Le groupe quaquaversal, vu comme groupe S-arithmétique

Jean-Pierre Serre

1. Les groupes $G(m,n)$

Les pavages non périodiques de $\mathbf{R}^3$ décrits dans [1] et [2] font intervenir certains groupes de rotations, notés $G(m,n)$. Rappelons comment sont définis ces groupes. On se donne deux entiers $m,n \geqslant 3$ et l'on note x_m une rotation de $\mathbf{R}^3$ d'angle $2\pi/m$ autour d'un axe D_x; on note de même y_n une rotation de $2\pi/n$ autour d'un axe D_y perpendiculaire à D_x. Le groupe $G(m,n)$ est défini comme le sous-groupe $\langle x_m, y_n\rangle$ de $\mathbf{SO}_3(\mathbf{R})$ engendré par x_m et y_n. A part le cas $m = n = 4$ où $G(m,n)$ est isomorphe au groupe symétrique S_4, ces groupes sont infinis, et l'on peut les décrire comme des amalgames de deux groupes finis (cf. [3] , [4]); ils possèdent des sous-groupes libres d'indice fini. Ainsi, par exemple, le groupe $G(6,4)$, qui correspond au pavage "quaquaversal" de Conway-Radin [1], est isomorphe à l'amalgame $D_6 *_{D_2} D_4$, où D_i désigne un groupe diédral d'ordre $2i$.

2. S-arithméticité des groupes $G(m,n)$

On peut se demander si certains groupes $G(m,n)$ sont des sous-groupes arithmétiques (ou plutôt S-arithmétiques) du groupe algébrique $\mathbf{SO}_3$. Cette question a été posée par G.R.Robinson [5] à propos des groupes $G(4,2^n), n > 2$. On va voir que l'on peut y répondre, à la fois pour les $G(4,2^n)$, et pour le groupe quaquaversal $G(6,4)$.

Ce dernier cas est celui qui s'énonce le plus simplement. Si l'on choisit bien les coordonnées dans $\mathbf{R}^3$, on constate que $G(6,4)$ est contenu dans le groupe $\mathbf{SO}_{3,q}(\mathbf{Z}[\frac{1}{2}])$, où $\mathbf{SO}_{3,q}$ désigne le groupe spécial orthogonal de la forme quadratique $q(x,y,z) = x^2 + 3y^2 + 3z^2$.

Théorème 1. *L'inclusion $G(6,4) \to \mathbf{SO}_{3,q}(\mathbf{Z}[\frac{1}{2}])$ est une égalité.*

En particulier, $G(6,4)$ est un sous-groupe S-arithmétique de $\mathbf{SO}_{3,q}$, où $S = \{2\}$.

Le cas de $G(4,2^n), n \geqslant 3$, est différent. Tout d'abord, on doit remplacer $\mathbf{Q}$ par le corps $K_n = \mathbf{Q}(w_{2^n} + w_{2^n}^{-1})$, où w_{2^n} désigne une racine primitive 2^n-ième de l'unité (c'est le plus grand sous-corps réel du corps cyclotomique $\mathbf{Q}(w_{2^n})$). On a par exemple $K_3 = \mathbf{Q}(\sqrt{2}), K_4 = \mathbf{Q}(\sqrt{2+\sqrt{2}})$, etc. Soit $A_n = \mathbf{Z}[w_{2^n} + w_{2^n}^{-1}]$ l'anneau des entiers de K_n. Le groupe $G(4,2^n)$ se plonge de façon naturelle dans le groupe $\mathbf{SO}_3(A_n[\frac{1}{2}])$ relatif à la forme quadratique standard $x^2 + y^2 + z^2$.

Théorème 2. a) *Si $n = 3$ ou 4, l'inclusion $G(4,2^n) \to \mathbf{SO}_3(A_n[\frac{1}{2}])$ est une égalité.*

b) *Si $n \geqslant 5$, $G(4,2^n)$ est un sous-groupe d'indice infini de $\mathbf{SO}_3(A_n[\frac{1}{2}])$.*

3. Indications sur les démonstrations

Pour le th.1, on utilise l'action du groupe $\Gamma = \mathbf{SO}_{3,q}(\mathbf{Z}[\frac{1}{2}])$ sur l'arbre de Bruhat-Tits X du groupe $\mathbf{SO}_{3,q}$ relativement au corps local $\mathbf{Q}_2$, cf. [7], chap.II, §1 (noter que $\mathbf{SO}_{3,q}$ est isomorphe à $\mathbf{PGL}_2$ sur $\mathbf{Q}_2$). L'action de Γ sur X a pour domaine fondamental une demi-arête $P-P'$, le fixateur de P (resp. P', resp. $P-P'$) étant D_6 (resp. D_4, resp. D_2); cela montre (cf. [7], chap.I, §4.1) que $\Gamma = D_6 *_{D_2} D_4$; comme D_6 et D_4 sont contenus dans $G(6,4)$, on en déduit que $\Gamma = G(6,4)$.

La démonstration du th.2.a) est analogue à celle du th.1.

Pour le th.2.b), on utilise les caractéristiques d'Euler-Poincaré ([6],§1) des deux groupes $G(4,2^n)$ et $\Gamma_n = \mathbf{SO}_3(A_n[\frac{1}{2}])$. On a:

$\chi(G(4,2^n)) = -1/12 + 1/2^{n+1}$,

et

$\chi(\Gamma_n) = -2^{-2^{n-2}}\zeta_{K_n}(-1) = -\operatorname{disc}(K_n)^{3/2}(2\pi)^{-2^{n-1}}\zeta_{K_n}(2)$,

où ζ_{K_n} désigne la fonction zêta du corps K_n, et $\operatorname{disc}(K_n)$ est le discriminant de K_n.

La première égalité se déduit de l'isomorphisme $G(4,2^n) = S_4 *_{D_4} D_{2^n}$, démontré dans [4], th.1, et la seconde résulte d'un calcul de volume basé sur la valeur du nombre de Tamagawa de $\mathbf{SO}_3$, cf. [8] et [7], chap.II, §1.5.

[Exemples : pour $n = 3$ (resp. 4) les deux caractéristiques d'Euler-Poincaré sont égales à $-1/48$ (resp. à $-5/96$); pour $n = 5$, celle de $G(4,2^n)$ est égale à $-13/192 = -0,067...$ et celle de Γ_n à $-2^{-6}.3.5.97 = -22,734...$]

Pour $n \geqslant 5$, on constate que $|\chi(\Gamma_n)| > |\chi(G(4,2^n))|$, ce qui ne serait pas possible si l'indice de $G(4,2^n)$ dans Γ_n était fini.

Remarque. En fait, $|\chi(\Gamma_n)|$ tend vers l'infini avec n; on en déduit que le nombre minimum de générateurs de Γ_n a la même propriété.

Références

[1] J.H. Conway, C. Radin, *Quaquaversal tilings and rotations*, Invent. math. 132 (1998), 179-188.

[2] C. Radin, L. Sadun, *Subgroups of* $\mathbf{SO}(3)$ *associated with tilings*, J. Algebra 202 (1998), 611-633.

[3] C. Radin, L. Sadun, *An algebraic invariant for substitution tiling systems*, Geometriae Dedicata 73 (1998), 21-37.

[4] C. Radin, L. Sadun, *On 2-generator subgroups of* $\mathbf{SO}(3)$, Trans. A. M. S. 351 (1999), 4469-4480.

[5] G. R. Robinson, *A subgroup of* $\mathbf{SO}(3,\mathbf{R})$ *generated by rotations of orders 4 and 8*, J. Algebra 306 (2006), 201-207.

[6] J-P. Serre, *Cohomologie des groupes discrets*, Ann. Math. Studies 70 (1971), Princeton Univ. Press, 77-169 (= Oe.88).

[7] J-P. Serre, *Arbres, amalgames,* SL_2, Astérisque 46, S. M. F., Paris, 1977.

[8] A. Weil, *Adeles and Algebraic Groups*, notes by M. Demazure and T. Ono, Progress in Math. 23, Birkhaüser-Boston, 1982.

Reporter: Giordano Favi