

Existence globale et explosion des solutions oscillantes de l'équation de la chaleur non-linéaire

TC¹ Flávio Dickstein² Fred B. Weissler³

¹Univ. Paris 6 & CNRS

²Univ. Fed. Rio

³Univ. Paris 13

Paris, 30 janvier 2009

Cadre

Équation de la chaleur non-linéaire

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + |u|^\alpha u, \\ u_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \quad (\text{NLH})$$

où Ω est la boule unité de \mathbb{R}^N .

Solutions radiales.

$$0 < \alpha < \frac{4}{N-2},$$

Propriétés bien connues

- Existence locale dans $C_0(\Omega)$: $\forall \varphi \in C_0(\Omega)$, $\exists T_\varphi > 0$ et un unique $u = u_\varphi \in C([0, T_\varphi), C_0(\Omega))$ qui est sol. classique sur $(0, T_\varphi)$ et vérifie $u(0) = \varphi$. Si $T_\varphi < \infty$, alors $\|u(t)\|_{L^\infty} \xrightarrow[t \uparrow T_\varphi]{} \infty$.
- Il existe des solutions qui explosent en temps fini: si

$$E(\varphi) =: \frac{1}{2} \int |\nabla \varphi|^2 - \frac{1}{\alpha + 2} \int |\varphi|^{\alpha+2} < 0,$$

alors u_φ explose.

Propriétés bien connues (2)

- Il existe des solutions globales. Par exemple: si $\|\varphi\|_{L^\infty}$ est petit; ou si $\varphi \in C_0(\Omega)$ est une solution stationnaire.
- Si u_φ est globale, alors $\sup_{t \geq 0} \|u_\varphi(t)\|_{L^\infty} < \infty$ et $u(t) \rightarrow \Psi$ où Ψ est une solution stationnaire telle que $E(\Psi) \leq E(\varphi)$.
- Vaste littérature sur **comment** les solutions explosent: vitesse d'expl., ens. des pts d'expl., profil asymp., limite de la sol. au temps d'expl., etc.
- Beaucoup moins de résultats sur **pourquoi** on a explosion. Etant donné $\varphi \in C_0(\Omega)$, on ne sait en général pas dire si u_φ est globale ou explose.

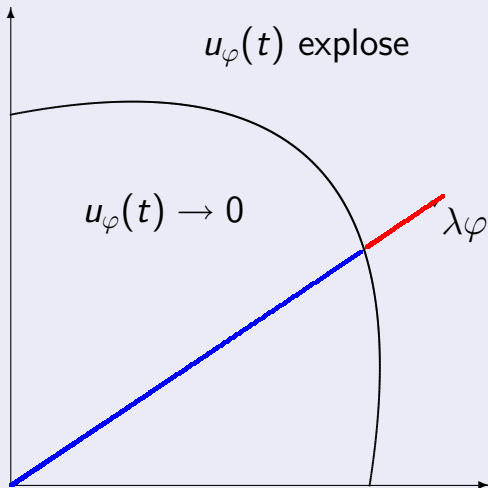
Une première question:

- Soit

$$\mathcal{G} = \{\varphi \in C_0(\Omega); T_\varphi = \infty\}.$$

- **Quelle est la structure de l'ensemble \mathcal{G} ?**
- \mathcal{G} est fermé (est. uniformes); $0 \in \text{int}(\mathcal{G})$ (stab. asymp. de 0); \mathcal{G} non-borné (sol. stationnaires); $C_0(\Omega) \setminus \mathcal{G}$ est non-borné (u_φ explose $\Rightarrow u_{u_\varphi(t)}$ explose).
- $\mathcal{G} \cap \{\varphi \geq 0\}$ est un convexe, fermé, non-borné. Si $\varphi \in \text{int}(\mathcal{G})$, alors $u_\varphi(t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow \infty$. (Ca concerne les non-linéarités convexes.)

L'ensemble $\mathcal{G} \cap \{\varphi \geq 0\}$



\mathcal{G} est-il étoilé autour de 0, ou convexe?

Etant donné $\varphi \in C_0(\Omega)$ tel que $T_\varphi = \infty$, est-ce que $T_{\lambda\varphi} = \infty$ pour tout $0 \leq \lambda \leq 1$?

De façon équivalente, étant donné $\varphi \in C_0(\Omega)$ tel que $T_\varphi < \infty$, est-ce que $T_{\lambda\varphi} < \infty$ pour tout $\lambda > 1$?

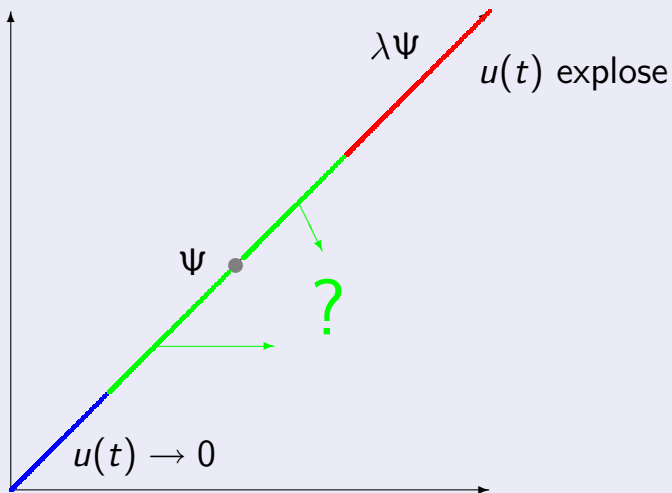
- C'est une conjecture consistante avec les critères de petite donnée et d'énergie négative.
- C'est vrai pour les solutions positives.
- Aucune raison pour que ça soit vrai en général.

Une question franchement plus simple:

Etant donnée une solution stationnaire $\Psi \neq 0$, est-ce que $T_{\lambda\Psi} = \infty$ pour tout $0 \leq \lambda \leq 1$ et $T_{\lambda\Psi} < \infty$ pour tout $\lambda > 1$?

- C'est vrai si $\Psi > 0$.
- C'est vrai en dimension d'espace $N = 1$. (En effet, Ψ est anti-périodique, donc le problème se réduit à une solution positive dans un intervalle plus petit.)
- Quid des solutions Ψ non-positives en dimension $N \geq 2$?

Le cas d'une solution stationnaire Ψ non-positive



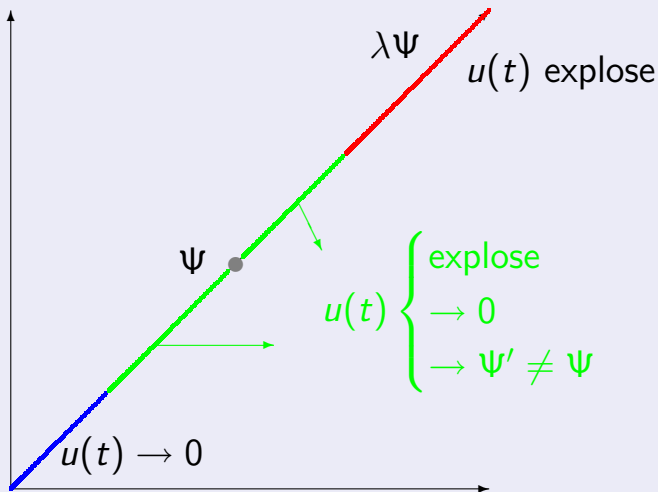
Le cas d'une solution stationnaire Ψ non-positive

Considerations élémentaires d'énergie:

$$E(\lambda\Psi) < E(\Psi) \text{ si } \lambda > 0, \lambda \neq 1$$

Puisque $E(u(t)) \downarrow$, on peut ajouter des informations au dessin

Le cas d'une solution stationnaire Ψ non-positive



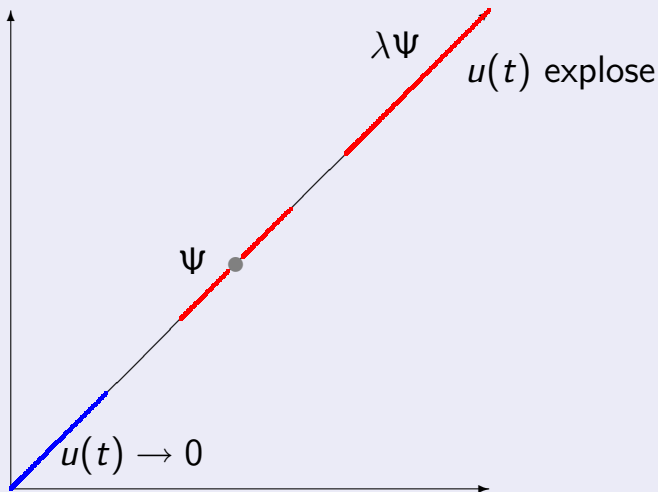
Le résultat principal

Théorème

Si $N \geq 3$ et $\alpha \approx 4/(N - 2)$ et si Ψ est une solution stationnaire radiale qui change de signe, alors il existe $0 < \underline{\lambda} < 1 < \bar{\lambda}$ tel que

- $T_{\lambda\Psi} < \infty$ pour $\underline{\lambda} < \lambda < 1$.
- $T_{\lambda\Psi} < \infty$ pour $1 < \lambda < \bar{\lambda}$.

Le cas d'une solution stationnaire Ψ non-positive



Le résultat principal

Remarque

Si $\alpha > 4/(N - 2)$, pas de solution stationnaire radiale.

Corollaire

Si $N \geq 3$ et $\alpha \approx 4/(N - 2)$, alors \mathcal{G} n'est pas étoilé autour de 0.

- Cela remet en question l'intuition "standard": compétition entre les effets diffusif du Laplacien et explosif de la puissance. Comment la multiplication de la donnée par $\lambda < 1$ peut-elle augmenter l'effet de la puissance?
- La conclusion est fausse en dimension $N = 1$.
- $\lambda\Psi$ n'est pas comparable avec Ψ si $\lambda \neq 1$, donc les solutions correspondantes ne peuvent pas facilement être comparées.
- Les considérations de variétés stables ne semblent pas utiles. $\lambda\Psi$ est sur la variété instable de Ψ si $\lambda \neq 1$, mais ça n'aide pas pour décider si la solution correspondante explose.

Preuve (1)

On linéarise autour de la solution stationnaire Ψ .

$$\text{Posons } z^\lambda = \frac{u_{\lambda\Psi}(t) - \Psi}{\lambda - 1}.$$

Lorsque $\lambda \rightarrow 1$, $z^\lambda \rightarrow z$ unif. sur les bornés en temps, où

$$\begin{cases} z_t = \Delta z + (\alpha + 1)|\Psi|^\alpha z, \\ z(0) = \Psi. \end{cases}$$

Le comportement de z lorsque $t \rightarrow \infty$ est déterminé par le signe de

$$\mathcal{I} = \int_{\Omega} \Psi \varphi_1,$$

où $\varphi_1 > 0$ est le premier v.p. de $-\Delta - (\alpha + 1)|\Psi|^\alpha$.

Preuve (2)

Si $\mathcal{I} \neq 0$, par exemple si $\mathcal{I} > 0$, alors $z(T) > 0$ si T est assez grand.

Donc si $|\lambda - 1|$ est assez petit, $z^\lambda(T) > 0$, i.e.

$$u_{\lambda\Psi}(T) > \Psi \text{ si } \lambda > 1, \quad u_{\lambda\Psi}(T) < \Psi \text{ si } \lambda < 1.$$

Dans les deux cas, $u_{\lambda\Psi}$ explose. (Ψ est instable par le haut et pas le bas.)

On a donc terminé si l'on montre que

$$\mathcal{I} = \int_{\Omega} \Psi \varphi_1 \neq 0$$

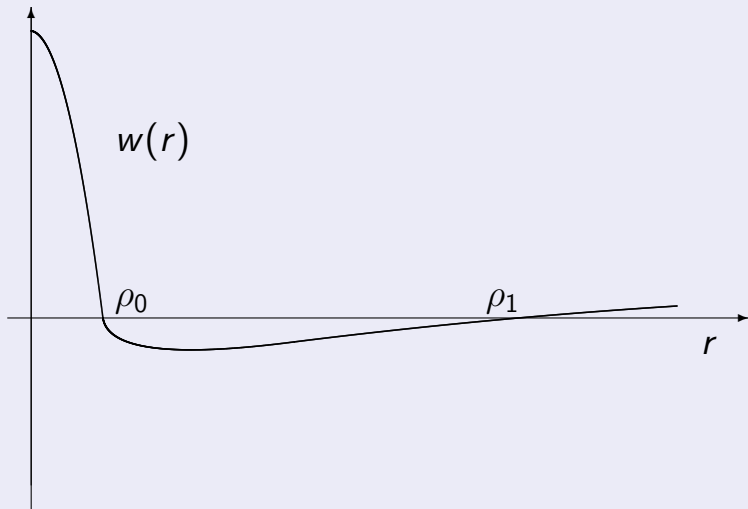
Preuve (3)

Nous montrons que si $\alpha \approx 4/(N-2)$, alors $\mathcal{I} > 0$. (C'est là que nous utilisons l'hypothèse radiale.)

Ψ est donné, après changement d'échelle, par la solution w de

$$\begin{cases} w'' + \frac{N-1}{r} w' + |w|^\alpha w = 0, \\ w(0) = 1, \quad w'(0) = 0. \end{cases}$$

Preuve (4)



Preuve (5)

- Lorsque $\alpha \uparrow \alpha_* = 4/(N-2)$, on a $w \rightarrow w_*$, où $w_*(r) = \left(1 + \frac{1}{N(N-2)}r^2\right)^{-\frac{N-2}{2}} > 0$ est la solution pour $\alpha = \alpha_*$.
- Si ψ_* désigne le premier vecteur propre de $-\Delta - (\alpha_* + 1)w_*^{\alpha_*}$ dans \mathbb{R}^N tel que $\psi_*(0) = 1$, alors $\int_{\mathbb{R}^N} w_* \psi_* > 0$.
- Un argument de passage à la limite montre que $\mathcal{I} > 0$ pour $\alpha \approx \alpha_*$. □

Quelques problèmes ouverts

- A-t-on la même conclusion pour α petit? Pour tous les $0 < \alpha < 4/(N - 2)$?
- A-t-on la même conclusion en dimension $N = 2$ pour α grand? Pour α petit? Pour tous les $\alpha > 0$?
- A-t-on des résultats du même genre dans le cas non-radial?
- Pour d'autres données φ , à quoi ressemble $\{\lambda > 0 : \lambda\varphi \in \mathcal{G}\}$? (OK si l'on remplace Ψ par $w(T)$ où $w(t) \rightarrow \Psi$ lorsque $t \rightarrow \infty$ et T assez grand.)
- Que dire lorsque $\alpha \geq 4/(N - 2)$?

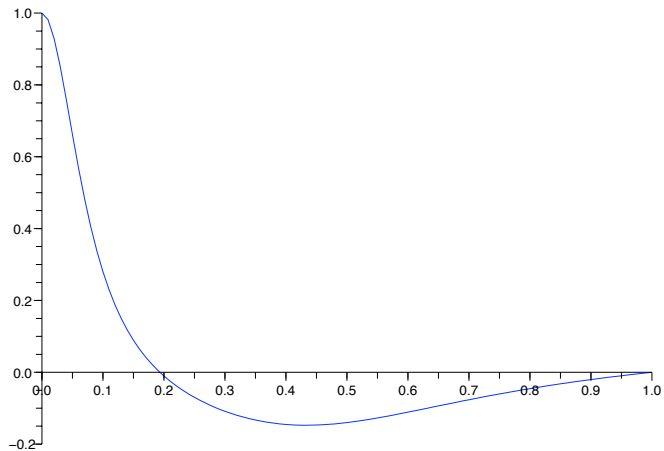
Un dessin de Ψ et φ_1

$N = 3$, $\alpha = 2$, solution stationnaire à un nœud

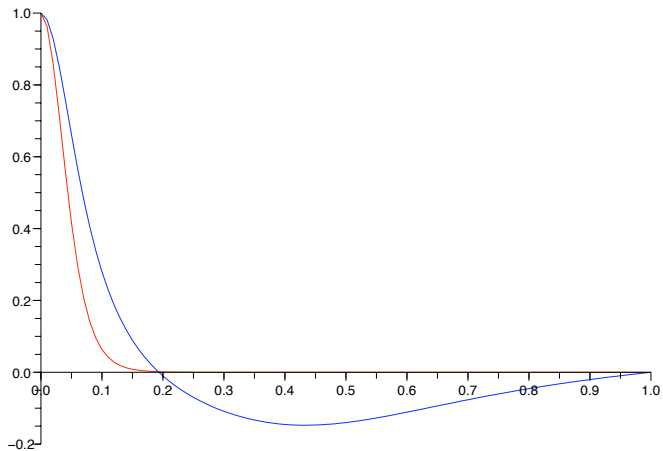
Courbe bleue: $\Psi/\Psi(0)$. [$\Psi(0) \approx 35$]

Courbe rouge: φ_1 . [$\lambda_1 \approx -1000$]

Un dessin de Ψ et φ_1



Un dessin de Ψ et φ_1



Deux films

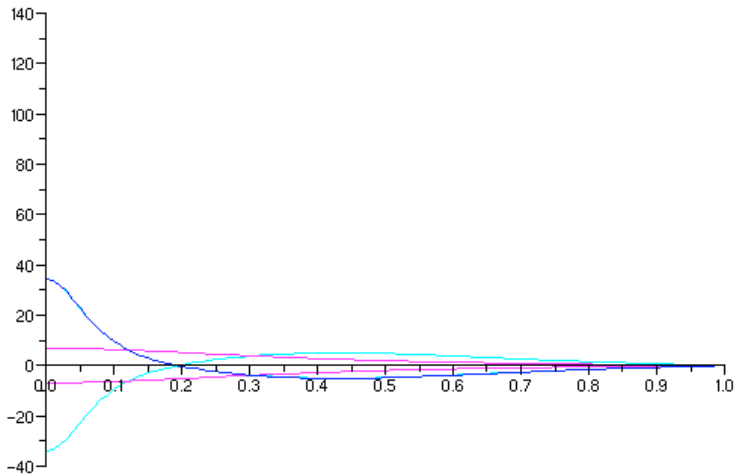
$N = 3$, $\alpha = 2$, solution stationnaire à un nœud

Film 1: $\lambda = 1.01$

Film 2: $\lambda = 0.99$

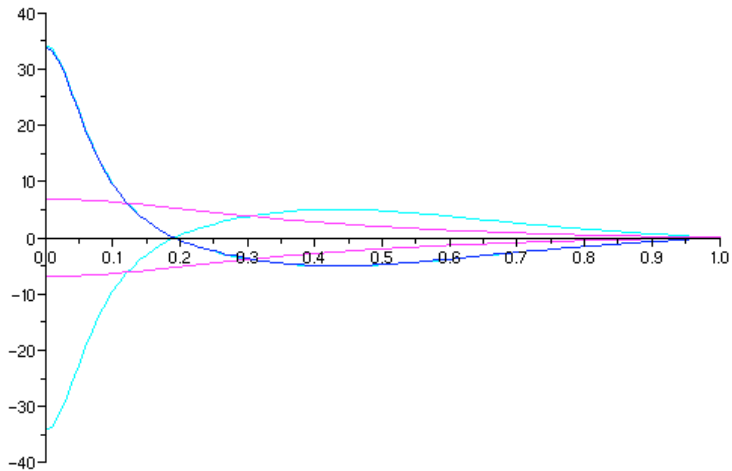
Film 1

Film 1: $\lambda = 1.01$



Film 2

Film 2: $\lambda = 0.99$



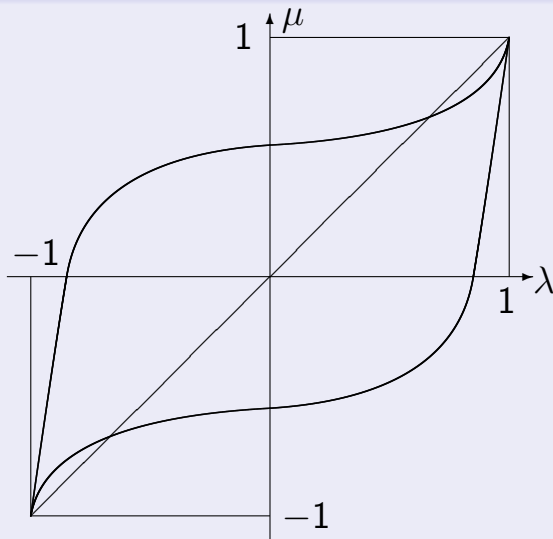
Une coupe bi-dimensionnelle de \mathcal{G}

Soit Ψ la solution stationnaire à un nœud telle que $\Psi(0) > 0$. Voici le dessin de l'intersection de l'ensemble \mathcal{G} avec le sous-espace bi-dimensionnel de $C_0(\Omega)$ défini par

$$\{\varphi; \exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \varphi = \lambda\Psi^+ - \mu\Psi^-\}$$

(Il ne s'agit pas du résultat de calculs numériques.)

Une coupe bi-dimensionnelle de \mathcal{G}



Commentaires

- Les courbes du haut et du bas $\bar{\mu}, \underline{\mu}$ sont continues $[0, 1] \rightarrow [0, 1]$.
- Le dessin est symétrique par rapport à l'origine, i.e. $\bar{\mu}(\lambda) = -\underline{\mu}(-\lambda)$.
- Les fonctions $\bar{\mu} > \underline{\mu}$ sont C^1 en ± 1 et $\bar{\mu}'(1) = \underline{\mu}'(1)$.
- En particulier, la coupe de \mathcal{G} est simplement connexe et n'est **pas** convexe.
- A l'intérieur de la coupe, les solutions correspondantes convergent vers 0.

Commentaires (2)

- La solution stationnaire Ψ est dans la fermeture de l'ensemble $\{\varphi \in \mathcal{G}; u_\varphi(t) \rightarrow 0\}$. C'est vrai pour toutes les solutions stationnaires radiales (Bartsch, Poláčik, Quittner).
- Si $N \geq 3$ et $\alpha \approx 4/(N - 2)$, alors $\bar{\mu}'(1) > 1$.
- Si $N = 1$ alors $\bar{\mu}'(1) = 1$. En fait, le dessin est symétrique par rapport à la diagonale.
- La figure basée sur les calculs numériques est beaucoup moins lisible.

Commentaires (3)

Corollaire

$(N \geq 1, 0 < \alpha < 4/(N - 2).)$ *L'ensemble \mathcal{G} n'est pas convexe.*

Autres problèmes ouverts:

Est-ce que toute solution stationnaire (non-radiale) appartient à la fermeture de $\{\varphi \in \mathcal{G}; u_\varphi(t) \rightarrow 0\}$?
 \mathcal{G} est-il connexe? Simplement connexe?