ANNUAIRE du COLLÈGE DE FRANCE 2016 - 2017

Résumé des cours et travaux

117e année

COLLÈGE DE FRANCE
1530

Équations aux dérivées partielles et applications

Pierre-Louis Lions

Membre de l'Institut (Académie des sciences),
professeur au Collège de France

Mots-clés : équations aux dérivées partielles, applications, singularité, discontinuité, équations de HJB

La série de cours et séminaires « Équations de HJB et extensions de la théorie classique du contrôle stochastique » est disponible, en audio et/ou en vidéo, sur le site internet du Collège de France (https://www.college-de-france.fr/site/pierre-louis-lions/course-2016-2017.htm) ainsi que le colloque « À la mémoire de Jean-Christophe Yoccoz » (https://www.college-de-france.fr/site/pierre-louis-lions/symposium-2016-2017.htm).

Enseignement

Cours – Équations de HJB et extensions de la théorie classique du contrôle stochastique

Le cours a eu lieu du 21 octobre 2016 au 30 janvier 2017.

Introduction

Le cours de cette année a notamment porté sur deux extensions de la théorie classique du contrôle optimal stochastique, à savoir d'une part sur le contrôle de processus conditionnés et d'autre part sur le contrôle avec apprentissage. Les deux extensions correspondent à des besoins naturels pour beaucoup de situations applicatives, notamment en économie où le premier thème correspond à ce que l'on appelle la « rationalité bornée ». Nous ne présentons ici qu'un bref résumé des principaux résultats établis dans le cours.

Contrôle de processus conditionnés

Nous nous intéressons ici aux processus stochastiques contrôlés dans des situations où la fonction coût ne tient pas compte d'un événement qui peut se produire. Plus précisément, le coût est calculé conditionnellement au fait que cet événement ne se produise pas. Lorsqu'il s'agit d'un événement « statique », il est en général possible de se ramener à une situation relevant de la programmation dynamique. En revanche, les situations dans lesquelles cet événement est dynamique sont plus délicates et nous avons décrit dans le cours une situation typique des difficultés et des résultats que l'on peut obtenir.

Nous considérons un système dont l'état X_t résout l'équation différentielle stochastique suivante pour $t \in [0, T]$

$$dX_t = dW_t + \alpha_t dt, \;\; X_0 = x = D \tag{1}$$

où $T \in]0, \infty]$, D est un domaine ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^d (d \geq 1)$, W_t est un mouvement brownien dans un espace de Wiener canonique $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P, W_t)$ et α_t est le contrôle que nous allons considérer ici être de la forme « feedback » *i.e.* $\alpha_t = \alpha(X_t, t)$ et $\alpha \in L^\infty(D \times]0, T[)$.

On note τ_x le premier temps de sortie de D du processus X_t *i.e.* $\tau_x = \inf(t \geq 0, X_t \notin D)$. Et on s'intéresse (par exemple) aux deux situations suivantes :

$$\inf \left\{ E\{g(X_T)/\tau_x > T \right\} \tag{2}$$

et

$$\inf \alpha \left\{ \int_0^T E\{f(X_t) + \frac{1}{2} |\alpha_t|^2 / \tau_x > t\} + E\{g(X_T)/\tau_x > T\} \right\} \tag{3}$$

en notant bien sûr $E[X|Y] = E[XY]/E[Y]$. Les fonctions f et g sont données et régulières sur $\overline{D}$.

On introduit la loi du processus X_t arrêté en τ_x *i.e.* la solution p de l'équation

$$\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{1}{2} \Delta p + \operatorname{div}(\alpha p) = 0 \;\text{ dans } D \times]0, T[\tag{4}$$

avec les conditions

$$p = 0 \;\text{ sur }\; \partial D \times]0, T[\tag{5}$$

$$p|_{t=0} = \mathcal{L}(X_0) \tag{6}$$

Et on démontre les résultats suivants :

Proposition 1 : Il existe un contrôle optimal pour (2). De plus, pour tout contrôle optimal α, $\alpha = -\nabla u / |\nabla u|$ (si $|\nabla u| \neq 0$, sinon α est quelconque vérifiant $|\alpha| \leq L$) où u résout

$$-\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{2} \Delta u + L |\nabla u| = 0 \;\text{ dans }\; D \times]0, T[, \tag{7}$$

$$u = 0 \;\text{ sur }\; \partial D \times]0, T[\tag{8}$$

et

$$u|_{t=T} = g\left(\int p\right)^{-1} - \left(\int gp\right)\left(\int p\right)^{-2} \tag{9}$$

Proposition 2 : Il existe un contrôle optimal pour (3). De plus, pour tout contrôle optimal α, $\alpha = -(\int p)^{-1}\nabla u$ où u résout (8), (9) et

$$-\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{2}\Delta u + \frac{1}{2}(\int p)|\nabla u|^2 = f(\int p)^{-1} - (\int (f + \frac{1}{2}|\alpha|^2)p)(\int p)^{-2} \text{ dans } D\times]0,T[. \tag{10}$$

Les systèmes d'optimalité, c'est-à-dire les systèmes d'équations vérifiées par (u, p), sont de type « Mean Field Games », ce qui est naturel puisqu'ils correspondent à des problèmes de contrôle optimal d'équations de type Fokker-Planck.

Dans le cours, nous avons également analysé différentes limites : i) si $D = \{X \in \mathbb{R}^d / |X| < R\}$, quand on fait tendre R vers l'infini, les problèmes précédents deviennent des problèmes classiques de contrôle optimal stochastique que l'on peut aborder grâce à la programmation dynamique, et ii) la limite quand T tend vers l'infini : pour ce faire nous avons été amené à introduire et caractériser une nouvelle notion de « première fonction propre » pour des opérateurs elliptiques dont les coefficients dépendent du temps ($-\frac{1}{2}\Delta + \alpha.\nabla$ où $\alpha \in L^\infty(D \times \mathbb{R})$).

Contrôle stochastique bayesien

Ce thème correspond à une question naturelle à savoir la modélisation (et l'analyse mathématique) de situations de contrôle stochastique avec apprentissage. On a montré dans le cours que ces situations pouvaient être abordées grâce à la théorie du contrôle stochastique avec information partielle. Les liens ont été mis en lumière à travers l'exemple simple suivant (même si dans le cours le cas général a été abordé par la suite) : l'état du système (dans $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$) est donné par

$$dX_t = a\alpha_t dt + dW_t,\ X_0 = x \in \mathbb{R}^d \tag{11}$$

où W_t est un mouvement brownien standard non connu (non observé) du contrôleur, a est un paramètre inconnu dans $\mathbb{R}^d$ également inconnu et α_t – le contrôle – est un processus adapté à la filtration engendrée par l'observation à savoir le processus X_t. On supposera toujours pour simplifier que le contrôle α_t est borné.

Dans un tel cadre, l'apprentissage bayesien consiste en le choix d'une probabilité (a priori) sur $\mathbb{R}^d$ notée μ_0 sur le paramètre a et cette probabilité évolue (grâce aux observations) par les règles de Bayes sur les probabilités conditionnelles. Et on obtient l'évolution suivante sur la probabilité μ_t sur le paramètre a

$$d\mu_t = \mu_t(a - \int bd\mu_t(b))\alpha_t dX_t - (\int bd\mu_t(b))(a - \int bd\mu_t(b)) \cdot \alpha_t^2 \mu_t dt \tag{12}$$

Il est utile d'introduire la densité $d\nu_t$ (non normalisée) définie par $\nu_0 = \mu_0$ et par l'équation

$$d\nu_t = \nu_t\, \alpha_t\, adX_t \tag{13}$$

c'est-à-dire $\nu_t = \exp(a\int_0^t \alpha_s dX_s - \frac{1}{2}|a|^2 \int_0^t |\alpha_s|^2\, ds)\nu_0$. Et on peut vérifier que

$$\mu_t = \nu_t / (\int d\nu_t(b)) \tag{14}$$

On voit que le support de ν_t (et de μ_t) est contenu dans le support de μ_0, que μ_t est une gaussienne si μ_0 l'est et que si μ_0 est une combinaison de masses de Dirac alors μ_t l'est aussi (pour les mêmes points). L'évolution (13)-(14) permet aussi d'étudier, en prenant α_t constant, le comportement en temps long de μ_t et de vérifier en quel sens l'apprentissage bayesien révèle la « vraie » valeur de a.

Pour formuler le problème de contrôle stochastique, l'approche générale du contrôle stochastique avec information partielle conduit au problème suivant (via le théorème de Girsanov)

$$\inf_{\alpha_t \in A} E[\int_0^\infty e^{-\rho t} L(X_t,\alpha_t)(\int f_t db)] = U(x,f) \tag{15}$$

où $\mathcal{A}$ est la classe des contrôles admissibles (adaptés) à la filtration engendrée par un mouvement brownien B_t standard, prenant p.s. leurs valeurs dans un ensemble A donné de $\mathbb{R}^d$ (fermé et borné par exemple), où $L(x,\alpha)$ est une fonction coût donnée sur $\mathbb{R}^d \times A$ (minorée par exemple), $f_t = \nu_t$ résout (13) que l'on interprète alors comme l'équation de Zakaï (dans cet exemple...) et $X_t = x + B_t$. On est alors ramené à un problème de contrôle stochastique « classique » où les variables d'état sont $x \in \mathbb{R}^d$ et $f \in P(\mathbb{R}^d)$ (espace des mesures de probabilité sur $\mathbb{R}^d$). Il peut être abordé, via le principe de la programmation dynamique, en résolvant l'équation correspondante de Hamilton-Jacobi-Bellman qui, dans ce cas, est posée dans un espace de dimension infinie.

Dans le cadre de l'exemple considéré , il est possible de se ramener à une équation de Hamilton-Jacobi-Bellman en dimension finie. On introduit à cet effet la fonction auxiliaire suivante

$$\Psi(z,\lambda) = \int e^{a\cdot z - |a|^2 \lambda}\, df(a) \quad \forall z \in \mathbb{R}^d, \forall \lambda \geq 0 \tag{16}$$

(en supposant que $f = \nu_0$ « décroît » suffisamment vite à l'infini). Et on suppose pour simplifier que f est à support compact. On peut alors reformuler le problème de contrôle précédent :

$$V(x,z) = \inf_{\alpha_t \in A} \; E[\int_0^\infty e^{-\rho t} L(x_t,\alpha_t)\Psi(z_t,\lambda_t)] \tag{17}$$

où

$$dx_t = dB_t,\, dz_t = \alpha_t dB_t,\, d\lambda_t = |\alpha_t|^2\, dt \tag{18}$$

avec $x_0 = x \in \mathbb{R}^d$, $z_t = z \in \mathbb{R}^d$, $\lambda_t = \lambda \geq 0$.

Et il nous faut alors résoudre l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman suivante dans $\mathbb{R}^{2d} \times [0, +\infty[$:

$$\begin{cases} \rho V + \sup_{\alpha \in A}\{-\frac{1}{2}\Delta v - \sum_{i=1}^d \frac{\alpha_i^{-2}}{2}\, \frac{\partial^2 V}{\partial z_i^2} - \sum_{i=1}^d \alpha_i \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial z_i} - |\,x\,|^2\, \frac{\partial V}{\partial \lambda} + \\ \qquad + L(x,\alpha)\Psi(z,\lambda) = 0. \end{cases} \tag{19}$$

Cette réduction en dimension finie introduit néanmoins une autre difficulté lié à la connaissance à l'infini de la fonction Ψ que l'on contourne en posant

$$V = \Psi(z,\lambda)u(x,s,\lambda).$$

On obtient alors la nouvelle équation suivante (où on pose $F_i = \frac{\partial}{\partial z_i} \operatorname{Log} \Psi(z,\lambda)$)

$$\begin{cases} \int u - \frac{1}{2}u + \sup_{\alpha\in A} \Big\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{d} \alpha_i^2 \frac{\partial_u^2}{\partial z_i^2} - |\alpha|^2 \frac{\partial u}{\partial \lambda} - \sum_{i=1}^{d} \alpha_i \frac{\partial_u^2}{\partial x_i \partial \lambda} + \\ \qquad -\sum_{i=1}^{d} \alpha_i F_i \frac{\partial u}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^{d} \alpha_i^2 F_i \frac{\partial u}{\partial z_i} - L(x,\alpha) \Big\} = 0. \end{cases} \tag{20}$$

Cette équation peut alors être résolue grâce à la théorie des solutions de viscosité en supposant par exemple que F est « croissance au plus linéaire à l'infini » en z (ce qui est le cas si f est à support compact).

Séminaire de mathématiques appliquées

• 18 novembre 2016 : Pierre-Louis Lions (Collège de France), « Du nouveau sur les lois de conservation scalaires ? »
• 25 novembre 2016 : Émeric Bouin (université Paris-Dauphine), « Grandes déviations pour des processus de sauts en vitesses et équation de Hamilton-Jacobi »
• 2 décembre 2016 : Antoine Levitt (INRIA-Paris), « Construction robuste de fonctions de Wannier pour le calcul de structure électronique »
• 9 décembre 2016 : Vincent Calvez (ENS-Lyon), « Mouvement collectif de bactéries et ondes progressives pour un modèle couplé cinétique/parabolique »
• 6 janvier 2017 : Jean-Michel Coron (université Paris 6), « Stabilisation en temps fini »
• 13 janvier 2017 : Pierre-Emmanuel Jabin (université du Maryland), « Solutions faibles pour les équations de Navier-Stokes compressibles avec loi d'état instable »
• 20 janvier 2017 : Charles Bertucci (université Paris-Dauphine), « Arrêt optimal et contrôle impulsionnel dans les jeux à champ moyen »
• 27 janvier 2017 : Christophe Prange (université de Bordeaux), « Couches limites en homogénéisation : estimations quantitatives »
• 24 février 2017 : Benjamin Jourdain (ENPC), « Particules collantes multitypes et systèmes hyperboliques diagonaux »
• 3 mars 2017 : Ralf Hiptmair (ETH Zurich), « Multi-trace boundary integral formulations »
• 10 mars 2017 : Francesco Salvarani (université de Pavie & université Paris-Dauphine), « Jeux cinétiques »
• 17 mars 2017 : Yan Guo (Brown University), « Steady Prandtl theory over a moving plate »
• 24 mars 2017 : Ulrich Hetmaniuk (université de Washington), « Application d'idées de la synthèse modale à une classe d'éléments finis multi-échelle »
• 21 avril 2017 : Daniela Tonon (université Paris-Dauphine), « Jeux à champ moyen agrégatifs »
• 28 avril 2017 : Lucilla Corrias (université d'Évry Val d'Essonne), « Tas de sable en équilibre sur un réseau hétérogène »
• 5 mai 2017 : Clémence Alasseur (EDF R&D - FIME), « An adverse selection approach to power tarification »
• 12 mai 2017 : Miguel Escobedo (University of the Basque Country), « Non existence of non negative fundamental solutions to critical Growth-Fragmentation equations »

• 19 mai 2017 : Zhenjie Ren (université Paris-Dauphine), « Viscosity Solution to Path-dependent PDE »
• juin 2017 : David Gontier (université Paris-Dauphine), « Résonance d'une bulle dans l'eau, et métasurfaces »
• 9 juin 2017 : Sonia Fliss (ENSTA ParisTech), « The half space matching method to solve scattering problem in complex unbounded media »

Recherche

Missions, invitations, conférences

• Exposé au séminaire du laboratoire Jacques-Louis Lions, université Pierre et Marie Curie, Paris, 16 septembre 2016.
• Exposé à la conférence à la mémoire de Ennio De Giorgi, Pise, 19 septembre 2016.
• Série de cinq conférences à l'université de Chicago du 3 au 14 octobre 2016.
• Louis Bachelier Fellow, Paris, 16 octobre 2016.
• Exposé au séminaire de mathématiques appliquées, Collège de France, Paris, 18 novembre 2016.
• Conférence au Workshop « PDE Models for Multi-agent phenomena », Rome, 28 novembre 2016.
• Conférence « Fields Medal Talk » (50e anniversaire du CORE), Louvain-la-Neuve, 14 décembre 2016.
• Conférence au congrès en l'honneur de Yann Brenier, IHP, Paris, 10 janvier 2017.
• Série de quatre conférences à l'université de Chicago (23 janvier-3 février 2017).
• IAS Distinguished Lecture, City University of Hong Kong, 2 mars 2017.
• Conférence au congrès « PDE and Probability Methods for Interactions », Sophia Antipolis, 30-31 mars 2017.
• Exposé au colloque à la mémoire de Jean-Christophe Yoccoz, Collège de France, Paris, 1er juin 2017.
• Conférence au congrès SCPDE, Hong Kong, 7 juin 2017.
• Conférence au congrès SIAB, Toulouse, 9 juin 2017.
• Conférence au congrès MFG4, Rome, 15 juin 2017.
• Conférence au congrès « Fluids, dispersion and blow up », IHP, Paris, 12 juillet 2017.
• Conférence « Ulm Lecture », université de Ulm, 19 juillet 2017.
• Conférence au Colloquium « Waves diffracted » en l'honneur de Patrick Joly, INRIA, Saclay, 29 août 2017.

Publications

Lions P.-L. et Souganidis P.E., Viscosity solutions and stochastic partial differential equations, livre à paraître.

Gabaix X., Lasry J.-M., Lions P.-L. et Moll B., « The dynamics of inequality », *Econometrica*, vol. 84, n° 6, 2016, p. 2071-2111, DOI : 10.3982/ECTA13569.

LIONS P.-L. et LE BRIS C., Parabolic Partial Differential Equations with irregular data and applications to Stochastic Differential Equations, à paraître.

LIONS P.-L., « Singularités et discontinuités dans les équations de Hamilton-Jacobi », *Annuaire du Collège de France 2015-2016. Résumé des cours et travaux*, nº 116, 2018, p. 21-26.

FRIZ P.K., GASSIAT P., LIONS P.-L. et SOUGANIDIS P.E., « Eikonal equations and pathwise solutions to fully non-linear SPDEs », *Stochastics and Partial Differential Equations: Analysis and Computations*, vol. 5, n° 2, 2016, p. 256-277, DOI : 10.1007/s40072-016-0087-9, [arXiv: 1602.04746 hal-01419770].

LIONS P.-L., CARDALIAGUET P., DELAUNE F. et LASRY J.-M., « Existence and uniqueness results for the Master equation of Mean Field Games ».

LIONS P.-L. et SOUGANIDIS P.E., « Viscosity solutions for junctions: well posedness and stability », *Matematica e Applicazioni*, vol. 27, n° 4, 2016, p. 535-545, DOI : 10.4171/RLM/747 [arXiv:1608.03682].

ACHDOU Y., GIRAUD P.-N., LASRY J.-M. et LIONS P.-L., « A long-term mathematical model for mining industries », *Applied Mathematics and Optimization*, vol. 74, n° 3, 2016, p. 579-618, DOI : 10.1007/s00245-016-9390-0.

ACHDOU Y., HAN J., LASRY J.-M., LIONS P.-L. et MOLL B., « Income and wealth distribution in macroeconomics: A continuous-time approach », *National Bureau of Economic Research*, 2017, http://www.nber.org/papers/w23732.

LIONS P.-L. et SOUGANIDIS P., « Well-posedness for multi-dimensional junction problems with Kirchoff-type conditions », *Matematica e Applicazioni*, vol. 28, n° 4, 2017, p. 807-816, DOI : 10.4171/RLM/786 [arXiv:1704.04001].