

# Contrôle par feedback en optique quantique

Mazyar Mirrahimi

INRIA Rocquencourt

10 Avril 2009

# Plan de l'exposé

- 1 Modèles stochastiques en physique quantique
- 2 1er type d'expériences de feedback quantique : systèmes de spin  $N$   
en collaboration avec R. van Handel (Princeton) et H. Mabuchi (Stanford)
- 3 2ème type d'expériences de feedback quantique : états de Fock dans une cavité micro-onde  
en collaboration avec P. Rouchon (Mines), I. Dotsenko (ENS), M. Brune (ENS), S. Haroche (ENS, CdF), J-M. Raimond (ENS)
- 4 Conclusion

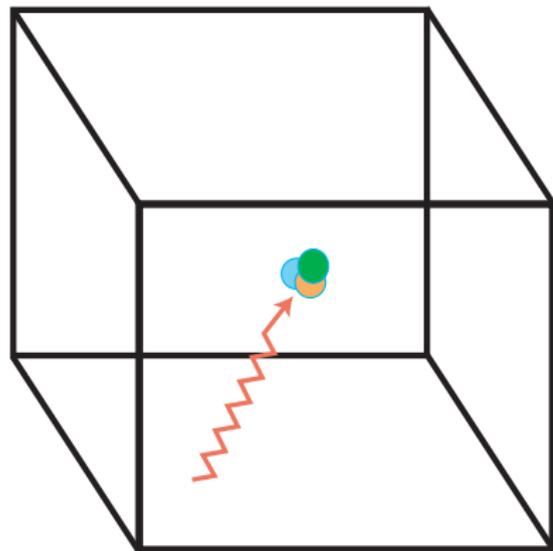
## État quantique

(fonction d'onde, matrice densité, fonction de Wigner)



**État de connaissance**  
d'un observateur du système physique

# Système quantique isolé dans une boîte noire



## Équation de Schrödinger

$$i \frac{d}{dt} \Psi = H \Psi,$$

$\Psi \in \mathcal{H}$  : fonction d'onde,

$H$  : opérateur hermitien,

$$\|\Psi\|_{\mathcal{H}} = 1.$$

ou de façon équivalente

$$i \frac{d}{dt} \rho = [H, \rho],$$

$\rho$  : l'opérateur de projection  
sur  $\Psi$

$$[H, \rho] = H\rho - \rho H, \quad \text{Tr}(\rho) = 1.$$

# Système quantique ouvert dans une boîte noire

Système à 2 niveaux :  $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$

**Émission spontanée** : couplage avec les fluctuations quantiques du vide

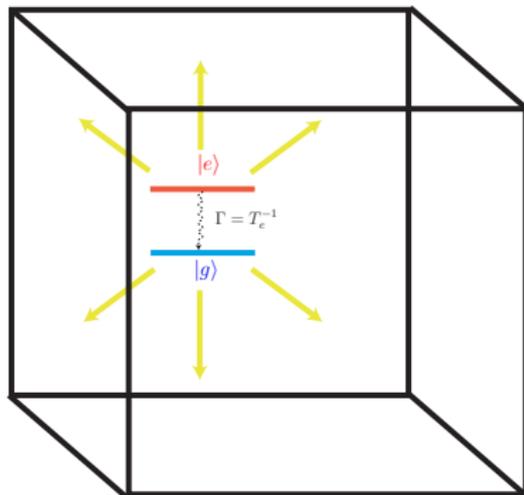
État de connaissance

$\leftrightarrow$

**Équation de Lindblad**

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\rho &= -i[H, \rho] \\ &+ \frac{\Gamma}{2}(2\sigma\rho\sigma^\dagger - \sigma^\dagger\sigma\rho - \rho\sigma^\dagger\sigma), \end{aligned}$$

$$\sigma = |g\rangle\langle e|.$$



## Détecteur parfait

Probabilité d'un click entre  $t$  et  $t+dt$  :

$$\Gamma \text{Tr}(|e\rangle \langle e| \rho(t)) dt = \Gamma \text{Tr}(\sigma \rho(t) \sigma^\dagger) dt.$$

Click du photo-détecteur :

$$\rho(t+dt) = |g\rangle \langle g| = \frac{\sigma \rho(t) \sigma^\dagger}{\text{Tr}(\sigma \rho(t) \sigma^\dagger)}$$

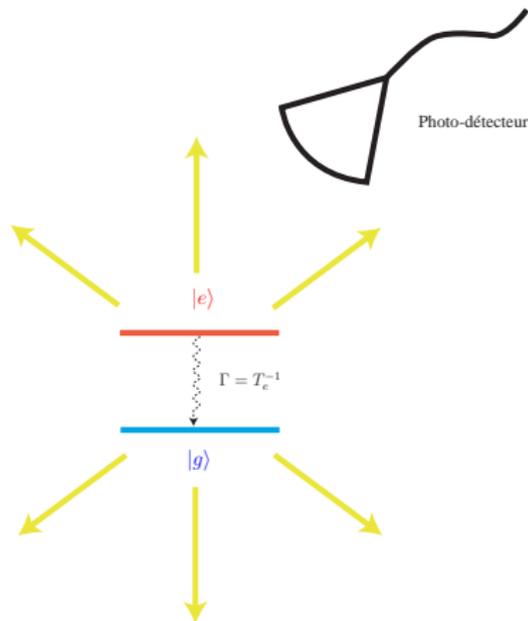
ou de façon équivalente

$$d\rho = \frac{\sigma \rho(t) \sigma^\dagger}{\text{Tr}(\sigma \rho \sigma^\dagger)} - \rho$$

Pas de click du photo-détecteur :

pas de saut  $\leftrightarrow$  de l'information

$$\partial_t \rho = -i[H, \rho]$$
$$- \frac{\Gamma}{2} (\sigma^\dagger \sigma \rho + \rho \sigma^\dagger \sigma) + \Gamma \text{Tr}(\sigma \rho \sigma^\dagger) \rho.$$



# Système mesuré et équation maîtresse stochastique

## Incrément de Poisson :

$$dN = \begin{cases} 1 & \text{avec la probabilité } \Gamma \text{Tr}(\sigma \rho \sigma^\dagger) dt, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En particulier

$$\mathbb{E}(dN) = \Gamma \text{Tr}(\sigma \rho \sigma^\dagger) dt.$$

## Équation maîtresse stochastique :

$$d\rho = -i[H, \rho]dt - \frac{\Gamma}{2}(\sigma^\dagger \sigma \rho + \rho \sigma^\dagger \sigma)dt + \Gamma \text{Tr}(\sigma \rho \sigma^\dagger) \rho dt + \left( \frac{\sigma \rho \sigma^\dagger}{\text{Tr}(\sigma \rho \sigma^\dagger)} - \rho \right) dN_t$$

## Moyenne d'ensemble :

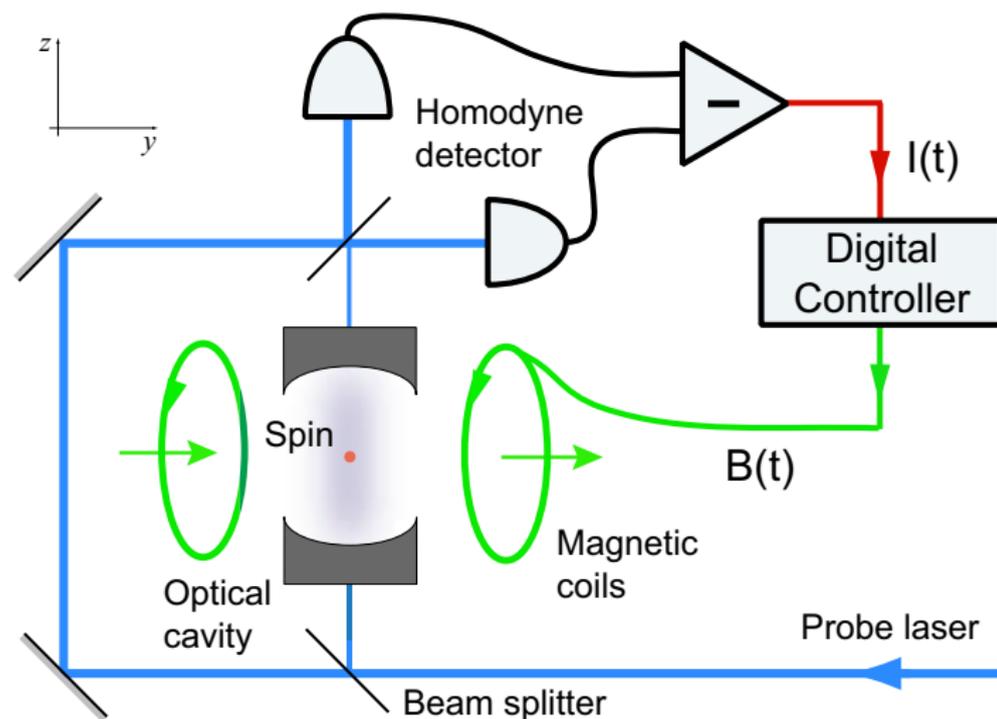
$$\frac{d}{dt} \mathbb{E}(\rho) = -i[H, \mathbb{E}(\rho)] - \frac{\Gamma}{2}(\sigma^\dagger \sigma \mathbb{E}(\rho) + \mathbb{E}(\rho) \sigma^\dagger \sigma - 2\sigma \mathbb{E}(\rho) \sigma^\dagger)$$

## Équation de Lindblad

# Plan de l'exposé

- 1 Modèles stochastiques en physique quantique
- 2 1er type d'expériences de feedback quantique : systèmes de spin  $N$   
en collaboration avec R. van Handel (Princeton) et H. Mabuchi (Stanford)
- 3 2ème type d'expériences de feedback quantique : états de Fock dans une cavité micro-onde  
en collaboration avec P. Rouchon (Mines), I. Dotsenko (ENS), M. Brune (ENS), S. Haroche (ENS, CdF), J-M. Raimond (ENS)
- 4 Conclusion

# Schéma de l'expérience



R. van Handel, J.K. Stockton et H. Mabuchi, IEEE. Trans. Automat. Control, 50, 768-780 (2005).

# Équation maîtresse stochastique

Opérateur de la mesure :  $L$ ,  
Hamiltonien :  $H$ ,

$$d\rho = -i[H, \rho]dt + \frac{1}{2}(2L\rho L^\dagger - L^\dagger L\rho - \rho L^\dagger L)dt \\ + (L\rho_t + \rho_t L^* - \text{Tr}(\rho_t(L + L^*))\rho_t)dW_t.$$

où

$$dW_t = dY_t - \text{Tr}(\rho_t(L + L^*)) dt$$

est un processus de Wiener !!

R. van Handel, J.K. Stockton et H. Mabuchi, IEEE. Trans. Automat. Control, 50, 768-780 (2005).

# Système de moments angulaires

Configuration des champs optique et magnétique pour qu'ils n'interagissent qu'avec les degrés de liberté des moments angulaires collectifs des atomes

$$d\rho_t = -i[H, \rho_t]dt + \frac{1}{2}(2L\rho_t L^\dagger - L^\dagger L\rho_t - \rho_t L^\dagger L)dt + (L\rho_t + \rho_t L^* - \text{Tr}(\rho_t(L + L^*))\rho_t)dW_t.$$

Un système de spin  $N$  :  $\mathcal{H} = \mathbb{C}^{2N+1}$

Matrice densité :  $\rho_t \in \mathbb{C}^{2N+1}$ ,

Hamiltonien :  $H = u(t)J_y$ ,

Opérateur de mesure :  $L = J_z$ .

# Système de moments angulaires

$$d\rho_t = -iu_t[J_y, \rho_t]dt + (J_z\rho_t J_z - \frac{1}{2}J_z^2\rho_t - \frac{1}{2}\rho_t J_z^2)dt \\ + (J_z\rho_t + \rho_t J_z - 2\text{Tr}(J_z\rho_t)\rho_t)dW_t$$

où

$$J_z = \begin{pmatrix} -N & & & & 0 \\ & -N+1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & N-1 & \\ 0 & & & & N \end{pmatrix}, J_y = \begin{pmatrix} 0 & -ic_{N-1} & & & 0 \\ ic_{-N} & 0 & -ic_{N-2} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & ic_{N-2} & 0 & -ic_{-N} \\ 0 & & & ic_{N-1} & 0 \end{pmatrix}$$

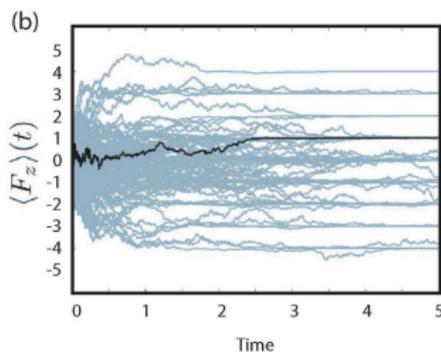
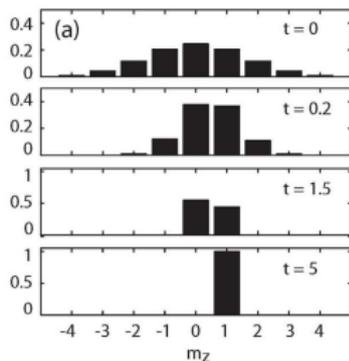
avec

$$c_j = \frac{1}{2}\sqrt{(N-j)(N+j+1)}, \quad j = -N, \dots, N.$$

# Évolution libre

États d'équilibre :  $(\psi_j)_{j=-N}^N$ , états propres de  $J_z$ .

$$u(t) \equiv 0$$



J.K. Stockton, R. van Handel and H. Mabuchi, Phys. Rev. A 70, 022106, (2004).

**Question** : faire mieux que la préparation non-déterministe ...

# Contrôle Lyapunov pour stabiliser $\rho_f$

Choisir  $u_t$  pour que  $\mathbb{E}(V(\rho_t))$  soit décroissante, avec :

$$V(\rho_t) = 1 - \text{Tr}(\rho_t \rho_f).$$

Générateur infinitésimal de la chaîne de Markov

$$\mathcal{A}V(\rho_t) = u_t \text{Tr} (i[J_y, \rho_t] \rho_f) \}.$$

**Une approach possible :**

$$u_t = -\text{Tr} (i[F_y, \rho_t] \rho_f)$$

Alors  $V(\rho_t)$  devient une super-martingale...

# Quelques propriétés

$V(\rho_t) \in [0, 1]$  super-martingale bornée

- $\lim_{t \rightarrow \infty} V(\rho_t)$  existe presque sûrement ;
- $\mathbb{P} - \lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{A}V(\rho_t) = 0$ , i.e.  $\mathcal{A}V(\rho_t) \rightarrow 0$  en probabilité ;
- Inégalité de Doob : pour  $\alpha \leq 1$

$$\mathbb{P} \left( \sup_{0 \leq t < \infty} V(\rho_t) \geq \alpha \right) \leq \frac{V(\rho_0)}{\alpha}.$$

# Théorème d'invariance de Kushner

Sous les hypothèses de continuité

- le processus  $\rho_t$  est Feller continu ( $\mathbb{E}(f(\rho_t) \mid \rho_0)$  est continue par rapport à  $\rho_0$  pour toute fonction  $f$  continue) ;
- $\mathbb{P}(\|\rho_t - \rho_0\| > \epsilon) \rightarrow 0$  lorsque  $t \rightarrow 0$  ;

le processus  $\rho_t$  converge en probabilité vers le plus grand ensemble invariant inclus dans  $\{\mathcal{A}V(\rho) = 0\}$ .

# Application au système de moments angulaires

$$d\rho_t = -iu_t[J_y, \rho_t]dt + (J_z\rho_t J_z - \frac{1}{2}J_z^2\rho_t - \frac{1}{2}\rho_t J_z^2)dt \\ + (J_z\rho_t + \rho_t J_z - 2\text{Tr}(J_z\rho_t)\rho_t)dW_t$$

Générateur infinitésimal avec  $u_t = -\text{Tr}(i[F_y, \rho_t]\rho_f)$

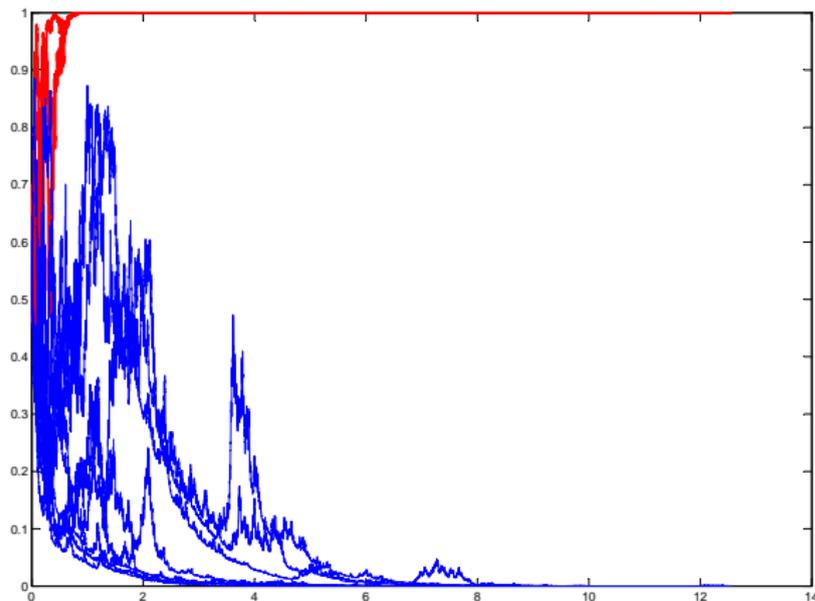
$$\mathcal{A}V(\rho_t) = -|\text{Tr}(i[F_y, \rho_t]\rho_f)|^2.$$

Ensemble  $\omega$ -limit

$$\{\rho_m = \psi_m\psi_m^*\}.$$

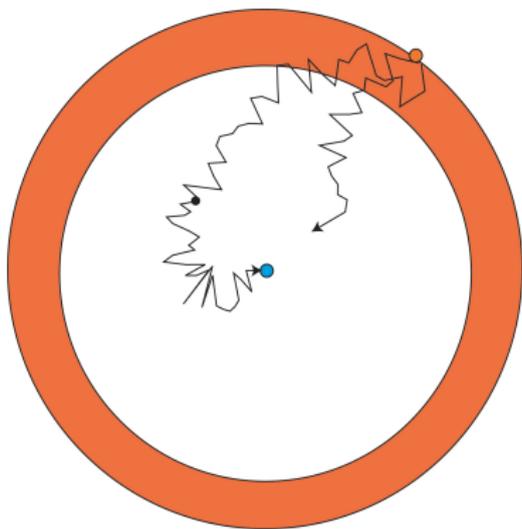
# Mauvais attracteurs

Pas de stabilisation quasi-globale ...



$V(\rho_t)$  converge presque sûrement vers un variable aléatoire prenant comme valeur soit 0 soit 1.

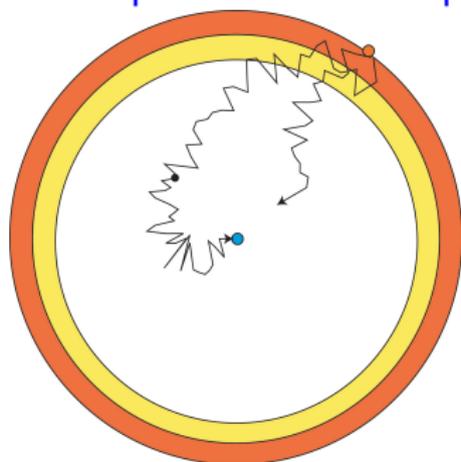
# Changement de stratégie



Éviter les mauvais attracteurs, en prenant un contrôle constant autour de  $V = 1$ .

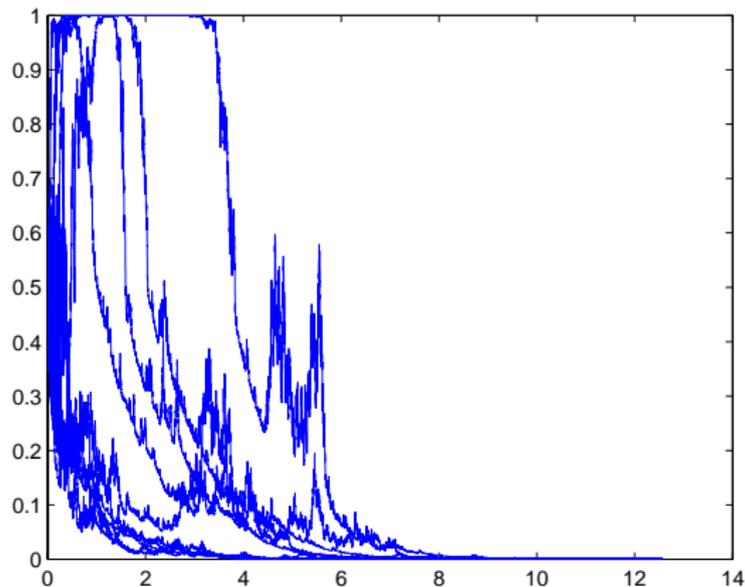
# Nouveau feedback

Rajout d'une hystérésis pour avoir une équation bien-posée



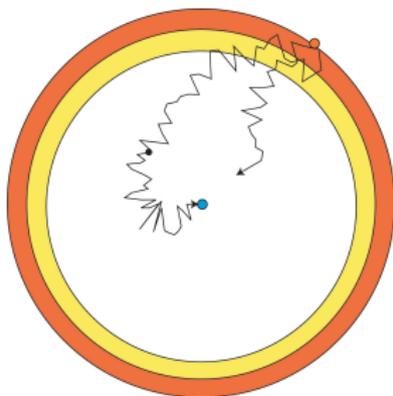
- 1  $u_t = -\text{Tr}(i[J_y, \rho_t]\rho_f)$  si  $V \leq 1 - \gamma$ ;
- 2  $u_t = 1$  si  $V \geq 1 - \gamma/2$ ;
- 3 si  $\rho_t \in \mathcal{B} = \{\rho : 1 - \gamma < V < 1 - \gamma/2\}$ , alors  $u_t = -\text{Tr}(i[J_y, \rho_t]\rho_f)$  si la dernière entrée de  $\rho_t$  dans  $\mathcal{B}$  a été à travers la frontière  $V = 1 - \gamma$ , et  $u_t = 1$  sinon.

# Simulations de Monte-Carlo



Fonction de Lyapunov pour 10 trajectoires aléatoires

# Schéma de preuve



## 3 étapes :

- 1  $u \equiv 1$  assure la sortie des trajectoires de  $\mathcal{S}_1$ .
- 2  $\exists \gamma$  t.q. avec  $u \equiv 1$  l'espérance du temps de sortie de  $\mathcal{S}_{>1-\gamma}$  est fini.
- 3 La probabilité de convergence vers  $\rho_f$  lorsque l'état initial est dans  $\mathcal{S}_{\leq 1-\gamma}$  est plus que  $p > 0$ .

# Étapes 1 et 2

## Théorème de support de Strook-Varadhan+ Contrôlabilité en temps $T$

$\implies$

$\exists t \in [0, T]$  t.q.  $\mathbb{P}(V(\rho_t) \neq 1) > 0$  ou de façon équivalente  
 $\min_{t \in [0, T]} \mathbb{E}(V(\rho_t)) < 1$

$\implies$

Par continuité  $\exists \gamma$  t.q.  $\min_{t \in [0, T]} \mathbb{E}(V(\rho_t)) < 1 - \gamma$  pour  $\rho_0 \in \overline{\mathcal{S}_{\geq 1-\gamma}}$

$\implies$

Par le Théorème de Dynkin  $\sup_{\rho_0 \in \mathcal{S}_{>1-\gamma}} \mathbb{E} \tau_{\rho_0}(\mathcal{S}_{>1-\gamma}) < \infty$  où  $\tau_{\rho_0}(\mathcal{S}_{>1-\gamma})$  est le temps de sortie du processus de l'ensemble  $(\mathcal{S}_{>1-\gamma})$ .

## Étape 3

### Inégalité de Doob

$\implies$

$$\mathbb{P}\left\{ \sup_{0 \leq t < \infty} V(\rho_t) \geq 1 - \gamma/2 \mid V(\rho_0) \leq 1 - \gamma \right\} \leq 1 - p = \frac{1 - \gamma}{1 - \gamma/2} < 1.$$

### Théorème d'invariance de Kushner

$\implies$

Les trajectoires qui restent dans  $\mathcal{S}_{\leq 1-\gamma/2}$  convergent presque sûrement vers  $\rho_f$ .

# Plan de l'exposé

- 1 Modèles stochastiques en physique quantique
- 2 1er type d'expériences de feedback quantique : systèmes de spin  $N$   
en collaboration avec R. van Handel (Princeton) et H. Mabuchi (Stanford)
- 3 2ème type d'expériences de feedback quantique : états de Fock dans une cavité micro-onde  
en collaboration avec P. Rouchon (Mines), I. Dotsenko (ENS), M. Brune (ENS), S. Haroche (ENS, CdF), J-M. Raimond (ENS)
- 4 Conclusion



# Système stochastique discret de dimension infinie

Espace de Hilbert :  $\mathcal{H} = \{ \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle \mid (c_n)_{n=0}^{\infty} \in \ell^2(\mathbb{C}) \}$

État du système :  $\rho_k$  la matrice densité après la mesure de l'atome  $k$

Dynamique :

$$\rho_{k+1/2} = D(\alpha)\rho_k D(\alpha)^\dagger$$
$$\rho_{k+1} = \frac{M_{s_k} \rho_{k+1/2} M_{s_k}^\dagger}{\text{Tr} \left( M_{s_k} \rho_{k+1/2} M_{s_k}^\dagger \right)}, \quad s_k = g, e.$$

où

- $\alpha$  est le contrôle et  $D(\alpha)$  est un opérateur unitaire (semi-groupe d'évolution cohérente),
- $M_g$  et  $M_e$  sont les opérateurs de mesures, fonction du résultat de la mesure dans l'état  $|g\rangle$  ou  $|e\rangle$ ,
- la probabilité de mesurer l'atome  $k$  dans l'état  $|g\rangle$  (resp.  $|e\rangle$ ) est donnée par  $\text{Tr} \left( M_g \rho_{k+1/2} M_g^\dagger \right)$  (resp.  $\text{Tr} \left( M_e \rho_{k+1/2} M_e^\dagger \right)$ ).

# Opérateurs physiques

Opérateurs d'annihilation et de création :

$$a = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & \cdots & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \sqrt{n} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad a^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ \sqrt{1} & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{n+1} & 0 \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

Opérateur de comptage de photons :

$$\mathcal{N} = a^\dagger a = \text{diag}(0, 1, 2, 3, \dots).$$

avec les domaines :

$$\mathcal{D}(a) = \mathcal{D}(a^\dagger) = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle \mid (c_n)_{n=0}^{\infty} \in \mathcal{h}^1(\mathbb{C}) \right\}$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{N}) = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle \mid (c_n)_{n=0}^{\infty} \in \mathcal{h}^2(\mathbb{C}) \right\}$$

où  $\mathcal{h}^k(\mathbb{C}) = \left\{ (c_n)_{n=0}^{\infty} \in \ell^2(\mathbb{C}) \mid \sum_{n=0}^{\infty} n^k |c_n|^2 < \infty \right\}$ .

# Opérateurs d'évolution

Opérateur de déplacement :

$$D(\alpha) = \exp(\alpha(a^\dagger - a)), \quad \text{pour } \alpha \in \mathbb{R},$$

l'opérateur  $a^\dagger - a$  étant anti-autoadjoint et avec un domaine dense dans  $\mathcal{H}$ , il définit un groupe fortement continu d'isométries sur  $\mathcal{H}$ .

Opérateurs de mesure :

$$M_g = \cos\left(\frac{\phi_R + \Phi(\mathcal{N})}{2}\right) = \text{diag}\left(\cos\left(\frac{\phi_R + \Phi(0)}{2}\right), \cos\left(\frac{\phi_R + \Phi(1)}{2}\right), \cos\left(\frac{\phi_R + \Phi(2)}{2}\right), \dots\right),$$

$$M_e = \sin\left(\frac{\phi_R + \Phi(\mathcal{N})}{2}\right) = \text{diag}\left(\sin\left(\frac{\phi_R + \Phi(0)}{2}\right), \sin\left(\frac{\phi_R + \Phi(1)}{2}\right), \sin\left(\frac{\phi_R + \Phi(2)}{2}\right), \dots\right),$$

avec les domaines  $\mathcal{D}(M_g) = \mathcal{D}(M_e) = \mathcal{H}$ .

# Problème de stabilisation

**État initial** : état cohérent  $|\alpha_0\rangle = D(\alpha_0)|0\rangle$ .

**État cible** : état de Fock  $|N_f\rangle$ .

**Contrôle** :  $\alpha_k$  l'injection cohérente après la mesure de l'atome  $k - 1$ .

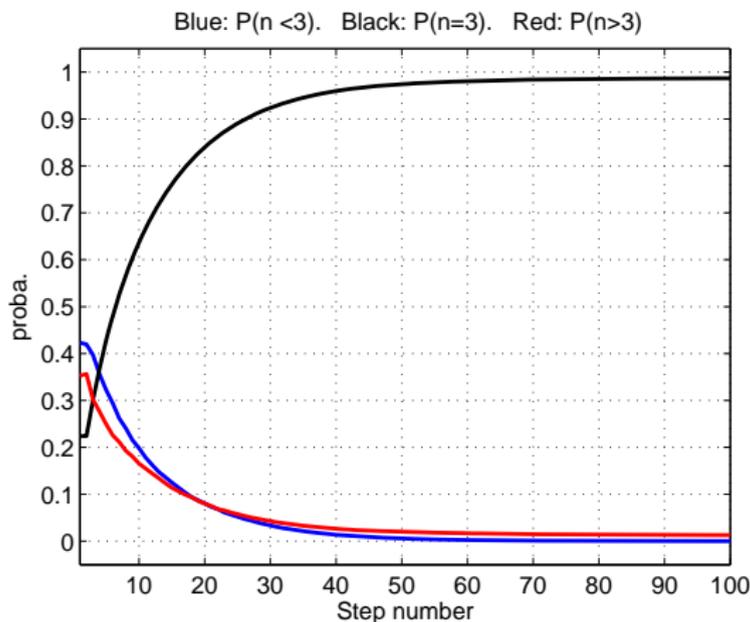
**Sortie** : atome mesuré dans l'état  $|g\rangle$  ou  $|e\rangle$ .

**Stratégie de contrôle** :

$$\alpha_{k+1} = \begin{cases} c \text{Tr} ( [|N_f\rangle \langle N_f|, a^\dagger - a] \rho_k ) & \text{si } \langle N_f | \rho_k | N_f \rangle \geq \epsilon, \\ C & \text{sinon} \end{cases}$$

où  $c > 0$  est une constante suffisamment petite.

# Simulations de Monte-Carlo



La moyenne des populations,  $F_n(\rho_k) = \text{Tr}(|n\rangle \langle n| \rho_k)$ , sur  $10^4$  trajectoires de Monte-Carlo quantiques en boucle fermée.

# Vers une preuve

## Fonction de Lyapunov

$$V(\rho_k) = 1 - \text{Tr}(|N_f\rangle \langle N_f| \rho_k).$$

Nous avons

$$\rho_{k+1} = \begin{cases} \frac{M_g \rho_{k+1/2} M_g^\dagger}{\text{Tr}(M_g \rho_{k+1/2} M_g^\dagger)}, & \text{avec la probabilité } \text{Tr}(M_g \rho_{k+1/2} M_g^\dagger), \\ \frac{M_e \rho_{k+1/2} M_e^\dagger}{\text{Tr}(M_e \rho_{k+1/2} M_e^\dagger)}, & \text{avec la probabilité } \text{Tr}(M_e \rho_{k+1/2} M_e^\dagger), \end{cases}$$

Donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(V(\rho_{k+1}) \mid \rho_{k+1/2}) &= 1 - \text{Tr}(|N_f\rangle \langle N_f| M_g \rho_{k+1/2} M_g^\dagger) - \text{Tr}(|N_f\rangle \langle N_f| M_e \rho_{k+1/2} M_e^\dagger) \\ &= 1 - \text{Tr}(|N_f\rangle \langle N_f| \rho_{k+1/2}) = V(\rho_{k+1/2}), \end{aligned}$$

car

$$M_g^\dagger |N_f\rangle \langle N_f| M_g + M_e^\dagger |N_f\rangle \langle N_f| M_e = |N_f\rangle \langle N_f|.$$

## Vers une preuve (suite)

De plus

$$\rho_{k+1/2} = D(\alpha_k)\rho_k D(-\alpha_k), \quad \text{où } \alpha_k = c \text{Tr} \left( [|N_f\rangle \langle N_f|, a^\dagger - a] \rho_k \right),$$

et nous pouvons démontrer dans  $\mathcal{H}$ , que

$$D(\alpha)\rho D(-\alpha) = \rho - \alpha[\rho, a^\dagger - a] + O(\alpha^2).$$

Donc

$$V(\rho_{k+1/2}) = V(\rho_k) - c \left| \text{Tr} \left( [|N_f\rangle \langle N_f|, a^\dagger - a] \rho_k \right) \right|^2 + \left| \text{Tr} \left( [|N_f\rangle \langle N_f|, a^\dagger - a] \rho_k \right) \right|^2 O(c^2),$$

car  $[|N_f\rangle \langle N_f|, a^\dagger - a]$  est un opérateur borné sur  $\mathcal{H}$ .

Pour  $c > 0$  suffisamment petit

$$V(\rho_{k+1/2}) \leq V(\rho_k) \implies \mathbb{E}(V(\rho_{k+1}) | \rho_k) \leq V(\rho_k)$$

$V(\rho_k)$  est une super-martingale

## Vers une preuve (suite)

Nous avons la convergence presque sûre pour toute approximation Galerkin de dimension finie.

### Obstacle principal pour passer à la dimension infinie

Pour avoir le Théorème d'invariance de Kushner en dimension infinie, il faut montrer que :

Pour toute  $\epsilon > 0$ , il existe un compact  $\mathcal{B}_\epsilon$  de  $\mathcal{H}$  tel que

$$\mathbb{P}(\rho_k \text{ sort du compact } \mathcal{B}_\epsilon) \leq \epsilon.$$

## Une idée (semblable au cas déterministe)

Trouver une nouvelle fonction de Lyapunov  $\mathcal{V}(\rho)$  telle que  $\mathcal{V}(\rho_k)$  soit aussi une super-martingale avec pour tout  $\epsilon$

$$\mathcal{C}_\epsilon = \left\{ \rho \in \mathcal{H} \mid \mathcal{V}(\rho) < \frac{1}{\epsilon} \right\}$$

compact.

Alors par l'inégalité de Doob

$$\mathbb{P}(\rho_k \text{ sort du compact } \mathcal{C}_\epsilon) \leq \epsilon \mathcal{V}(\rho_0).$$

# Plan de l'exposé

- 1 Modèles stochastiques en physique quantique
- 2 1er type d'expériences de feedback quantique : systèmes de spin  $N$   
en collaboration avec R. van Handel (Princeton) et H. Mabuchi (Stanford)
- 3 2ème type d'expériences de feedback quantique : états de Fock dans une cavité micro-onde  
en collaboration avec P. Rouchon (Mines), I. Dotsenko (ENS), M. Brune (ENS), S. Haroche (ENS, CdF), J-M. Raimond (ENS)
- 4 Conclusion

# Conclusion : vers une expérience physique

Cette boucle de feedback devrait être testée expérimentalement au sein du LKB (ENS)

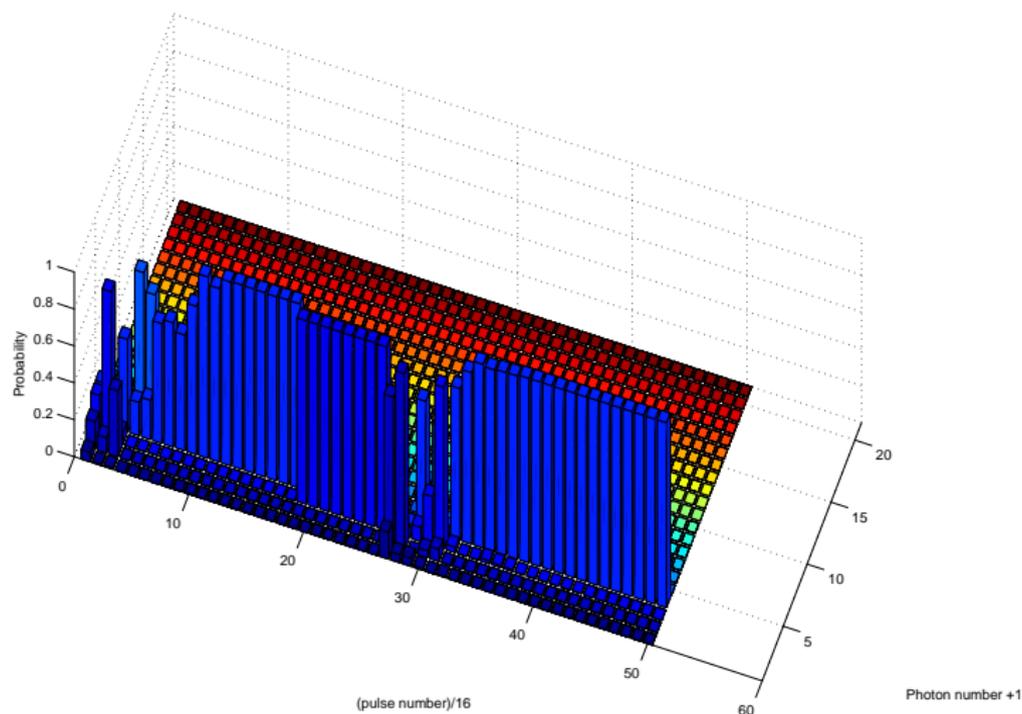
## Propriétés importantes du boucle de feedback

Tout d'abord, une approximation Galerkin à une vingtaine de photons montre une bonne robustesse aux erreurs expérimentales :

- retard pur (4 atomes entre la cavité et le détecteur) compensé par une version quantique du prédicteur de Smith.... ;
- détecteur se trompe une fois sur 10 et ne détecte rien 2 fois sur 10 ;
- pas d'atome 4 fois sur 10 à l'étape  $k$  ;
- absorption par les parois de la cavité d'un photon de temps en temps.

Deuxièmement, L'algorithme de feedback est simple et nous avons le temps de faire les calculs entre 2 pulses ... .

# Conclusion : robustesse en simulation



Simulation de Monte-Carlo avec un retard pur de 4 atomes, une efficacité de détecteur de 80%, un taux de détection fausse de 10%, un taux d'occupation de 40%, et une durée de vie de cavité de 15 ms.

# Conclusion : garanties théoriques

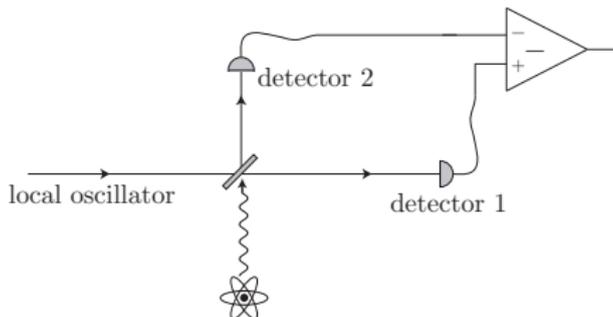
Forte motivation pour étudier le système en boucle fermée avec le filtre quantique, le feedback (structure usuelle de l'observateur-contrôleur), la convergence (principe de séparation) et la robustesse,

- en dimension finie convergence OK, robustesse (OK en simulation mais pas de preuve pour l'instant).
- en dimension infinie convergence et robustesse ?

# Détection homodyne

## Détection homodyne de l'observable physique $L$

### + Limite de Wong-Zakai



$$\begin{aligned}\mathbb{E}(dN_1 - dN_2) &= \frac{1}{2} \left( \text{Tr} \left( (L + \alpha)\rho(L + \alpha)^\dagger \right) - \text{Tr} \left( (L - \alpha)\rho(L - \alpha)^\dagger \right) \right) dt \\ &= \alpha^2 \text{Tr} \left( (L + L^\dagger)\rho(L + L^\dagger) \right) dt.\end{aligned}$$

Limite  $\alpha \rightarrow \infty$  ( $|\alpha|^2$  nombre moyen de photon venant de la lumière cohérente)

$$dN_1 - dN_2 \longrightarrow \alpha^2 \text{Tr} \left( (L + L^\dagger)\rho(L + L^\dagger) \right) dt + \alpha \sqrt{\text{Tr} \left( (L + L^\dagger)\rho(L + L^\dagger) \right)} dW_t.$$