixe évidemment D_I. Par définition, le groupe $U_0{}^I$ est engendré par les fixateurs $U_{(a),o}$ des racines affines $\nu(a) \geqq 0$ $(a \in \Psi_I)$. Comme ces dernières contiennent D_I on a $U_0{}^I \subset \tilde{G}(k)_{D_I}$, d'où $K_I \subset \tilde{G}(k)_{D_I}$.

Soit $u \in U_I(k)$. C'est un produit d'éléments $u_a \in U_{(a)}(k)$ où a parcourt Ψ_I. Soit E' une demi-droite d'origine o et intérieure à D_I. Si x est un point de E' tendant vers l'infini, alors $\nu(a)(x)$ tend vers l'infini, donc u_a fixe une demi-droite convenable de E'. Il en est alors de même de u. Soit y un point de cette demi-droite. Si u est de plus dans $\tilde{K}$, il fixe o, donc le segment joignant o et y, et finalement tout point de E'. Cela valant pour E' intérieure à D_I quelconque, et l'ensemble de ces demi-droites étant dense dans D_I, il s'ensuit que $\tilde{K} \cap U_I$ fixe D_I, ce qui achève la démonstration.

§5. Compactification de X par Y_t et cohomologie à supports compacts de X

Soit Z l'ensemble somme de X et de Y. Le but de ce § est de munir Z d'une topologie qui en fasse un espace compact contractile Z_t, et qui induise sur X (resp. Y) la topologie naturelle de X (resp. celle de Y_t), cf. 5.4; la détermination de la cohomologie à supports compacts de X en résultera (5.6).

5.1. Compactification d'un espace affine réel. Soient A un espace affine réel, et V_A l'espace vectoriel des translations de A; on suppose que la dimension l de V_A est finie. Soit S_A la sphère des demi-droites de V_A issues de l'origine, et soit $\bar{A} = A \amalg S_A$ la somme disjointe de A et de S_A. Il existe sur $\bar{A}$ une topologie naturelle qui en fait une *compactification* de A (compactification "par les directions de demi-droites"); cette topologie peut être caractérisée par les propriétés suivantes:

(a) elle induit sur A (resp. sur S_A) la topologie naturelle de A (resp. de S_A);

(b) A est ouvert dans $\bar{A}$;

(c) soient $o \in A$ et $d \in S_A$; soit (x_i) une suite de points de A; pour que x_i tende vers d dans $\bar{A}$, il faut et il suffit que x_i tende vers l'infini dans A et que la demi-droite d_i d'origine o contenant x_i tende vers d dans S_A.

L'espace $\bar{A}$ est homéomorphe à une boule fermée de dimension l. Si σ est un automorphisme affine de A, et σ_{lin} l'automorphisme correspondant de V_A (donc de S_A), le couple $(\sigma, \sigma_{\text{lin}})$ définit un homéomorphisme de $\bar{A} = A \amalg S_A$ sur lui-même.

5.2. Appartements compactifiés

5.2.1. Compactification de l'appartement standard. Soit A l'appartement standard de X, et soit o le point spécial de A choisi au n° 4.2. Du fait que A est muni d'une structure naturelle d'espace affine, sa compactification $\bar{A} = A \amalg S_A$ est définie (5.1). Nous allons voir que l'on peut *identifier* S_A *à l'appartement standard* $W \cdot C$ *de l'immeuble* Y.

Reprenons les notations de 4.1, 4.2. Notons C'_{j,s'_j} la face de codimension 1 de C'_j opposée à o_j, i.e. le "link" de o_j dans C'_j ($1 \leq j \leq m$). Soit L_0 l'enveloppe convexe des C'_{j,s'_j}. C'est un simplexe de dimension $l-1$, dont les sommets sont les sommets des C'_{j,s'_j}. Il est contenu dans $D - \{o\}$, cf. 4.4, et toute demi-droite de D issue de o le rencontre en exactement un point. Soit λ_j l'unique application simpliciale de C_j sur C'_{j,s'_j} qui, pour tout $I \subset S_j$, applique $C_{j,I}$ sur $C'_{j,I\cup\{s'_j\}}$. C'est un isomorphisme. Il existe un unique isomorphisme $\lambda_C \colon C \to L_0$ qui prolonge les λ_j. Avec les notations de 1.2 et 4.10, on a $\lambda_C(C_I) = D_I \cap L_0$ pour tout $I \subset S$, $I \neq S$. Soit $A_\infty = W \cdot C$ l'appartement standard de Y, et soit $W \cdot L_0$ le sous-complexe de A réunion des $w \cdot L_0$, $w \in W$. On vérifie immédiatement que λ_C se prolonge en un unique isomorphisme simplicial $\lambda \colon A_\infty \to W \cdot L_0$ qui commute à l'action de W. D'autre part, toute demi-droite d de A issue de o rencontre $W \cdot L_0$ en un point $\mu(d)$ et un seul; on en déduit un homéomorphisme μ de S_A sur $W \cdot L_0$. D'où, en composant μ et λ^{-1}, un homéomorphisme ρ_A de S_A sur A_∞, par lequel nous *identifierons* ces deux espaces. On obtient ainsi une *topologie* sur $\bar{A} = A \amalg A_\infty$, et les éléments de A_∞ s'interprètent comme des *directions de demi-droites* dans A.

L'adhérence $\bar{D}$ de D dans $\bar{A}$ est $D \amalg C$, et $C = \bar{D} \cap A_\infty$ est l'espace des directions de demi-droites contenues dans D.

5.2.2. Invariance. Soit σ un automorphisme de $\tilde{G}$; alors σ opère de façon naturelle sur X (4.8) et sur Y. Supposons de plus que σ stabilise A (ou A_∞, ou H, ou $Z(T)$, cela revient au même); alors σ opère sur A, sur S_A et sur A_∞, et l'identification $\rho_A \colon S_A \to A_\infty = W \cdot C$ *commute à* σ; en effet, cela revient à dire que la partie linéaire σ_{lin} de $\sigma|A$ commute à l'homéomorphisme λ de $W \cdot C$ sur $W \cdot L_0$, ce qui est immédiat.

5.2.3. Compactification des appartements. Soit E un appartement de X, et soit E_∞ l'appartement correspondant de Y (cf. [11: 5.1.33]), i.e. l'ensemble des points de Y fixés par le fixateur de E dans $G(k)$. Soit S_E la sphère des directions de demi-droites de l'espace affine E. Il résulte de 5.2.2 qu'il existe une bijection $\rho_E \colon S_E \to E_\infty$ et une seule telle que, pour tout $\sigma \in (\mathrm{Aut}\,\tilde{G})(k)$ tel que $\sigma A = E$, le diagramme

$$\begin{tikzcd} S_A \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\rho_A"'] & S_E \arrow[d, "\rho_E"] \\ A_\infty \arrow[r, "\sigma"] & E_\infty \end{tikzcd}$$

soit commutatif. Dans ce qui suit, on identifiera S_E et E_∞ au moyen de ρ_E; vu 5.1, on en déduit une topologie (dite *naturelle*) sur $\bar{E} = E \amalg E_\infty$, qui fait de $\bar{E}$ un espace compact, contenu dans $Z = X \amalg Y$, et appelé le *compactifié* de E. Les topologies ainsi construites sont *compatibles* au sens suivant:

5.2.4. Lemme. *Soit M une partie de X, contenue dans deux appartements E_1 et E_2, et soit $\bar{M}_1$ (resp. $\bar{M}_2$) l'adhérence de M dans l'appartement compactifié $\bar{E}_1$ (resp. $\bar{E}_2$). On a alors $\bar{M}_1 = \bar{M}_2$, et les topologies induites sur cet ensemble par les topologies naturelles de $\bar{E}_1$ et $\bar{E}_2$ coïncident.*

On peut supposer que E_1 est l'appartement standard A. Choisissons un élément $g \in \tilde{G}(k)$ tel que $gA = E_2$ et que g fixe M, cf. 4.3. Vu 5.2.3, l'élément g définit un homéomorphisme de $\bar{A} = \bar{E}_1$ sur $\bar{E}_2$, et cet homéomorphisme applique $\bar{M}_1$ sur $\bar{M}_2$. Il reste donc à montrer que cet homéomorphisme est l'identité sur $\bar{M}_1$, autrement dit que g *fixe* $M_\infty = \bar{M}_1 - M$. D'après 4.6, le fixateur de M dans $\tilde{G}(k)$ est engendré par H et par les sous-groupes U_α associés aux racines affines α contenant M. On peut donc supposer que g appartient, soit à H, soit à l'un des U_α en question. Si $g \in H$, g fixe $\bar{A}$ donc aussi M_∞. Si $g \in U_\alpha$, et si $a \in \Phi$ est tel que $\nu(a) = {}^v\alpha$ (4.6), on a $g \in U_{(a)}$, et g fixe le demi-appartement de A_∞ défini par la racine a (i.e. l'ensemble des faces de Y associées aux k-sous-groupes paraboliques de $\tilde{G}$ contenant $\mathscr{Z}(\tilde{T}) \cdot U_{(a)}$); il résulte de 5.2 que ce demi-appartement est l'ensemble $\alpha_\infty = \bar{\alpha} - \alpha$ des directions de demi-droites contenues dans α; comme M est contenu dans α, on a $M_\infty \subset \alpha_\infty$, ce qui montre bien que g fixe M_∞, et achève la démonstration.

5.3. Soit M une partie de X qui soit contenue dans au moins un appartement. Le lemme précédent permet de définir la *compactification* $\bar{M}$ de M: on choisit un appartement E contenant M, et l'on prend pour $\bar{M}$ l'adhérence de M dans $\bar{E}$; on a $\bar{M} \subset Z$; vu 5.2.4, $\bar{M}$ ne dépend pas (topologie comprise) du choix de E. Ainsi, on peut parler du compactifié d'un *quartier fermé*, d'un *demi-appartement* (4.5), etc. Si σ est un automorphisme de $\tilde{G}$, l'action de σ sur Z définit un homéomorphisme de $\bar{M}$ sur $\overline{\sigma(M)}$: cela résulte de 5.2.3.

Nous allons maintenant "recoller" ces différentes topologies:

5.4. THÉORÈME. (a) *Il existe une topologie $\mathcal{T}$ et une seule sur $Z = X \amalg Y$ ayant les propriétés suivantes*:

(a_1) *$\mathcal{T}$ est séparée;*

(a_2) *$\mathcal{T}$ induit sur chaque appartement compactifié* (5.2.3) *sa topologie naturelle;*

(a_3) *$\mathcal{T}$ est invariante par $G(k)$, et l'action de $G(k)$ sur l'espace topologique $Z_t = (Z, \mathcal{T})$ est continue.*

De plus:

(b) X (resp. Y) *est ouvert* (resp. *fermé*) *dans Z_t, et la topologie induite par $\mathcal{T}$ sur X* (resp. Y) *est la topologie naturelle de X* (resp. *celle de Y_t*).

(c) *L'espace Z_t est compact et contractile.*

(d) *La topologie $\mathcal{T}$ ne dépend que de $\tilde{G}$.*

(e) *$\mathcal{T}$ est invariante par* $(\mathrm{Aut}\,\tilde{G})(k)$, *et l'action de* $(\mathrm{Aut}\,\tilde{G})(k)$ *sur Z_t est continue.*

La démonstration occupe les n^{os} 5.4.1 à 5.4.9 ci-après.

5.4.1. Soit K le fixateur de o dans $G(k)$, cf. 4.9, et soit $\bar{D} = D \amalg C$ la compactification du quartier fermé D (5.2.1). D'après 4.9, l'application $\mu: K \times \bar{D} \to Z$ définie par l'action de K sur Z est *surjective.* Si $\mathcal{T}$ satisfait à (a_2) et (a_3), μ est *continue*; si de plus (a_1) est satisfaite, le fait que $K \times \bar{D}$ soit compact entraîne que μ est propre [8: I.76, cor. 2]; d'après [8: I.74, cor. 4], on en déduit que μ identifie l'espace $Z_t = (Z, \mathcal{T})$ au *quotient* de $K \times \bar{D}$ par la relation d'équivalence R_μ définie par μ. L'assertion d'*unicité* de 5.4 en résulte. Il reste donc à montrer que, si l'on définit $Z_t = (Z, \mathcal{T})$ comme quotient de $K \times \bar{D}$ par R_μ, l'espace ainsi obtenu possède les propriétés (a_1), (a_2), (a_3), (b), (c), (d), (e).

5.4.2. Vérification de (b). Comme $K \times D$ (resp. $K \times C$) est ouvert (resp. fermé) dans $K \times \bar{D}$, et saturé pour R_μ, son image X (resp. Y) dans Z_t est ouverte (resp. fermée) et a pour topologie la topologie quotient de celle de $K \times D$ (resp. de $K \times C$), cf. [8: I.23, cor. 1], i.e. la topologie naturelle de X (resp. celle de Y_t), cf. 4.9, Remarque.

5.4.3. Vérification de (a_1). Il s'agit de montrer que Z_t est séparé. Comme $K \times \bar{D}$ est compact, il suffit pour cela de vérifier que le graphe de R_μ dans $(K \times \bar{D}) \times (K \times \bar{D})$ est fermé [8: I.78, prop. 8]. Cela revient à prouver l'assertion suivante:

(*) *Soient* (k_n), (k'_n) (*resp.* (d_n), (d'_n)) $(n = 1, 2, \ldots)$ *deux suites d'éléments de K* (*resp.* D) *tendant vers des limites g, g'* (*resp.* d, d'), *et telles que* $k_n \cdot d_n = k'_n \cdot d'_n$ *pour tout n. Alors* $g \cdot d = g' \cdot d'$.

Pour n donné on a évidemment $d_n \in D$ (resp. $d_n \in C$) si et seulement si $d'_n \in D$ (resp. $d'_n \in C$). Si $d_n \in C$ pour une infinité de valeurs de n, notre assertion résulte du fait que K opère continûment sur Y_t. Cela nous ramène au cas où d_n, $d'_n \in D$ pour tout n. Comme D est un domaine fondamental pour K (4.9), on a $d_n = d'_n$ pour tout n, d'où $d = d'$. Posons

$$m_n = k_n^{-1} \cdot k'_n \qquad \text{et} \qquad m = g^{-1} \cdot g' = \lim_{n \to \infty} m_n.$$

On a $m_n \cdot d_n = d_n$, et l'on doit montrer que $m \cdot d = d$. Si $d \in D$, cela résulte de la continuité de l'action de K sur X. Supposons donc $d \in C$, i.e. que la distance euclidienne (dans A) $d(o, d_n)$ de o à d_n tende vers l'infini. Soit E la demi-droite de D d'origine o et de direction d. Pour $t > 0$, soit e_t le point de E à distance t de o. Il existe $n(t)$ tel que $d(o, d_n) \geqslant t$ pour tout $n \geqslant n(t)$; on a $e_t = \lim e_{n,t}$, où $e_{n,t}$ désigne le point du segment $[o, d_n]$ à distance t de o. Comme m_n fixe o et d_n, il fixe aussi l'unique segment géodésique $[o, d_n]$ joignant o à d_n, et en particulier il fixe $e_{n,t}$ $(n \geqslant n(t))$. Du fait que K opère continûment sur X, on a

$$m \cdot e_t = (\lim m_n) \cdot (\lim e_{n,t}) = \lim (m_n \cdot e_{n,t}) = \lim e_{n,t} = e_t.$$

Ainsi, m fixe la demi-droite E. Vu 5.3, m stabilise la compactification $\bar{E}$ de E, donc aussi $\{d\} = \bar{E} \cap Y$, ce qui montre bien que m fixe d (ce qui pourrait aussi se déduire de 4.10).

5.4.4. Continuité de l'action de K sur Z_t.

D'après 5.4.3, Z_t est séparé. Comme $K \times \bar{D}$ est compact, il en résulte que Z_t est *compact*, et que l'application $\mu: K \times \bar{D} \to Z_t$ est *propre*, cf. [8: I.78, prop. 8]. Par conséquent, si F est un espace topologique, l'application Id. $\times \mu: F \times X \times \bar{D} \to F \times Z_t$ est aussi propre, et $F \times Z_t$ s'identifie au quotient de $F \times K \times \bar{D}$ par la relation d'équivalence définie par Id. $\times \mu$ [8: I.74, cor. 4]. En particulier, si $\nu: K \times K \to K$ est l'application produit, l'unique application σ qui rend commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} K \times K \times \bar{D} & \xrightarrow{\nu \times \mathrm{Id.}} & K \times \bar{D} \\ {\scriptstyle \mathrm{Id.}\times\mu}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mu} \\ K \times Z_t & \xrightarrow{\sigma} & Z_t \end{array}$$

est continue, ce qui montre que K *opère continûment sur* Z_t.

5.4.5. Vérification de (c). On a vu que Z_t est compact; il s'agit de montrer qu'il est *contractile.* Remarquons d'abord que $\bar{D}$ est contractile puisqu'homéomorphe à un simplexe. On peut choisir une contraction $r: \bar{D} \times [0, 1] \to \bar{D}$ de $\bar{D}$ sur son sommet o telle que, si l'on pose $x_t = r(x, t)$ ($x \in \bar{D}, t \in [0, 1]$), les propriétés suivantes soient satisfaites:

(i) $x_0 = x$, $x_1 = o$;

(ii) $x_t \in [o, x]$ si $x \in D$;

(iii) si $x \in C$ et $t > 0$, le point x_t appartient à la demi-droite ox d'origine o et de direction x.

(Voici un choix possible de r: pour $x \in D$, on prend pour x_t le point de $[o, x]$ tel que $d(o, x_t) = (1-t)d(o, x)/(1 + td(o, x))$, et pour $x \in C$, $t > 0$, on prend pour x_t le point de ox tel que $d(o, x_t) = (1-t)/t$.)

Si K_x désigne le fixateur de x dans K, on a:

(iv) $K_x \subset K_{x_t}$ pour tout $x \in \bar{D}$ et tout $t \in [0, 1]$.

Si $x \in D$, cela résulte du fait que tout élément de $G(k)$ qui fixe o et x fixe aussi le segment $[o, x]$. Si $x \in C$, soit $I \subset S$ tel que $x \in \mathring{C}_I$; pour $t \neq 0$, on a $x_t \in D_I$ (4.10); comme $K_x = K \cap P_I$, (iv) résulte de la proposition 4.10.

La relation (iv) entraîne que le composé r' des applications continues

$$K \times \bar{D} \times [0, 1] \xrightarrow{\mathrm{Id.} \times r} K \times \bar{D} \xrightarrow{\mu} Z_t$$

est constant sur les ensembles de la forme $\mu^{-1}(x) \times \{t\}$ ($x \in Z$, $t \in [0, 1]$); donc r' se factorise en $r' = r_Z \circ (\mu \times \mathrm{Id.})$, où r_Z est une application de $Z_t \times [0, 1]$ sur Z_t. Mais il résulte de 5.4.4 que $Z_t \times [0, 1]$ est le quotient de $K \times \bar{D} \times [0, 1]$ par la relation d'équivalence définie par $\mu \times$ Id.; par conséquent r_Z est continue, et définit une contraction de Z_t sur o, ce qui montre que Z_t est contractile.

5.4.6. Vérification de (a_2). Il s'agit de montrer que, pour tout appartement E, la topologie induite par $\mathcal{T}$ sur l'appartement compactifié $\bar{E}$ (5.2.3) est la topologie naturelle de $\bar{E}$. Il suffira pour cela de prouver que $\bar{E}$ est réunion finie de parties fermées F_i telles que les injections $F_i \to Z_t$ soient continues; en effet, cela prouvera que $\bar{E} \to Z_t$ est continue [8: I.19, prop. 4], et, comme $\bar{E}$ est compact et Z_t séparé (5.4.3), il en résultera que la topologie de $\bar{E}$ est induite par $\mathcal{T}$ [8: I.63, cor. 3]. Distinguons alors trois cas:

(1) $E = A$

On prend pour parties fermées F_i les transformés $w \cdot \bar{D}$ de $\bar{D}$ par les éléments w de W. Les injections $w \cdot \bar{D} \to Z_t$ sont continues: on les obtient en composant l'injection $\bar{D} \to Z_t$, continue par construction, avec les automorphismes de Z_t définis par les éléments de W (5.4.4).

(2) *E contient o*

Il existe alors $g \in K$ tel que $gE = A$ (4.3); comme g préserve $\mathcal{T}$ (5.4.4), on est ramené au cas précédent.

(3) *Cas général*

Soit $m = m(E)$ le plus petit entier ≥ 0 tel qu'il existe une galerie minimale

$$\gamma = (C' = C_0, C_1, \ldots, C_m)$$

reliant la chambre C' de A (4.2) à une chambre C_m de l'appartement E. Si $m = 0$, on a $o \in E$, cas déjà traité. Supposons donc $m \geq 1$, et raisonnons par récurrence sur m. Soit γ comme ci-dessus, et soit F la cloison $C_{m-1} \cap C_m$; notons α_1 et α_2 les deux demi-appartements de E dont le mur commun contient F. D'après [11: 5.1.9, p. 85], il existe un appartement E_i contenant $C_{m-1} \cup \alpha_i$ $(i = 1, 2)$. Comme $C_{m-1} \subset E_i$, on a $m(E_i) \leq m - 1$, et l'hypothèse de récurrence entraîne que les injections $\bar{E}_i \to Z_t$ sont continues; *a fortiori*, il en est de même des injections $\bar{\alpha}_i \to Z_t$, d'où le résultat cherché, puisque $\bar{E}$ est réunion de $\bar{\alpha}_1$ et $\bar{\alpha}_2$.

5.4.7. Vérification de (a₃). Montrons d'abord que, si $g \in G(k)$, la bijection $z \mapsto g \cdot z$ de Z_t sur lui-même est *continue*. Du fait que K est ouvert dans $G(k)$, il existe un voisinage K_1 de l'élément neutre dans K tel que $g \cdot K_1 \cdot g^{-1} \subset K$; comme K est totalement discontinu, on peut en outre supposer que K_1 est un sous-groupe ouvert de K [8: III.36, cor. 1]. Choisissons une famille finie $(m_j)_{j \in J}$ d'éléments de K telle que K soit réunion des $K_1 m_j$, $j \in J$, et soit $\bar{D}_1$ le sous-espace de Z_t réunion des $m_j \cdot \bar{D}$; c'est une partie compacte de Z_t. L'application μ_1: $K_1 \times \bar{D}_1 \to Z_t$ définie par l'action de K_1 sur Z_t est continue d'après 5.4.4, et surjective. Comme $K_1 \times \bar{D}_1$ est compact, et Z_t séparé (5.4.3), cette application est propre [8: I.76, cor. 2], et identifie Z_t au quotient de $K_1 \times \bar{D}_1$ par la relation d'équivalence définie par μ_1, cf. [8: I.74, cor., 4]. Tout revient donc à prouver la continuité de l'application $(k_1, z) \mapsto g \cdot k_1 \cdot z$ de $K_1 \times \bar{D}_1$ dans Z_t. Or on a $g \cdot k_1 \cdot z = g k_1 g^{-1} \cdot g \cdot z$; vu (5.4.4) il suffit de démontrer la continuité des applications $k_1 \mapsto g k_1 g^{-1}$ de K_1 dans K et $z \mapsto g \cdot z$ de $\bar{D}_1$ dans Z_t. La première est claire. Pour la seconde, on remarque que $\bar{D}_1$ est réunion finie des parties fermées $m_j \cdot \bar{D}$, et qu'il suffit donc de prouver que la restriction de $z \mapsto g \cdot z$ à une telle partie est continue; comme D est contenu dans un appartement, cela résulte de 5.4.6 combiné avec la dernière assertion de 5.3.

Ainsi, $\mathcal{T}$ est invariante par $G(k)$. Comme K est ouvert dans $G(k)$ et opère continûment sur Z_t (5.4.4), il en résulte que $G(k)$ opère continûment sur Z_t.

5.4.8. Vérification de (d). Soit $\tilde{\mathcal{T}}$ l'unique topologie sur Z satisfaisant aux conditions (a₁), (a₂), (a₃) relativement à l'action de $\tilde{G}(k)$. Du fait que $\tilde{G}(k) \to G(k)$ est continue, la topologie $\mathcal{T}$ satisfait aux conditions en question. On a donc $\mathcal{T} = \tilde{\mathcal{T}}$, ce qui prouve que $\mathcal{T}$ ne dépend que de $\tilde{G}$ (et pas du choix du groupe G "intermédiaire" entre $\tilde{G}$ et le groupe adjoint Ad $\tilde{G}$).

5.4.9. Vérification de (e). Si $\sigma \in (\mathrm{Aut}\, \tilde{G})(k)$, il résulte de (5.3) que $\sigma(\mathcal{T})$ satisfait aux conditions (a₁), (a₂), (a₃) relativement à l'action de $\tilde{G}(k)$. D'après (5.4.8), on a donc $\sigma(\mathcal{T}) = \mathcal{T}$, ce qui montre que $\mathcal{T}$ est invariante par $(\mathrm{Aut}\, \tilde{G})(k)$. D'autre part, le groupe $(\mathrm{Ad}\, \tilde{G})(k)$ est ouvert dans $(\mathrm{Aut}\, \tilde{G})(k)$ et opère continûment sur Z_t d'après (5.4.7) appliqué au groupe Ad $\tilde{G}$ (ce qui ne change pas $\mathcal{T}$, grâce à (5.4.8)). On en déduit que $(\mathrm{Aut}\, \tilde{G})(k)$ opère continûment sur Z_t, ce qui achève la démonstration de (5.4).

5.5. *Remarques.* (1) Si $l = 1$, X est un arbre, et la compactification Z_t de X définie ci-dessus n'est autre que celle donnée par la *théorie des bouts* de H. Freudenthal.

(2) La compactification Z_t est isomorphe à celle définie dans un cadre plus général par J. Tits (cours au Collège de France, 1974). Nous en résumons brièvement la construction, dans le cas envisagé ici:

Soit $\bar{A}$ la compactification naturelle de A (5.2.1). Choisissons une chambre C_0 de A. Si F appartient à l'ensemble $\mathscr{C}$ des chambres de X, notons $\varphi_F{}^0$ l'isomorphisme canonique de F sur C_0; les $\varphi_F{}^0$ commutent aux opérations de $\tilde{G}(k)$. Pour tout $F \in \mathscr{C}$, l'isomorphisme $\varphi_F{}^0$ se prolonge de façon unique en un morphisme polysimplicial $\varphi_F: X \to A$ qui, sur chaque appartement A' contenant F, est l'unique isomorphisme $A' \to A$ prolongeant $\varphi_F{}^0$. Les φ_F, $F \in \mathscr{C}$, définissent une application

$$\varphi: X \to V = \prod_{F \in \mathscr{C}} \bar{A},$$

où V est le produit topologique de copies de $\bar{A}$ indexées par $\mathscr{C}$. L'application φ est injective; l'espace V est compact; la compactification de X en question est, par définition, *l'adhérence* de $\varphi(X)$ dans V.

5.6. THÉORÈME. *Soient R un anneau et M un R-module. Soient X l'immeuble de Bruhat–Tits de $\tilde{G}(k)$ (4.2) et Y_t l'immeuble topologisé des k-sous-groupes paraboliques de G (1.3). Alors $H_c^i(X; M) = 0$ pour $i \neq l$ et $H_c^l(X; M)$ est canoniquement isomorphe, comme $G(k)$-R-module, à $H^{l-1}(Y_t; M)$ si $l \geqq 1$ et à M si $l = 0$. En particulier, $H_c^l(X; M)$ est un R-module libre si M l'est.*

Comme Z_t est contractile (5.4), la suite exacte de cohomologie de Z_t modulo Y_t définit, pour tout i, un isomorphisme $\tilde{H}^i(Y_t; M) \to H_c^{i+1}(X; M)$, qui commute évidemment à tout homéomorphisme de la paire (Z_t, Y_t). Le théorème résulte alors de 2.6 si $l \geq 1$; le cas $l = 0$ est trivial, X étant réduit à un point.

5.7. Extension aux groupes dont la composante neutre est réductive. Soit L un k-groupe dont la composante neutre L^0 est réductive. Nous allons associer à L un immeuble X, produit de l'immeuble X_0 du groupe dérivé $\mathcal{D}L^0$ de L^0 par un espace euclidien.

Soit $M = L/\mathcal{D}L^0$. La composante neutre M^0 de M est un tore. Par conséquent $M^0(k)$ possède un unique plus grand sous-groupe compact, soit Q. Posons $E = M(k)/Q$. On a une suite exacte

$$1 \to E' \to E \to E'' \to 1, \tag{1}$$

où $E' = M^0(k)/Q$ est commutatif libre, de rang égal au k-rang de M^0, i.e. à la dimension du plus grand k-sous-tore déployé de M^0, et où $E'' = M(k)/M^0(k)$ est fini. L'action de E'' sur E' se prolonge canoniquement à $E'_{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \otimes_{\mathbf{Z}} E'$, donc (1) se plonge dans une suite exacte de groupes

$$1 \to E'_{\mathbf{R}} \to E_{\mathbf{R}} \to E'' \to 1, \tag{2}$$

qui est en fait une suite exacte de groupes de Lie réels, et est scindée puisque $H^2(E''; E'_{\mathbf{R}}) = 0$. Choisissons un *scindage* de (2), i.e. un sous-groupe fini Ψ de $E_{\mathbf{R}}$ tel que $E_{\mathbf{R}}$ soit produit semi-direct de Ψ par $E'_{\mathbf{R}}$. Faisons opérer Ψ (resp. $E'_{\mathbf{R}}$) sur l'espace euclidien $X_1 = E'_{\mathbf{R}}$ par l'action donnée par l'isomorphisme naturel $\Psi \simeq E''$ (resp. par translations); ces opérations définissent une opération de $E_{\mathbf{R}} = \Psi \cdot E'_{\mathbf{R}}$, et les homomorphismes naturels $L(k) \to M(k) \to E \to E_{\mathbf{R}}$ permettent de faire opérer $L(k)$ sur X_1 (l'image de $L(k)$ dans $\mathrm{Aut}(X_1)$ étant un "groupe de Bieberbach").

D'autre part, $L(k)$ opère naturellement sur l'immeuble X_0 de $\mathcal{D}L^0$.

L'immeuble X de L sur k est alors, par définition, le produit $X = X_0 \times X_1$, muni de l'action produit de $L(k)$. Soit Z la composante neutre du centre de L^0. Alors $L^0 = Z \cdot \mathcal{D}L^0$ et la restriction à Z de $L^0 \to L^0/\mathcal{D}L^0$ est une isogénie centrale. Il résulte alors de [7: §2] que $rg_k L^0 = rg_k Z + rg_k \mathcal{D}L^0$, et $rg_k Z = rg_k M^0$, par suite $\dim X = rg_k L^0$.

5.8. *Remarque.* L'espace X_1 admet une triangulation différentiable stable par $M(k)$, donc par $L(k)$. En effet, E opère différentiablement sur X_1, et E' est un groupe de translations, donc X_1/E' est une variété différentielle (un produit de cercles) sur laquelle E/E' opère différentiablement. Comme E/E' est fini, il résulte de [19] que $X/E = (X/E')/(E/E')$ est triangulable, d'où notre assertion.

Le produit d'une telle structure et de la structure polysimpliciale canonique de X_1 définit donc une structure polysimpliciale sur X qui est invariante par $L(k)$. Il est clair que les stabilisateurs des faces sont des sous-groupes compacts ouverts et que $X/L(k)$ admet une structure de complexe cellulaire fini.

Si L est connexe, toute base du groupe des k-caractères de $L/\mathcal{D}L$ définit de manière évidente une structure polysimpliciale sur X_1 invariante par $L(k)$, d'où, par produit, une structure polysimpliciale sur X invariante par $L(k)$; c'est celle définie dans [17: §2].

5.9. THÉORÈME. *Soient L un k-groupe dont la composante neutre L^0 est réductive, et X l'immeuble de L sur k défini en 5.7. Alors $H_c^i(X; \mathbf{Z})$ est nul si $i \neq rg_k L^0$ et libre si $i = rg_k L^0$.*

C'est clair si L^0 est un tore puisque X est alors un espace euclidien de dimension $rg_k L^0$, et cela résulte de 5.6 si L^0 est semi-simple. Le cas général s'en déduit par la formule de Künneth $H_c^l(X; \mathbf{Z}) \simeq H_c^u(X_1; \mathbf{Z}) \otimes H_c^v(X_0; \mathbf{Z})$, où $u = rg_k Z$, $v = rg_k \mathcal{D}L^0$, $l = u + v = rg_k L^0$. On a en outre $H_c^u(X_1; \mathbf{Z}) \simeq \Lambda^u \boldsymbol{X}(L^0)$, où $\boldsymbol{X}(L^0) = \mathrm{Hom}_k(L^0, \mathbf{G}_m)$. Ces isomorphismes sont compatibles avec l'action de $L(k)$.

5.10. La représentation spéciale. Nous terminons ce paragraphe en décrivant, sans démonstration, une interprétation du $G(k)$-module $E = H_c^l(X; \mathbf{C}) \cong \tilde{H}^{l-1}(Y_t; \mathbf{C})$.

Avec les hypothèses et notations des §§2, 3, supposons que M soit un corps de caractéristique zéro. Notons $\sigma_I (I \subset S)$ la représentation de $G(k)$ dans $C^\infty(G(k)/P_I(k); M)$ définie par translations à gauche, et St la représentation de $G(k)$ dans $\tilde{H}^{l-1}(Y_t; M)$. On voit facilement que σ_I est *admissible*, au sens de Jacquet–Langlands. Vu 2.6 et 3.3, il en est de même de St, qui est quotient de $\sigma_\emptyset$, et l'on a l'égalité

$$[St] = \sum_{I \subset S} (-1)^{\mathrm{Card}\, I} [\sigma_I] \tag{1}$$

dans le groupe de Grothendieck des représentations admissibles de $G(k)$. Ainsi, St est l'analogue de la *représentation de Steinberg* des groupes de Chevalley finis.

Supposons maintenant que $M = \mathbf{C}$. Il y a un homomorphisme canonique ν de $H_c^l(X; \mathbf{C})$ dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ des formes harmoniques sur X (au sens simplicial) de dimension l qui sont de carré intégrable (pour la norme $\|f\|^2 = \Sigma |f(C)|^2$, où C parcourt l'ensemble des chambres de X). L'espace $\mathcal{H}$ est un $G(k)$-module unitaire, qui fournit une réalisation de la *représentation spéciale* de $G(k)$ définie par H. Matsumoto[16] et J. Shalika[18]. On peut montrer que ν est injectif et applique E sur l'espace des vecteurs "différentiables" de $\mathcal{H}$[3]. En particulier, la représentation St de $G(k)$ est irréductible (algébriquement) et préunitaire. Une autre démonstration de ces résultats a été obtenue par W. Casselman[12; 13].

§6. Applications à la cohomologie de certains groupes discrets

6.1. Hypothèses et notations. Soit $L = \Pi_{v \in S} L_v$ un produit fini de groupes localement compacts L_v. On suppose que chacun des L_v est de l'un des deux types suivants [17: 2.3]:

(i) un groupe de Lie réel ayant un nombre fini de composantes connexes;

(ii) le groupe $M_v(F_v)$ des F_v-points d'un groupe algébrique M_v, de composante neutre réductive, sur un corps local non archimédien F_v.

Soit S_∞ (resp. S_f) l'ensemble des $v \in S$ pour lesquels L_v est de type (i) (resp. (ii)). On note $d(L_v)$ la dimension du quotient de L_v par un sous-groupe compact maximal si $v \in S_\infty$, et le rang sur F_v de M_v si $v \in S_f$; on pose

$$d(L) = \sum_{v \in S} d(L_v).$$

On considère d'autre part un sous-groupe discret Γ de L. On se place dans l'un des deux cas suivants:

(a) "cas cocompact": le quotient L/Γ est compact;

(b) "cas S-arithmétique": l'ensemble S est un ensemble fini de places d'un corps de nombres F et S_∞ celui des places archimédiennes de F; pour tout $v \in S$, le corps F_v est le complété de F en v et il existe un F-groupe G, de composante neutre réductive, tel que $L_v = G(F_v)$; en particulier, si $v \in S_f$, le groupe M_v de (ii) est le groupe obtenu par extension du corps de base à partir de G. Enfin, Γ est un sous-groupe S-arithmétique de $G(F)$, plongé dans L de façon "diagonale" [17: 2.4].

6.2. THÉORÈME. *On conserve les hypothèses et notations de* 6.1.

(i) *Le groupe Γ est de présentation finie. Ses sous-groupes d'ordre fini forment un nombre fini de classes de conjugaison.*

Supposons Γ sans torsion. Alors:

(ii) *Γ est de type (FL)* [17: §1].

(iii) *Γ est un groupe à dualité, au sens de* [2].

(iv) *La dimension cohomologique $cd(\Gamma)$ de Γ est égale à $d(L)$ dans le cas cocompact et à $d(L) - rg_F G$ dans le cas S-arithmétique.*

Compte tenu de (i), (ii), l'assertion (iii) équivaut à l'existence d'un entier d tel que

$$H^i(\Gamma; \mathbf{Z}[\Gamma]) = 0 \quad (i \neq d), \qquad H^d(\Gamma; \mathbf{Z}[\Gamma]) = I \text{ est libre, cf. [2].} \tag{1}$$

Elle entraîne que, si e est la "classe fondamentale" de $H_d(\Gamma; I)$, le cap-produit par e définit, pour tout Γ-module M et tout entier q, un isomorphisme

$$H^q(\Gamma; M) \xrightarrow{\sim} H_{d-q}(\Gamma; I \otimes M); \tag{2}$$

en particulier, on a $d = cd(\Gamma)$. Une fois (iii) établie, l'assertion (iv) revient donc à dire que l'entier d intervenant dans (1) est égal à $d(L)$ ou à $d(L) - rg_F G$ suivant que l'on est dans le cas cocompact ou dans le cas S-arithmétique.

La démonstration de 6.2 sera donnée en 6.6 et 6.11.

6.3. *Remarques.* (1) On peut se demander dans quel cas Γ est un groupe à dualité "de Poincaré," i.e. I est isomorphe à $\mathbf{Z}$. La description de I donnée plus loin (6.6(2), 6.11(2)) montre que cela se produit: dans le cas cocompact si et seulement si le F_v-rang de $\mathscr{D}M_v{}^0$ est nul pour tout $v \in S_f$, dans le cas S-arithmétique si et seulement si $rg_F(\mathscr{D}G^0) = 0$ et $rg_{F_v}(\mathscr{D}G^0) = 0$ pour tout $v \in S_f$; sinon I est de rang infini. De plus, l'action naturelle de Γ sur I se prolonge en une action de $G(F)$ dans le cas S-arithmétique et de L dans le cas cocompact.

(2) L'hypothèse "Γ sans torsion" est peu gênante. En effet, si elle n'est pas satisfaite, mais si Γ est *séparé* pour la topologie des sous-groupes d'indice fini, alors, vu 6.2(i), Γ contient un sous-groupe d'indice fini sans torsion, auquel on peut appliquer le théorème. On a alors

$$vcd(\Gamma) = d(L) \qquad (\text{resp. } vcd(\Gamma) = d(L) - rg_F G), \tag{1}$$

dans le cas cocompact (resp. S-arithmétique), et aussi [5: 11.4.4]

$$H^i(\Gamma; \mathbf{Z}(\Gamma)) = 0 \quad (i \neq d), \qquad H^d(\Gamma; \mathbf{Z}(\Gamma)) = I, \tag{2}$$

avec $d = d(L)$ dans le cas cocompact, $d = d(L) - rg_F G$ dans le cas S-arithmétique, et I comme dans 6.2. L'hypothèse de séparation est notamment satisfaite lorsque Γ est plongeable dans un groupe linéaire, ce qui est en particulier vrai dans le cas S-arithmétique. Les relations (1), (2), avec I donné comme précédemment par 6.6(2), 6.11(2), sont donc valables si Γ est S-arithmétique. Par exemple, si $p_1, \ldots, p_n$ sont des nombres premiers distincts, on a

$$\begin{aligned} vcd(\mathbf{SL}_3(\mathbf{Z}[1/p_1, \ldots, 1/p_n]) &= 3 + 2n, \\ vcd(\mathbf{Sp}_4(\mathbf{Z}[1/p_1, \ldots, 1/p_n]) &= 4 + 2n, \text{ etc.} \end{aligned} \tag{3}$$

(3) Le théorème 6.2 fournit une condition nécessaire pour qu'un groupe discret Δ soit isomorphe à un sous-groupe S-arithmétique d'un groupe à composante neutre réductive: il faut que tous les groupes $H^i(\Delta; \mathbf{Z}[\Delta])$ soient nuls, à l'exception d'un seul, et que ce dernier soit libre.

(4) Le cas S-arithmétique est cocompact si et seulement si le F-rang de G est nul. Il existe bien entendu des cas cocompacts, avec des corps F_v de caractéristique zéro, qui ne sont pas S-arithmétiques. Cependant, les résultats annoncés récemment par A. G. Margulis [15] montrent qu'en fait on est à peu de chose près dans le cas S-arithmétique si les groupes L_v sont semi-simples, sans facteurs anisotropes, si la somme de leurs rangs relatifs est $\geqslant 2$, et si Γ est irréductible.

6.4. LEMME. *Soit X un espace localement compact sur lequel un groupe discret Γ opère proprement et librement. On suppose que X/Γ est compact et que $H^0(X; \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}$ et $H^i(X; \mathbf{Z}) = 0$ pour $i \geqq 1$. Alors les groupes de cohomologie $H^q(\Gamma; \mathbf{Z}[\Gamma])$ s'identifient aux groupes de cohomologie à supports compacts $H_c{}^q(X; \mathbf{Z})$ $(q \geqq 0)$.*

Démonstration.[3] La projection canonique $\pi: X \to X/\Gamma$ est un revêtement, donc la suite spectrale de Leray de π dégénère en un isomorphisme

$$H_c{}^q(X; \mathbf{Z}) \cong H^q(X/\Gamma; M), \qquad (q \geqq 0),$$

où M est le faisceau localement constant sur X/Γ formé par les 0-ièmes groupes de cohomologie à supports compacts des fibres de π. On vérifie tout de suite que M est associé au Γ-module $\mathbf{Z}[\Gamma]$. Vu nos hypothèses, la cohomologie de X/Γ s'identifie à celle de Γ, d'où le lemme.

6.5. LEMME. *Soit X un espace localement compact sur lequel un groupe discret Γ opère proprement. On suppose que tout sous-groupe fini de Γ admet un point fixe dans X et que X/Γ est compact. Alors les sous-groupes d'ordre fini de Γ forment un nombre fini de classes de conjugaison.*

Soit C un sous-ensemble compact de X tel que $X = \Gamma \cdot C$. L'ensemble Γ_C des $\gamma \in \Gamma$ tels que $\gamma \cdot C \cap C \neq \emptyset$ est fini. Soit M un sous-groupe fini de Γ. Par hypothèse il existe un point $x \in X$ fixe par M. Si $\gamma \in \Gamma$ est tel que $\gamma \cdot x \in C$, alors $\gamma \cdot M \cdot \gamma^{-1} \subset \Gamma_C$, d'où le lemme.

6.6. Démonstration de 6.2 dans le cas cocompact. Pour $v \in S$, notons X_v le quotient de L_v par un sous-groupe compact maximal si $v \in S_\infty$, et l'immeuble de M_v sur F_v (5.7) si $v \in S_f$. Soit X (resp. X_∞, resp. X_f) le produit des X_v pour $v \in S$ (resp. $v \in S_\infty$, resp. $v \in S_f$).

[3]Cette démonstration a été suggérée à l'un de nous par B. Eckmann.

Il est immédiat que L, donc aussi Γ, opère continûment et proprement sur X, et que X/Γ est compact. Comme X est localement et globalement contractile, cela entraîne que Γ est de présentation finie [1: Satz 2]. D'autre part, tout sous-groupe compact de L_v laisse fixe un point de X_v: si $v \in S_\infty$, cela résulte du fait que tout sous-groupe compact de L_v est contenu dans un sous-groupe compact maximal et que les sous-groupes compacts maximaux de L_v sont conjugués; si $v \in S_f$, vu la définition de X_v (5.7), cela résulte de [11: 3.2.4] et du fait que tout groupe compact de transformations affines d'un espace euclidien admet un point fixe $\mathscr{H}$ s'ensuit que tout sous-groupe fini de Γ laisse fixe un point de X, et la deuxième assertion de 6.2(i) résulte donc de 6.5.

Supposons maintenant Γ sans torsion. C'est alors le groupe fondamental de X/Γ. Si $S = S_\infty$, alors X/Γ est une variété différentielle compacte, donc Γ est de type (FL). Sinon, en utilisant la remarque 5.8, on montre par récurrence sur Card S_f, exactement comme dans [17: Théor. 3, p. 121] que Γ est de type (FL).

Pour tout $v \in S$, le groupe $H_c^i(X_v; \mathbf{Z})$ est libre si $i = d(L_v)$, nul sinon; c'est clair si $v \in S_\infty$, puisqu'alors X_v est homéomorphe à un espace euclidien de dimension $d(L_v)$, et cela résulte de 5.9 si $v \in S_f$. La formule de Künneth entraîne donc que

$$H_c^i(X; \mathbf{Z}) = 0 \qquad \text{si} \qquad i \neq d(L), \tag{1}$$

et que

$$I = H_c^{d(L)}(X; \mathbf{Z}) \cong \otimes_{v \in S} H_c^{d(L_v)}(X_v; \mathbf{Z}) \tag{2}$$

est un $\mathbf{Z}$-module libre. D'autre part, comme X est globalement et localement contractile, $H^i(X; \mathbf{Z})$ est égal à $\mathbf{Z}$ pour $i = 0$, et à 0 pour $i \neq 0$. Vu 6.4 et (1), (2), Γ satisfait à 6.2(1) pour $d = d(L)$, ce qui entraîne (iii) et (iv) de 6.2 dans le cas cocompact.

6.7. *Remarque.* En utilisant [14], on peut montrer que X/Γ est triangulable si Γ est sans torsion (d'où une autre démonstration de 6.2(i), (ii)). Nous indiquons ici comment on se ramène aux hypothèses de [14]. Soit L_∞ (resp. L_f) le produit des L_v pour $v \in S_\infty$ (resp. $v \in S_f$). On fait opérer L sur X_f via la projection $L \to L_f$. Vu 5.8, X_f admet une structure polysimpliciale $\mathscr{S}$ stable par L_f, donc par L. Quitte à remplacer $\mathscr{S}$ par une subdivision suffisamment fine, on peut faire en sorte que $\mathscr{S}$ soit simpliciale, passe au quotient par L, donc par Γ, et que le fixateur L_σ dans L d'un simplexe quelconque σ de $\mathscr{S}$ soit égal au stabilisateur de σ dans L. De plus, $L_\sigma = L_\infty \times L_{f,\sigma}$, où $L_{f,\sigma} = L_f \cap L_\sigma$ est compact ouvert dans L_f. Les orbites de L_σ dans L/Γ sont ouvertes, donc fermées, donc compactes. En particulier $L_\sigma/(L_\sigma \cap \Gamma)$ est compact. Par suite, la projection de $\Gamma_\sigma = L_\sigma \cap \Gamma$ dans L_∞ est un sous-groupe discret, sans torsion, cocompact, et X_∞/Γ_σ est une variété différentielle compacte. Si τ est une face de σ, alors Γ_σ est d'indice fini dans Γ_τ, d'où une projection naturelle $X_\infty/\Gamma_\sigma \to X_\infty/\Gamma_\tau$ qui est un revêtement fini. Soit $\pi_f: X/\Gamma \to X_f/\Gamma$ la projection canonique. Si σ est un simplexe de X_f, alors X_∞/Γ_σ s'identifie à la fibre de π_f sur un point intérieur de l'image de σ dans X_f/Γ. Par suite, X/Γ est un ensemble "compact stratifié" [14: Théor. 4.1] donc triangulable [14: Théor. 3.2].

Il est vraisemblable que X/Γ est triangulable même si Γ a de la torsion, mais nous n'en connaissons pas de démonstration.

6.8. Lemme. *Soient Y, Z des espaces localement compacts et Γ un groupe discret opérant continûment sur Y et Z. On fait opérer Γ sur $Y \times Z$ par l'action produit. On suppose*:

(i) *Z est un complexe simplicial localement fini. L'action de Γ sur Z est simpliciale. Si σ est une face de Z, le stabilisateur Γ_σ de σ dans Γ opère proprement sur Y.*

Alors Γ opère proprement sur $Y \times Z$.

Si de plus:

(ii) *les faces de Z sont en nombre fini modulo Γ, et Y/Γ_σ est compact quelle que soit la face σ de Z.*

Alors $(Y \times Z)/\Gamma$ est compact.

Soit $\mathscr{C}$ l'ensemble des faces de Z. Si $\sigma \in \mathscr{C}$, notons b_σ le barycentre de σ, et $V(\sigma)$ l'étoile ouverte de b_σ dans la subdivision barycentrique de Z. Les $V(\sigma)$ $(\sigma \in \mathscr{C})$ forment un recouvrement ouvert de l'espace Z. On a $\gamma \cdot V(\sigma) = V(\gamma \cdot \sigma)$ pour tout $\gamma \in \Gamma$. De plus:

(1) $V(\sigma) \cap V(\tau) = \emptyset$ si $\sigma, \tau \in \mathscr{C}$, $\dim \sigma = \dim \tau$, et $\sigma \neq \tau$,

d'où

(2) $\gamma \cdot V(\sigma) \cap V(\sigma) \neq \emptyset \Rightarrow \gamma \in \Gamma_\sigma$ si $\gamma \in \Gamma$ et $\sigma \in \mathscr{C}$.

Soient $y \in Y$, $z \in Z$, et soit $\sigma \in \mathscr{C}$ tel que $z \in V(\sigma)$. Vu (i), il existe un voisinage U de y dans Y qui ne rencontre qu'un nombre fini de ses transformés par $\Gamma\sigma$. Vu (2), $U \times V(\sigma)$ est un voisinage de (y, z) dans $Y \times Z$ qui ne rencontre qu'un nombre fini de ses transformés par Γ. Il en résulte que Γ opère proprement sur $Y \times Z$.

Supposons maintenant que (ii) soit aussi satisfaite. Pour $\sigma \in \mathscr{C}$, soit K_σ un compact de Y tel que $Y = \Gamma_\sigma \cdot K_\sigma$. Si J est un système de représentants de $\mathscr{C}/\Gamma$, alors

$$Y \times Z = \cup_{\sigma \in J} \Gamma \cdot (K_\sigma \times \sigma).$$

En effet, si $y \in Y$, $z \in Z$, il existe $\gamma \in \Gamma$, $\sigma \in J$ et $\gamma' \in \Gamma_\sigma$ tels que $\gamma \cdot z \in \sigma$ et $\gamma' \cdot \gamma \cdot y \in K_\sigma$ d'où $\gamma' \cdot \gamma(y, z) \in (K_\sigma \times \sigma)$. Comme J est fini par hypothèse, et que $(Y \times Z)/\Gamma$ est séparé puisque Γ opère proprement [8: III.29, Prop. 3], cela termine la démonstration du lemme.

6.9. Nous nous plaçons maintenant dans le cas S-arithmétique (6.1). Si $v \in S_f$ on note X_v l'immeuble de G sur F_v. Soit d'autre part G' le $\mathbf{Q}$-groupe algébrique obtenu à partir de G par restriction des scalaires de F à $\mathbf{Q}$ et soit $\bar{X}_\infty$ la variété à coins associée à G' dans [5]. On pose

$$X_f = \Pi_{v \in S_f} X_v, \qquad \bar{X}_S = \bar{X}_\infty \times X_f. \tag{1}$$

Le groupe $G(F) \cong G'(\mathbf{Q})$ opère sur $\bar{X}_S$. Il en est *a fortiori* de même du groupe S-arithmétique Γ.

Montrons que

$$\dim \bar{X}_\infty - rg_{\mathbf{Q}}(\mathscr{D}(G'^0)) = \sum_{v \in S_\infty} d(G(F_v)) - rg_F(G). \tag{2}$$

Soient

$$a = rg_F(C(G^0)), \qquad b = rg_F(\mathscr{D}(G^0)). \tag{3}$$

On a donc $rg_F(G) = a + b$ vu [7: §2]. D'autre part, le rang relatif se conserve par restriction des scalaires, donc

$$a = rg_{\mathbf{Q}}(C(G'^0)), \qquad b = rg_{\mathbf{Q}}(\mathscr{D}(G'^0)) \quad \text{et} \quad a + b = rg_{\mathbf{Q}}(G'). \tag{4}$$

Si K est un sous-groupe compact maximal de $G'(\mathbf{R})$, on a, par construction de $\bar{X}_\infty$,

$$\dim \bar{X}_\infty = \dim (G'(\mathbf{R})/K) - a, \quad \text{cf. [5: §7].} \tag{5}$$

Mais $G'(\mathbf{R})/K$ est le produit direct des quotients $G(F_v)/K_v$, où K_v est un sous-groupe compact maximal de $G(F_v)$, et v parcourt S_∞; d'où (2). On a donc aussi

$$d(L) - rg_F(G) = d(L_\infty) + \Sigma_{v \in S_f} d(L_v), \quad \text{avec} \quad d(L_\infty) = \dim \bar{X}_\infty - rg_{\mathbf{Q}}(\mathscr{D}G'^0). \tag{6}$$

6.10. Proposition. *Conservons les hypothèses et notations de* 6.9. *Le groupe* Γ *opère proprement sur* $\bar{X}_S$ *et le quotient* $\bar{X}_S/\Gamma$ *est compact.*

Si $S_f = \emptyset$, cela résulte de [5: 9.3]. Dans le cas général on raisonne par récurrence sur Card S_f. Soient $v \in S_f$ et posons $T_f = S_f - \{v\}$, $T = S - \{v\}$. Si M est un sous-groupe ouvert compact de $G(F_v)$, soit Γ_M l'ensemble des éléments de Γ se projetant dans M. C'est un sous-groupe T-arithmétique de G et l'on sait que $\Gamma\backslash G(F_v)/M$ est fini [17: p. 126]. Vu l'hypothèse de récurrence, Γ_M opère proprement sur $\bar{X}_T$ et $\bar{X}_T/\Gamma_M$ est compact. Notre assertion résulte alors de 6.8, appliqué à Γ et à $Y = \bar{X}_\infty \times (\Pi_{w \in T_f} X_w)$, $Z = X_v$.

Remarque. Supposons Γ sans torsion. Il résulte aussi de [14] que $\bar{X}_S/\Gamma$ est triangulable. Cela se voit comme en 6.7, en remplaçant X par $\bar{X}_S$ et X_∞ par $\bar{X}_\infty$. La seule différence est que le quotient $\bar{X}_\infty/\Gamma_\sigma$ est maintenant une variété différentielle compacte *à coins*, mais cela est permis dans [14]. Ici encore, il est vraisemblable que $\bar{X}_S/\Gamma$ est triangulable même lorsque Γ a de la torsion.

6.11. Démonstration de 6.2 dans le cas S-arithmétique. Comme on va le voir, cette démonstration est tout à fait analogue à celle donnée dans le cas cocompact, $\bar{X}_S$ et $\bar{X}_\infty$ jouant les rôles de X et X_∞ respectivement.

Les espaces $\bar{X}_\infty$ et X_v ($v \in S_f$) sont globalement et localement contractiles. Il en est donc de même de $\bar{X}_S$ et il résulte alors de 6.10 et de [1: Satz 2] que Γ est de présentation finie.

L'espace $\bar{X}_\infty$ de 6.9 est obtenu en ajoutant des coins au quotient X_∞ de $G'(\mathbf{R})$ par un sous-groupe H contenant un sous-groupe compact maximal de $G'(\mathbf{R})$, donc tout sous-groupe compact de $G'(\mathbf{R})$ admet un point fixe dans X_∞; en particulier tout sous-groupe fini de $G'(\mathbf{Q})$

admet un point fixe dans X_∞, et *a fortiori* dans $\bar{X}_\infty$. D'autre part (cf. 6.6), tout sous-groupe compact de $G(F_v)$ admet un point fixe dans X_v si $v \in S_f$. Il s'ensuit que tout sous-groupe fini de Γ (ou de $G(F)$), admet un point fixe dans $\bar{X}_S$, et la deuxième partie de 6.2(i) est conséquence de 6.5, 6.10.

Supposons maintenant Γ sans torsion. Si $S_f = \emptyset$, on a $S = S_\infty$ et $\bar{X}_S/\Gamma = \bar{X}_\infty/\Gamma$ est une variété différentielle compacte à coins, donc triangulable, ce qui entraîne que Γ est de type (FL); si $S_f \neq \emptyset$, on peut, soit raisonner par récurrence sur Card S_f, soit utiliser le fait que $\bar{X}_S/\Gamma$ est triangulable (Remarque à 6.10).

La variété $\bar{X}_\infty$ est contractile [5: 8.6.4], le groupe $H_c^i(\bar{X}_\infty; \mathbf{Z})$ est libre si $i = d(L_\infty)$ (notation de 6.9(6)), nul sinon [5: 8.6.5]. Comme précédemment $H_c^i(X_v; \mathbf{Z})$ est nul pour $i \neq d(G(F_v))$ et libre pour $i = d(G(F_v))$ si $v \in S_f$. La formule de Künneth et 6.9(6) montrent donc que

$$H_c^i(\bar{X}_S; \mathbf{Z}) = 0 \quad \text{si} \quad i \neq d(L) - l, \quad \text{où} \quad l = rg_F G, \tag{1}$$

et que

$$I = H_c^{d(L)-l}(\bar{X}_S; \mathbf{Z}) = H_c^{d(L_\infty)}(\bar{X}_\infty; \mathbf{Z}) \otimes \otimes_{v \in S_f} H_c^{d(L_v)}(X_v; \mathbf{Z}) \tag{2}$$

est un $\mathbf{Z}$-module libre. Comme $\bar{X}_S$ est localement et globalement contractile, $H^i(\bar{X}_S; \mathbf{Z})$ est nul pour $i \neq 0$, égal à $\mathbf{Z}$ pour $i = 0$; le lemme 6.4 et (1), (2) entraînent donc que Γ satisfait à 6.1(1), avec $d = d(L) - l$ (et I donné par (2)), d'où le théorème.

RÉFÉRENCES

1. H. BEHR: Ueber die endliche Definierbarkeit von Gruppen, *Jour. f. reine u. ang. Math.* **211** (1962), 116–122.
2. R. BIERI and B. ECKMANN: Groups with homological duality generalizing Poincaré duality, *Inv. Math.* **20** (1973), 103–124.
3. A. BOREL: Admissible representations of a reductive p-adic group having vectors fixed under an Iwahori subgroup, (to appear in *Inv. Math.*).
4. A. BOREL et J.-P. SERRE: Cohomologie à supports compacts des immeubles de Bruhat-Tits; application à la cohomologie des groupes S-arithmétiques, *C.R. Acad. Sci., Paris* **272** (1971), 110–113.
5. A. BOREL and J.-P. SERRE: Corners and arithmetic groups, *Comm. Math. Helv.* **48** (1974), 244–297.
6. A. BOREL et J. TITS: Groupes réductifs, *Publ. Math. I.H.E.S.* **27** (1965), 55–150.
7. A. BOREL et J. TITS: Compléments à l'article: "*Groupes réductifs*", *Ibid.* **41** (1972), 253–276.
8. N. BOURBAKI: Topologie générale, Chapitres 1 à 4, Hermann, Paris (1971).
9. N. BOURBAKI: Groupes et algèbres de Lie, Chapitres IV, V, VI, Act. Sci. Ind. 1337, Hermann, Paris (1968).
10. F. BRUHAT et J. TITS: Groupes algébriques simples sur un corps local, *C.R. Acad. Sci., Pans* **263** (1966), 822–825.
11. F. BRUHAT et J. TITS: Groupes réductifs sur un corps local, Chap. I, *Publ. math. I.H.E.S.* **41** (1972), 1–251.
12. W. CASSELMAN: The Steinberg character as a true character, *Harmonic analysis on homogeneous spaces, Proc. Symp. Pur. math. A.M.S.* **XXVI**, (1973), 413–417.
13. W. CASSELMAN: Introduction to the theory of admissible representations of p-adic reductive groups, to appear.
14. F. E. A. JOHNSON: On the triangulation of stratified sets and singular varieties (to appear).
15. A. G. MARGULIS: Discrete groups of motions of manifolds of non-positive curvature, *Proc. Intern. Congr. Math.* Vancouver (1974), Vol. II, 21–34.
16. H. MATSUMOTO: Fonctions sphériques sur un groupe semi-simple p-adique, *C.R. Acad. Sci., Paris* **269** (1969), 829–832.
17. J.-P. SERRE: Cohomologie des groupes discrets, *Prospects in Mathematics, Ann. Math. Stud.* **70**, Princeton U. Press (1971), 77–169.
18. J. SHALIKA: On the space of cusp forms of a p-adic Chevalley group, *Ann. Math.* **92**(2) (1970), 262–278.
19. C. T. YANG: The triangulability of the orbit space of a differentiable transformation group, *Bull. Am. Math. Soc.* **69** (1963), 405–408.

The Institute for Advanced Study, Princeton, N.J. 08540 *U.S.A.*
Collège de France, 75231 *Paris Cedex* 05, *France*