Un critère d'indépendance pour une famille de représentations ℓ-adiques

Jean-Pierre Serre

Commentarii Mathematici Helvetici, **88** (2013), 543-576

Introduction

Soit k un corps de nombres, de clôture algébrique $\overline{k}$, et soit A une variété abélienne sur k, de dimension d. Comme on sait, de telles données définissent, pour tout nombre premier ℓ, une représentation ℓ-adique

$$\rho_\ell : \Gamma_k \ \to \ \mathrm{Aut}(T_\ell(A)) \ \cong \ \mathbf{GL}_{2d}(\mathbf{Z}_\ell),$$

où $\Gamma_k = \mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$, et $T_\ell(A)$ est le ℓ-ième module de Tate de A sur $\overline{k}$. La famille des ρ_ℓ s'identifie à un homomorphisme continu

$$\rho : \ \Gamma_k \ \to \ \textstyle\prod_\ell \mathrm{Aut}(T_\ell(A)) \ \cong \ \prod_\ell \mathbf{GL}_{2d}(\mathbf{Z}_\ell).$$

Lorsqu'on s'intéresse au sous-groupe $\rho(\Gamma_k)$ de $\prod_\ell \mathbf{GL}_{2d}(\mathbf{Z}_\ell)$, il est commode de savoir que $\rho(\Gamma_k)$ est le produit direct des $\rho_\ell(\Gamma_k)$, autrement dit, que les ρ_ℓ sont "indépendants". Bien entendu ce n'est pas toujours vrai, mais on peut démontrer (cf. [Se 86]) que cela le devient après une extension finie convenable de k ; autrement dit, les ρ_ℓ sont "presque indépendants".

Je me propose de reprendre cette question en mettant en évidence les propriétés des ρ_ℓ qui entraînent la presque indépendance. Comme on le verra au §2, ce sont des propriétés de ramification, analogues à ce que l'on appelle la "semi-stabilité" ; curieusement, les éléments de Frobenius, si utiles en d'autres circonstances, ne jouent ici aucun rôle.

L'intérêt de cette axiomatisation est qu'on peut l'appliquer à des situations plus générales que celle des variétés abéliennes, par exemple à la cohomologie ℓ-adique des variétés algébriques sur un corps de nombres, cf. §3.2. Un résultat très voisin avait d'ailleurs été obtenu il y a une quinzaine d'années par M.J. Larsen et R. Pink dans des lettres (datées du 23/5/95 et 26/5/95) dont le contenu n'a malheureusement pas été publié jusqu'à présent.

La démonstration du théorème principal (théorème 1 du §2) est donnée au §8. Elle repose sur diverses propriétés des corps de nombres et des groupes linéaires (corps de classes, théorème de Hermite-Minkowski, théorèmes de Jordan et de Nori) ; ces propriétés font l'objet des §§4-7.

Remerciement. Cet article doit beaucoup à L. Illusie : il m'a encouragé à l'écrire, il m'a fourni de nombreuses références et il m'a communiqué ([Il 10]) une démonstration d'un résultat auxiliaire essentiel, qui avait été démontré auparavant, sous une forme un peu différente, par N. Katz et G. Laumon. Je lui en suis très reconnaissant.

§1. La notion d'indépendance.

Soit Γ un groupe, et soit $\rho_i : \Gamma \to G_i$ une famille d'homomorphismes de Γ dans des groupes G_i indexés par un ensemble I. Cela revient à se donner un homomorphisme

$$\rho = (\rho_i) : \Gamma \ \to \ \textstyle\prod_{i \in I} G_i.$$

On dit que les ρ_i sont *indépendants* si la propriété suivante est satisfaite :

(R) $\quad \rho(\Gamma) = \prod \rho_i(\Gamma)$.

Autrement dit, si γ_i est une famille quelconque d'éléments de Γ, il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que $\rho_i(\gamma) = \rho_i(\gamma_i)$ pour tout i.

Il y a une propriété plus faible que l'on peut considérer :

(RO) $\quad \rho(\Gamma)$ est un sous-groupe d'indice fini de $\prod \rho_i(\Gamma)$.

A partir de maintenant, on suppose que Γ est un groupe profini, que les G_i sont localement compacts, et que les ρ_i sont continus (de sorte que les $\rho_i(\Gamma)$ sont des groupes profinis). On s'intéresse à la propriété :

(PR) Il existe un sous-groupe ouvert Γ' de Γ tel que les restrictions des ρ_i à Γ' vérifient (R). [Noter que Γ' est d'indice fini dans Γ, puisque Γ est compact.]

On dit alors que les ρ_i sont *presque indépendants*.

On a (R) $\Rightarrow$ (RO) $\Rightarrow$ (PR) : c'est clair pour (R) $\Rightarrow$ (RO), et ce n'est pas difficile pour (RO) $\Rightarrow$ (PR).

Remarque. On peut aussi exprimer (R) comme une propriété des noyaux N_i des ρ_i. Si l'on pose $N_i' = \bigcap_{j \neq i} N_j$, la condition (R) est équivalente à chacune des deux conditions suivantes :

(R1) $\Gamma = N_i.N_i'$ pour tout i.

(R2) Γ est engendré (topologiquement) par les N_i'.

[Lorsque I est fini, cela se démontre par récurrence sur le nombre d'éléments de I ; le cas général s'en déduit par passage à la limite, en utilisant la compacité de Γ.]

On peut préciser (R2) : si l'on note Γ' le plus petit sous-groupe fermé de Γ contenant les N_i', alors Γ' est le plus grand sous-groupe fermé de Γ sur lequel les ρ_i sont indépendants.

§2. Enoncé du théorème.

Il y a trois données :

a) k est un corps de nombres de clôture algébrique $\overline{k}$; on note Γ_k le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$.

b) L est un ensemble de nombres premiers.

c) Pour tout $\ell \in L$, G_ℓ est un groupe de Lie ℓ-adique localement compact [1], et $\rho_\ell : \Gamma_k \to G_\ell$ est un homomorphisme continu.

On fait deux sortes d'hypothèses :

2.1. On suppose que la famille des $\rho_\ell(\Gamma_k)$ est *bornée* , i.e. qu'elle satisfait à la condition suivante :

1. On ne perdrait rien si l'on supposait que les G_ℓ sont compacts, vu que l'on peut supposer que les ρ_ℓ sont surjectifs.

(B) *Il existe un entier $n \geqslant 0$ tel que, pour tout $\ell \in L$, $\rho_\ell(\Gamma_k)$ soit isomorphe à un sous-quotient de $\mathbf{GL}_n(\mathbf{Z}_\ell)$.*

[Rappelons qu'un "sous-quotient" d'un groupe A est un quotient d'un sous-groupe de A. Bien sûr, il s'agit ici de sous-groupes fermés.]

Les cas particuliers les plus intéressants sont ceux où $G_\ell = \mathbf{GL}_{n_\ell}(\mathbf{Z}_\ell)$, ou $G_\ell = \mathbf{GL}_{n_\ell}(\mathbf{F}_\ell)$, avec des n_ℓ bornés (par exemple constants).

2.2. On fait une hypothèse du genre " *semi-stabilité* " sur la famille des ρ_ℓ. Pour l'énoncer, notons V_k l'ensemble des places non archimédiennes de k. Si $v \in V_k$, notons k_v le complété de k en v, notons p_v la caractéristique résiduelle de v et choisissons un prolongement $\overline{v}$ de v à $\overline{k}$. Notons $I_{\overline{v}}$ le groupe d'inertie correspondant à $\overline{v}$; c'est un sous-groupe fermé de Γ_k ; à conjugaison près, il ne dépend que de v.

Avec ces notations, l'hypothèse dont on a besoin s'énonce de la manière suivante :

(ST) *Il existe un sous-ensemble fini S de V_k tel que* :

(ST1) *Si $v \notin S$ et $\ell \neq p_v$, alors $\rho_\ell(I_{\overline{v}}) = 1$, i.e. ρ_ℓ est non ramifié en v.*

(ST2) *Si $v \in S$ et $\ell \neq p_v$, alors $\rho_\ell(I_{\overline{v}})$ est un pro-ℓ-groupe.*

[Noter que l'on ne fait aucune hypothèse sur les $\rho_\ell(I_{\overline{v}})$ lorsque $\ell = p_v$.]

Lorsque $G_\ell = \mathbf{GL}_n(\mathbf{Z}_\ell)$, la condition (ST2) est moins restrictive que la condition habituelle de semi-stabilité, où l'on exige que $\rho_\ell(I_{\overline{v}})$ soit formé d'éléments unipotents.

Il est commode d'introduire une notion analogue à la *potentielle semi-stabilité* :

(PST) *Il existe une extension finie de k pour laquelle* (ST) *est satisfaite.* [Plus explicitement : il existe une sous-extension finie k_1 de $\overline{k}$ telle que la famille des $\rho_\ell|\Gamma_{k_1}$ satisfasse à (ST).]

Noter que, dès que (ST) est satisfaite pour une extension k_1 de k, elle l'est aussi pour toute extension finie de k contenant k_1.

2.3. Le théorème que nous avons en vue dit que les propriétés (B) et (PST) entraînent la propriété (PR) du §1. Autrement dit :

Théorème 1. *Si la famille des $\rho_\ell(\Gamma_k)$ est bornée au sens de* (B), *et si la condition* (PST) *est satisfaite, il existe une extension finie de k sur laquelle les ρ_ℓ sont indépendants.*

On peut reformuler cet énoncé en termes d'extensions de k : notons N_ℓ le noyau de ρ_ℓ et k_ℓ le sous-corps de $\overline{k}$ fixé par N_l ; posons $N'_\ell = \bigcap_{\ell' \neq \ell} N_{\ell'}$ et notons k'_ℓ le corps fixé par N'_ℓ, autrement dit le corps engendré par les $k_{\ell'}$ avec $\ell' \neq \ell$. Le corps $k^{\mathrm{ind}} = \bigcap k'_\ell$ correspond, par la théorie de Galois, au plus petit sous-groupe fermé de Γ_k contenant les N'_ℓ. Avec ces notations, le théorème 1 est équivalent à :

Théorème 1′. *Si les conditions* (B) *et* (PST) *sont satisfaites, le corps $k^{\mathrm{ind}} = \bigcap_\ell k'_\ell$ défini ci-dessus est une extension finie de k.*

De plus, k^{ind} est la plus petite extension de k sur laquelle les ρ_ℓ sont indépendants ; on peut l'appeler le "corps d'indépendance" des ρ_ℓ.

La démonstration des théorèmes 1 et 1′ sera donnée au §8.

§3. Exemples et contre-exemples.

Dans chacun des exemples ci-dessous, l'ensemble L est l'ensemble de tous les nombres premiers, et G_ℓ est isomorphe à $\mathbf{GL}_n(\mathbf{Q}_\ell)$, avec n fixe. Cette dernière hypothèse entraîne que le groupe $\rho_\ell(\Gamma_k)$ est isomorphe à un sous-groupe fermé de $\mathbf{GL}_n(\mathbf{Z}_\ell)$, de sorte que la condition (B) est satisfaite.

3.1. *Variétés abéliennes et quasi-abéliennes.* Si A est une variété abélienne de dimension d sur k, les modules de Tate $T_\ell(A)$ fournissent des représentations ℓ-adiques de dimension $2d$ de Γ_k qui satisfont à (PST) en vertu du théorème de Grothendieck et Mumford sur la semi-stabilité des modèles de Néron ([SGA 7 I, exposé IX], voir aussi [BLR 90, §7.4]).

D'après le théorème 1, ces représentations sont presque indépendantes : on retrouve ainsi un résultat démontré un peu différemment dans [Se 86]. Noter qu'ici les corps k_ℓ ont une interprétation simple : k_ℓ est le corps de rationalité des points de $A(\overline{k})$ d'ordre une puissance de ℓ, et k'_ℓ est le corps de rationalité des points de $A(\overline{k})$ d'ordre fini premier à ℓ.

Ces résultats s'appliquent aussi au cas des schémas en groupes quasi-abéliens ; ce cas a été utilisé par Hrushovski, cf. [Bo 00].

3.2. *Cohomologie ℓ-adique.* Plus généralement, si X est un schéma séparé de type fini sur k, la condition (PST) est satisfaite par les représentations ℓ-adiques associées aux *groupes de cohomologie* à support propre $H^i_c(\overline{X}, \mathbf{Q}_\ell)$, ainsi que par les groupes de cohomologie $H^i(\overline{X}, \mathbf{Q}_\ell)$ à support quelconque. En effet :

a) La condition (ST1) est satisfaite d'après les théorèmes d'existence de "stratifications" dus à N. Katz et G. Laumon [KL 86, th.3.1.2 et th.3.3.2].

b) Si S est choisi comme dans (ST1), il résulte d'un théorème de Berthelot [Be 96, prop.6.3.2] que, pour tout $v \in S$, il existe un sous-groupe ouvert normal $U_{\overline{v}}$ de $I_{\overline{v}}$ qui opère de façon unipotente sur les $H^i_c(\overline{X}, \mathbf{Q}_\ell)$ et les $H^i(\overline{X}, \mathbf{Q}_\ell)$, pourvu que $\ell \neq p_v$. [La démonstration de Berthelot est basée sur la théorie des altérations de de Jong, cf. [Jo 96].] Choisissons une extension galoisienne k'_v du corps local k_v telle que $\Gamma_{k'_v} \cap I_{\overline{v}} \subset U_{\overline{v}}$. Un argument d'approximation bien connu montre qu'il existe une extension galoisienne finie k_1 de k dont les complétés locaux aux places au-dessus de S contiennent les k'_v. On a alors $\Gamma_{k_1} \cap I_{\overline{v}} \subset U_{\overline{v}}$ pour tout $v \in S$, ce qui montre que la condition (ST2) est satisfaite sur k_1.

Problème (cf. [Se 91, 10.1 ?]). Au lieu de supposer, comme nous venons de le faire, que k est un corps de nombres, supposons seulement que k est une extension de type fini de $\mathbf{Q}$. Comme ci-dessus, soit X un schéma séparé de type fini sur k. Est-il encore vrai que les représentations ℓ-adiques de Γ_k fournies par les $H^i_c(\overline{X}, \mathbf{Q}_\ell)$ et les $H^i(\overline{X}, \mathbf{Q}_\ell)$ sont presque indépendantes ? [2]

3.3. *Mariage "carpe-lapin".* On peut partir de deux familles de ρ_ℓ satisfaisant aux hypothèses (B) et (PST), et pour chaque ℓ choisir au hasard l'un des deux ρ_ℓ ; on obtient encore une famille presque indépendante. Exemple : pour $\ell \equiv 1 \pmod 4$ prendre la représentation ℓ-adique associée à la fonction de Ramanujan, et pour les autres ℓ la représentation ℓ-adique associée à la courbe elliptique d'équation $y^2 - y = x^3 - x^2$.

2. (Note ajoutée en cours d'épreuves) Cette question a été résolue affirmativement par W.Gajda et S.Petersen, cf. arXiv : 1103.2893.

3.4. *Exemple montrant que la condition (PST) ne peut pas être entièrement supprimée.* Soit $k = \mathbf{Q}$. Choisissons un nombre premier $p > 2$, ainsi qu'une suite infinie $\ell_1 < \ell_2 < ...$ de nombres premiers tels que $\ell_i \equiv 1 \pmod{p^i}$. Soit $L = \{\ell_1, \ell_2, ...\}$. Soit $\rho_{\ell_i} : \Gamma_k \to \mathbf{Z}_{\ell_i}^\times$ un homomorphisme non ramifié en dehors de p dont l'image est cyclique d'ordre p^i. La famille des ρ_{ℓ_i} satisfait à la condition (B) avec $n = 1$ et à la condition (ST1) avec $S = \{p\}$; elle ne possède cependant pas la propriété (PR) car son corps d'indépendance est l'unique $\mathbf{Z}_p$-extension de $\mathbf{Q}$, qui est de degré infini sur $\mathbf{Q}$.

§4. Un théorème de finitude sur les corps de nombres.

Soit d un entier > 0, et soit G un groupe fini. Considérons la condition :

(Jor_d) *Il existe un sous-groupe abélien normal A de G tel que* $(G : A) \leqslant d$.

Théorème 2. *Pour tout $d > 0$ il n'existe qu'un nombre fini de sous-extensions galoisiennes K/k de $\overline{k}/k$ qui sont partout non ramifiées et dont le groupe de Galois a la propriété* (Jor_d) *ci-dessus.*

Démonstration. On sait (Hermite-Minkowski) qu'il n'existe qu'un nombre fini de sous-extensions de $\overline{k}$ de degré $\leqslant d$ qui soient partout non ramifiées (cela provient de ce que leurs discriminants sont bornés en valeur absolue, cf. par exemple [Se 81, §1.4]). On peut donc trouver une sous-extension finie k_1 de $\overline{k}$ contenant toutes ces extensions. Soit k_2 la plus grande extension abélienne non ramifiée de k_1 contenue dans $\overline{k}$; d'après la théorie du corps de classes, k_2 est une extension finie de k_1, donc aussi de k. Soit maintenant K/k une extension galoisienne dont le groupe de Galois G a la propriété de l'énoncé, et soit K' le sous-corps de K fixé par un sous-groupe abélien normal A d'indice $\leqslant d$. On a $[K' : k] \leqslant (G : A) \leqslant d$ et K' est non ramifiée sur k. Cela montre que K' est contenu dans k_1. Comme K/K' est abélienne et non ramifiée, il en est de même de $K.k_1/k_1$ et cela entraîne que $K.k_1$ est contenu dans k_2, d'où $K \subset k_2$, ce qui prouve la finitude cherchée.

[Ce théorème utilise deux des propriétés les plus importantes des corps de nombres :

a) finitude des extensions de $\mathbf{Q}$ de degré et discriminant bornés [3] ;

b) finitude des extensions abéliennes non ramifiées (corps de classes).]

§5. Groupes linéaires d'ordre premier à la caractéristique.

5.1. *Le théorème de Jordan classique.*

Sous sa forme originelle ([Jo 78]), ce théorème s'énonce comme suit :

Théorème 3. *Pour tout entier $n \geqslant 0$ il existe un entier $d = d(n)$ tel que tout sous-groupe fini de $\mathbf{GL}_n(\mathbf{C})$ ait la propriété* (Jor_d) *du* §4.

[Autrement dit, un sous-groupe fini de $\mathbf{GL}_n(\mathbf{C})$ ne peut être "gros" que s'il contient un gros sous-groupe abélien.]

On trouvera dans [Fr 11] une démonstration simple de ce résultat. Cette démonstration donne une valeur de $d(n)$ telle que

$$d(n) \leqslant (\sqrt{8n} + 1)^{2n^2}.$$

3. En fait discriminant borné entraîne degré borné, mais cela ne joue aucun rôle ici.

On connaît maintenant la valeur optimale de $d(n)$, qui est bien inférieure à celle-là ; ainsi, pour $n \geqslant 71$, on a $d(n) = (n+1)!$, d'après M.J. Collins [Co 07], améliorant des résultats de B. Weisfeiler et de W. Feit [4]. Nous n'en aurons pas besoin. Dans ce qui suit, nous noterons $d(n)$ n'importe quel entier d pour lequel le théorème 3 est valable.

5.2. *Le théorème de Jordan sur un corps quelconque.*

Théorème 3′. *Soient n un entier $\geqslant 0$, F un corps, H un sous-groupe fini de $\mathbf{GL}_n(F)$ et G un quotient de H. On suppose que $|G|$ est premier à la caractéristique de F si celle-ci est $\neq 0$. Alors G a la propriété* $(\mathrm{Jor}_{d(n)})$ *du* §4.

Démonstration. Elle se fait en trois étapes :

5.2.1. Le cas où $\mathrm{car}(F) = 0$. On peut supposer F de type fini sur $\mathbf{Q}$, donc plongeable dans $\mathbf{C}$. Le théorème 3 montre alors que H a la propriété $(\mathrm{Jor}_{d(n)})$ et il en est donc de même de G.

5.2.2. Le cas où $\mathrm{car}(F) = p > 0$, avec $|H|$ premier à p. On peut supposer que F est parfait. Soit W l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans F. On a un homomorphisme surjectif $\mathbf{GL}_n(W) \to \mathbf{GL}_n(F)$. Comme $|H|$ est premier à p, H se relève en un sous-groupe de $\mathbf{GL}_n(W)$, et l'on applique 5.2.1 au corps des fractions de W.

5.2.3. Le cas où $\mathrm{car}(F) = p > 0$. Soit I le noyau de $H \to G$, et soit P un p-Sylow de I ; c'est aussi un p-Sylow de H, puisque $(H : I)$ est premier à p. Soit $N_H(P)$ le normalisateur de I dans H. On sait (Frattini) que $N_H(P) \to G$ est surjectif [5]. D'autre part, la suite exacte

$$1 \to P \to N_H(P) \to N_H(P)/P \to 1$$

est scindée car les ordres de P et de $N_H(P)/P$ sont premiers entre eux. Il existe donc un sous-groupe H' de $N_H(P)$, d'ordre premier à p, tel que $N_H(P) = P.H'$. Or l'image de P dans G est triviale, puisque P est contenu dans I. On en déduit que G est un quotient de H', et l'on conclut en appliquant 5.2.2 à H'.

§6. Groupes linéaires engendrés par des éléments d'ordre égal à la caractéristique.

Dans ce qui suit, ℓ désigne un nombre premier $\geqslant 5$.

6.1. *Les groupes simples finis de caractéristique ℓ : la famille Σ_ℓ.*

Rappelons comment on définit les groupes simples "du type de Lie" en caractéristique $\ell \geqslant 5$ (pour les propriétés utilisées ici, voir par exemple [GLS 98, §2.2] - noter que l'hypothèse $\ell \geqslant 5$ élimine les cas particuliers exceptionnels que l'on rencontre en caractéristique 2 et 3, ainsi que les formes tordues à la Suzuki-Ree).

4. Les démonstrations de Weisfeiler, Feit et Collins dépendent de la classification des groupes finis simples.

5. L'argument dit "de Frattini" est le suivant : si $h \in H$, hPh^{-1} est un p-Sylow de I, donc s'écrit xPx^{-1} avec $x \in I$, d'où $x^{-1}h \in N_H(P)$, ce qui montre que h appartient à $I.N_H(P)$. On a donc bien $H = I.N_H(P)$.

On se donne un groupe algébrique lisse connexe $\underline{H}$ sur un corps fini F dont l'ordre est une puissance de ℓ. On suppose que $\underline{H}$ est géométriquement simple et simplement connexe, et l'on désigne par $\underline{H}^{adj}$ le quotient de $\underline{H}$ par son centre. L'image H_F de l'homomorphisme $\underline{H}(F) \to \underline{H}^{adj}(F)$ est alors un groupe fini simple non abélien.

Remarque. On aurait aussi pu définir H_F comme le quotient de $\underline{H}(F)$ par son centre, ou bien comme le sous-groupe de $\underline{H}^{adj}(F)$ engendré par les ℓ-Sylow de $\underline{H}^{adj}(F)$. L'équivalence de ces diverses définitions provient de ce que $\underline{H}(F)$ est engendré par ses éléments unipotents d'après un théorème de Steinberg [St 68, th.12.4].

Nous noterons Σ_ℓ l'ensemble des classes d'isomorphisme de groupes finis simples qui sont, soit du type H_F ci-dessus (pour un $\underline{H}$ et un F convenables [6]), soit isomorphe au groupe cyclique $\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$.

6.2. *Un lemme.*

Lemme 1. *Soit $\underline{G}$ un groupe algébrique linéaire connexe sur $\mathbf{F}_\ell$ et soit $G = \underline{G}(\mathbf{F}_\ell)$ le groupe de ses points rationnels. Tout quotient simple d'une suite de Jordan-Hölder de G appartient[7] à Σ_ℓ ou est cyclique d'ordre $\neq \ell$.*

Démonstration. Un argument de dévissage permet de supposer que $\underline{G}$ est, soit un groupe unipotent, soit un tore, soit un groupe semi-simple. Les deux premiers cas sont immédiats. On peut donc supposer que $\underline{G}$ est semi-simple. Soit $\underline{\widetilde{G}}$ le revêtement universel de $\underline{G}$ et soit $\underline{G}^{adj}$ son groupe adjoint. Soient $\widetilde{G}$ et G^{adj} les groupes de points $\mathbf{F}_\ell$-rationnels de ces groupes algébriques. On a des homomorphismes naturels

$$\widetilde{G} \ \to \ G \ \to \ G^{adj}.$$

Comme $\underline{\widetilde{G}}$ est simplement connexe, c'est un produit de groupes du type $R_{F/\mathbf{F}_\ell}\underline{H}$, où $\underline{H}$ et F sont comme dans 6.1 ci-dessus, et le symbole $R_{F/\mathbf{F}_\ell}$ désigne le foncteur “restriction des scalaires” à la Weil (celui que Grothendieck note $\prod_{F/\mathbf{F}_\ell}$), cf. par exemple [KMRT 98, th.26.8]. On a donc $\widetilde{G} = \prod \underline{H}(F)$. Les homomorphismes

$$\widetilde{G} \ \to \ G \ \to \ G^{adj}$$

ont des noyaux et conoyaux qui sont commutatifs d'ordre premier à ℓ. De plus, l'image de $\widetilde{G}$ dans G^{adj} est un produit de groupes simples appartenant à Σ_ℓ. Le lemme en résulte.

6.3. *Un théorème de Nori.*

Théorème 4. *Pour tout $n \geqslant 0$, il existe un entier $c(n)$ tel que, si $\ell > c(n)$, tout sous-quotient fini simple de $\mathbf{GL}_n(\mathbf{Z}_\ell)$ d'ordre divisible par ℓ appartient à Σ_ℓ.*

Démonstration. Prenons $c(n) = \sup(3, c_2(n))$, où $c_2(n)$ a les propriétés énoncées dans [No 87, Theorem B]. Nous allons voir que cet entier convient.

---

6. Il y a unicité : un groupe simple n'est isomorphe à H_F que pour au plus un couple $(\underline{H}, F)$, à isomorphisme près.

7. Dans ce qui suit, on dit qu'un groupe simple “appartient” à Σ_ℓ lorsqu'il est isomorphe à un élément de Σ_ℓ.

Supposons que $\ell > c(n)$ et soit H un sous-quotient fini simple de $\mathbf{GL}_n(\mathbf{Z}_\ell)$ d'ordre divisible par ℓ. Comme H est simple, cette dernière propriété entraîne que H est engendré par ses ℓ-Sylow.

L'homomorphisme naturel $\mathbf{GL}_n(\mathbf{Z}_\ell) \to \mathbf{GL}_n(\mathbf{F}_\ell)$ est surjectif, et son noyau est un pro-ℓ-groupe. Il en résulte que H est, soit cyclique d'ordre ℓ, soit isomorphe à un sous-quotient de $\mathbf{GL}_n(\mathbf{F}_\ell)$. Dans le premier cas, H appartient à Σ_ℓ. Dans le second cas, on a $H = G/I$, avec $G \subset \mathbf{GL}_n(\mathbf{F}_\ell)$ et I normal dans G ; on peut évidemment supposer que G est engendré par ses ℓ-Sylow. D'après [No 87, Th.B], il existe un $\mathbf{F}_\ell$-sous-groupe algébrique connexe $\underline{G}$ de $\mathbf{GL}_n$ tel que G soit contenu dans $\underline{G}(\mathbf{F}_\ell)$ et soit engendré par les ℓ-Sylow de ce groupe [8]. Le groupe H est un quotient d'une suite de Jordan-Hölder de G, donc aussi de $\underline{G}(\mathbf{F}_\ell)$. D'après le lemme 1, ceci entraîne que H est, soit cyclique d'ordre premier à ℓ (ce qui est exclu), soit isomorphe à un élément de Σ_ℓ. D'où le théorème.

6.4. *Un théorème d'Artin.*

Le résultat suivant est essentiellement dû à E. Artin ([Ar 55], complété par [KLST 90]) :

Théorème 5. *Si ℓ' est premier $\geqslant 5$ et distinct de ℓ, on a* $\Sigma_\ell \cap \Sigma_{\ell'} = \varnothing$.

La démonstration donne même un résultat plus fort : si G appartient à Σ_ℓ et G' appartient à $\Sigma_{\ell'}$, leurs ordres $|G|$ et $|G'|$ sont distincts.

Exemples. Pour $\ell = 5$, les ordres des éléments de Σ_ℓ, rangés par taille croissante, sont $\{5, 60, 7800, 126000, 372000, 976500, ...\}$.
Pour $\ell = 7$, ce sont $\{7, 168, 58800, 1876896, 5663616, 20176632, ...\}$.

§7. Deux critères d'indépendance.

7.1. *Un critère élémentaire.*

Revenons aux notations du §1, et soit $\rho_i : \Gamma \to G_i,\ i \in I$, une famille d'homomorphismes, les groupes Γ et G_i étant des groupes profinis, et les ρ_i étant continus.

Lemme 2. *Supposons que les groupes $\rho_i(\Gamma) \subset G_i$ aient la propriété suivante* :

(D) *Si $i \neq j$, aucun quotient fini simple de $\rho_i(\Gamma)$ n'est isomorphe à un quotient de $\rho_j(\Gamma)$.*

Alors les ρ_i sont indépendants.

Démonstration. On peut évidemment supposer que les ρ_i sont surjectifs, i.e. $G_i = \rho_i(\Gamma)$ pour tout i.

Considérons d'abord le cas où I est un ensemble à deux éléments, par exemple $I = \{1, 2\}$. Si $\rho : \Gamma \to G_1 \times G_2$ n'est pas surjectif, le classique lemme de Goursat montre qu'il existe un groupe profini non trivial A et des homomorphismes surjectifs $f_i : G_i \to A$ tels que $f_1 \circ \rho_1 = f_2 \circ \rho_2$. Comme A est non trivial, il a un quotient qui est un groupe simple fini, et ce groupe est quotient à la fois de G_1 et de G_2, contrairement à l'hypothèse (D).

8. La définition de $\underline{G}$ donnée par Nori est très simple : c'est le plus petit sous-groupe algébrique de $\mathbf{GL}_n$ contenant les groupes à 1 paramètre $t \mapsto u^t$, où u parcourt les éléments d'ordre ℓ de G. Dans la terminologie de [Se 94, §4], c'est le *saturé* de G.

Le cas où I est fini se déduit par récurrence sur $|I|$ du cas où $|I| = 2$, et le cas où $|I|$ est infini se déduit par passage à la limite du cas où $|I|$ est fini.

7.2. *Un autre critère.*

Soit Γ un groupe profini et soit L un ensemble de nombres premiers. Pour tout $\ell \in L$, soit $\rho_\ell : \Gamma \to G_\ell$ un homomorphisme continu de Γ dans un groupe de Lie ℓ-adique compact G_ℓ.

Lemme 3. *Supposons qu'il existe une partie finie I de L telle que la famille $(\rho_\ell)_{\ell \in L-I}$ ait la propriété* (PR) *du* §1. *Alors il en est de même de la famille $(\rho_\ell)_{\ell \in L}$.*

(Autrement dit, pour prouver (PR), on a le droit de supprimer un nombre fini d'éléments de L.)

Démonstration. On peut supposer que I est réduit à un seul élément, que l'on notera p : le cas général en résultera par récurrence sur $|I|$. Quitte à remplacer Γ par un sous-groupe ouvert, on peut supposer que les ρ_ℓ sont indépendants pour $\ell \neq p$; on peut aussi supposer que tous les ρ_ℓ sont surjectifs. Nous allons alors démontrer un peu mieux que (PR), à savoir :

(*) *La famille des ρ_ℓ possède la propriété* (RO) *du* §1.

Autrement dit, l'image de Γ par l'homomorphisme

$$\rho = (\rho_\ell) : \Gamma \ \to \ G_p \times \prod_{\ell \neq p} G_\ell$$

est ouverte dans $\prod_\ell G_\ell$.

Les deux projections $\rho(\Gamma) \to G_p$ et $\rho(\Gamma) \to \prod_{\ell \neq p} G_\ell$ sont surjectives par hypothèse. On se trouve donc dans la situation du lemme de Goursat. Autrement dit, si l'on identifie G_p au facteur $G_p \times 1$ de $G_p \times \prod_{\ell \neq p} G_\ell$, le groupe quotient $C = G_p/(\rho(\Gamma) \cap G_p)$ est un quotient de $\prod_{\ell \neq p} G_\ell$. Dire que $\rho(\Gamma)$ est ouvert équivaut à dire que C est *fini*. C'est ce que nous allons démontrer.

Observons d'abord que C est un groupe de Lie p-adique compact (puisque c'est un quotient de G_p) ; il contient donc un sous-groupe ouvert normal U qui est un pro-p-groupe sans torsion (cf. par exemple [Se 65, II, §IV.9, th.5], [Bo 72, Chap.III, §7] ou [DSMS 99, th.8.32]). Si J est une partie finie de $L - \{p\}$, notons C_J l'image de l'homomorphisme

$$\prod_{\ell \in J} G_\ell \ \to \prod_{\ell \neq p} G_\ell \ \to \ C.$$

Les p-Sylow des G_ℓ sont finis si $\ell \in J$; il en est donc de même de ceux de C_J. Comme U est sans torsion, cela montre que $U \cap C_J = 1$; d'où $|C_J| \leqslant (C : U)$. Cela donne une borne uniforme pour l'ordre de C_J, ce qui entraîne qu'il existe un C_J qui contient tous les autres. Mais la réunion des C_J est dense dans C. D'où le fait que C est fini.

§8. Démonstration du théorème 1.

Revenons à la situation du théorème 1, relative à un homomorphisme

$$\rho = (\rho_\ell) : \Gamma_k \to \prod_{\ell \in L} G_\ell$$

satisfaisant aux conditions (B) et (PST). Pour prouver que ρ a la propriété (PR), nous procéderons en plusieurs étapes.

8.1. *Réductions.* Quitte à remplacer k par une extension finie, on peut supposer que la condition de semi-stabilité (ST) est satisfaite. On peut aussi supposer que les ρ_ℓ sont surjectifs. D'après (B), on peut choisir un entier $n \geqslant 0$ tel que, pour tout $\ell \in L$, le groupe G_ℓ soit un sous-quotient de $\mathbf{GL}_n(\mathbf{Z}_\ell)$. D'après le lemme 3, on peut aussi supposer que tous les $\ell \in L$ sont $> \sup(3, c(n))$ où $c(n)$ a la propriété énoncée dans le théorème 4. Pour la même raison, on peut aussi supposer que l'on a $\ell \neq p_v$ pour toute place v de l'ensemble fini S intervenant dans (ST).

8.2. *Les groupes A_ℓ.* Si $\ell \in L$, notons $\Gamma_{k,\ell}$ le plus petit sous-groupe normal fermé de Γ_k contenant les groupes d'inertie $I_{\overline{v}}$ correspondant aux places v telles que $p_v = \ell$. D'après (ST1), on a $\rho_{\ell'}(\Gamma_{k,\ell}) = 1$ pour tout $\ell' \neq \ell$. L'image de $\Gamma_{k,\ell}$ par $\rho : \Gamma_k \to \prod G_\ell$ est donc contenue dans le ℓ-ième facteur de $\prod G_\ell$. Notons A_ℓ cette image ; c'est un sous-groupe fermé normal de G_ℓ. Le plus petit sous-groupe fermé de $\prod G_\ell$ contenant tous les A_ℓ n'est autre que le produit $\prod A_\ell$. En particulier, on a :

Lemme 4. *Le sous-groupe $\rho(\Gamma_k)$ de $\prod G_\ell$ contient $\prod A_\ell$.*

8.3. *Les groupes G_ℓ^+.* Si $\ell \in L$, notons G_ℓ^+ le sous-groupe de G_ℓ engendré par ses ℓ-Sylow ; c'est un sous-groupe ouvert normal de G_ℓ. Posons $H_\ell = G_l/G_\ell^+.A_\ell$; c'est un groupe fini d'ordre premier à ℓ.

Lemme 5. a) *L'homomorphisme $\Gamma_k \to G_\ell \to H_\ell$ est partout non ramifié.*
b) *Le groupe H_ℓ jouit de la propriété* $\mathrm{Jor}_{d(n)}$ *des* §§4-5.

Démonstration. Soit $v \in V_k$, et soit $\overline{v}$ une place de $\overline{k}$ prolongeant v. Si $p_v = \ell$, on a $\rho_\ell(I_{\overline{v}}) \subset A_\ell$ par définition de A_ℓ ; l'image de $I_{\overline{v}}$ dans H_ℓ est donc triviale. Si $p_v \neq \ell$, le groupe $\rho_\ell(I_{\overline{v}})$ est un pro-ℓ-groupe d'après (ST) ; il est donc contenu dans G_ℓ^+ et son image dans H_ℓ est triviale. Cela démontre a).

Quant à b), il résulte du fait que l'ordre de H_ℓ est premier à ℓ, ce qui permet de lui appliquer le théorème $3'$.

8.4. *Changement de corps.* D'après le lemme 5, les homomorphismes $\Gamma_k \to H_\ell$ sont non ramifiés. Comme les H_ℓ ont la propriété $\mathrm{Jor}_{d(n)}$, on peut appliquer le théorème 2. On en déduit qu'il existe une extension finie non ramifiée k' de k telle que, pour tout $\ell \in L$, l'image de $\rho_\ell(\Gamma_{k'})$ dans H_ℓ soit triviale. Choisissons une telle extension. On a alors $\rho_l(\Gamma_{k'}) \subset G_\ell^+.A_\ell$ pour tout ℓ. Nous allons maintenant prendre k' comme corps de base ; nous poserons $G'_\ell = \rho_\ell(\Gamma_{k'})$, et nous noterons G'^+_ℓ et A'_ℓ les groupes correspondant à G_ℓ^+ et à A_ℓ ; par exemple, G'^+_ℓ est le sous-groupe de G'_ℓ engendré par les ℓ-Sylow de G'_ℓ.

Lemme 6. *Si $\ell > [k' : k]$, on a* $G'^+_\ell = G^+_\ell$, $A'_\ell = A_\ell$ *et* $G'_\ell = G'^+_\ell.A'_\ell$.

Démonstration. L'hypothèse faite sur ℓ entraîne que l'indice de G'_ℓ dans G_ℓ est $< \ell$, d'où le fait que tout ℓ-Sylow de G_ℓ est contenu dans G'_ℓ, ce qui entraîne

$G_\ell'^{+} = G_\ell^{+}$. L'égalité $A_\ell' = A_\ell$ résulte de ce que les groupes d'inertie $I_{\overline{v}}$ sont les mêmes pour k' et pour k, puisque k' est non ramifié sur k. Enfin, l'égalité $G_\ell' = G_\ell'^{+}.A_\ell'$ résulte de ce que $G_\ell' = \rho_\ell(\Gamma_{k'})$ est contenu dans $G_\ell^{+}.A_\ell$.

8.5. *Fin de la démonstration.* D'après le lemme 3, on peut supposer que l'on a $\ell > [k' : k]$ pour tout $\ell \in L$. Le lemme 6 montre que l'on a alors $G_\ell' = G_\ell'^{+}.A_\ell'$ pour tout ℓ. D'après le théorème 4, tout quotient simple de $G_\ell'^{+}$ appartient à l'ensemble Σ_ℓ défini au n° 6.1. Il en est donc de même des quotients simples de G_ℓ'/A_ℓ'. Comme les Σ_ℓ sont deux à deux disjoints (théorème 5), on peut appliquer le lemme 2 à la famille des homomorphismes $\Gamma_{k'} \to G_\ell'/A_\ell'$. On en conclut que l'homomorphisme $\Gamma_{k'} \to \prod G_\ell'/A_\ell'$ est surjectif. Si l'on pose $X' = \rho(\Gamma_{k'})$ et $A' = \prod A_\ell'$, cela revient à dire que $X'.A' = \prod G_\ell'$. Mais le lemme 4, appliqué au corps k', montre que X' contient A'. On a donc $X' = \prod G_\ell'$, ce qui achève la démonstration.

Références

[Ar 55] E. Artin, *The orders of the classical simple groups*, Comm. Pure and Applied Math. **8** (1955), 455-472 (= C.P., n° 33).

[Be 96] P. Berthelot, *Altération des variétés algébriques* (*d'après A.J. de Jong*), Sém. Bourbaki 1995/1996, exposé **815** ; Astérisque **241**, SMF, 1997, 273-311.

[BLR 90] S. Bosch, W. Lütkebohmert & M. Raynaud, *Néron Models*, Ergebnisse der Math. (3) **21**, Springer-Verlag, 1990.

[Bo 72] N. Bourbaki, *Groupes et Algèbres de Lie, Chap.II et Chap.III*, Hermann, Paris, 1972.

[Bo 00] E. Bouscaren, *Théorie des modèles et conjecture de Manin-Mumford* (*d'après Ehud Hrushovski*), Sém. Bourbaki 1999/2000, exposé **870** ; Astérisque **276**, SMF, 2002, 137-159.

[Co 07] M.J. Collins, *On Jordan's theorem for complex linear groups*, J. of Group Theory **10** (2007), 411-423.

[DSMS 99] J.D. Dixon, M.P.F. du Sautoy, A. Mann & D. Segal, *Analytic pro-p-groups*, Second edition, revised and enlarged by Marcus du Sautoy & Dan Segal, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999.

[Fr 11] F.G. Frobenius, *Über den von L. Bieberbach gefundenen Beweis eines Satzes von C. Jordan*, Sitz. Königlich Preuss. Akad. Wiss. Berlin (1911), 241-248 (= Ges. Abh.III, 493-500).

[GLS 98] D. Gorenstein, R. Lyons & R. Solomon, *The Classification of the Finite Simple Groups, Number 3*, Math. Surveys and Monographs **40**-3, AMS, 1998.

[Il 10] L. Illusie, *Constructibilité générique et uniformité en ℓ*, Orsay, 2010, non publié.

[Jo 96] A.J. de Jong, *Smoothness, semi-stability and alterations*, Publ. Math. IHES 83 (1996), 51-93.

[Jo 78] C. Jordan, *Mémoire sur les équations différentielles linéaires à intégrale algébrique*, J. Crelle **84** (1878), 89-215 (= Oe.II, 13-140).

[KL 86] N.M. Katz & G. Laumon, *Transformation de Fourier et majoration de sommes exponentielles*, Publ. Math. IHES 62 (1986), 361-418 ; *Erratum*, Publ. Math. IHES 69 (1989), 233.

[KLST 90] W. Kimmerle, R. Lyons, R. Sandling & D.N. Teague, *Composition factors from the group ring and Artin's theorem on orders of simple groups*, Proc. LMS **60** (1990), 89-122.

[KMRT 98] M-A. Knus, A. Merkurjev, M. Rost & J-P. Tignol, *The Book of Involutions*, AMS Colloquium Publ. 44, 1998.

[No 87] M.V. Nori, *On subgroups of* $\mathbf{GL}_n(\mathbf{F}_p)$, Invent. math. **88** (1987), 257-275.

[Se 65] J-P. Serre, *Lie Algebras and Lie Groups*, Benjamin Publ., New York, 1965 ; Lect. Notes in Math. **1500**, Springer-Verlag, 1992 ; corrected fifth printing, 2006.

[Se 81] —— , *Quelques applications du théorème de densité de Chebotarev*, Publ. Math. I.H.E.S. **54** (1981), 123-201 (= Oe.III, n° 125).

[Se 86] —— , *Lettre à Ken Ribet du 7/3/1986* (= Oe.IV, n° 138).

[Se 91] —— , *Propriétés conjecturales des groupes de Galois motiviques et des représentations* ℓ*-adiques*, Proc. Symp. Pure Math. **55**, AMS, 1994, vol.I, 377-400 (= Oe.IV, n° 161).

[Se 94] —— , *Sur la semi-simplicité des produits tensoriels de représentations de groupes*, Invent. math. **116** (1994), 513-530 (= Oe.IV, n° 164).

[SGA 4] M. Artin, A. Grothendieck & J-L. Verdier, *Théorie des Topos et Cohomologie Étale des Schémas*, 3 vol., Lect. Notes in Math. **269**, **270**, **305**, Springer-Verlag, 1972-1973.

[SGA 7 I] A. Grothendieck, *Groupes de Monodromie en Géométrie Algébrique*, Lect. Notes in Math. **288**, Springer-Verlag, 1972.

[St 68] R. Steinberg, *Endomorphisms of linear algebraic groups*, Memoirs AMS **80** (1968) (= C.P., n° 23).

Collège de France, 3 rue d'Ulm, F-75005 Paris
serre@noos.fr