Équations aux dérivées partielles et applications

M. Pierre-Louis LIONS, membre de l'Institut
(Académie des sciences), professeur

COURS : JEUX À CHAMP MOYEN (SUITE)

Le cours a eu lieu du 5 novembre 2010 au 14 janvier 2011.

1. Introduction

Le cours, suite de celui de l'an dernier, poursuit la présentation d'une théorie nouvelle appelée théorie des « jeux à champ moyen », élaborée en collaboration avec M. Jean-Michel Lasry. L'objectif de cette théorie est d'introduire, de justifier, d'analyser et d'appliquer dans différents contextes une nouvelle classe de modèles mathématiques permettant d'étudier le comportement collectif d'un très grand nombre d'agents en interaction (ou de joueurs au sens de la théorie des jeux) qui tous souhaitent « optimiser » leurs décisions.

Ces modèles peuvent être obtenus en considérant des équilibres de Nash à N joueurs et en faisant tendre N vers l'infini. Dans un cadre dynamique et d'espace d'état continu, ces modèles s'écrivent sous la forme de systèmes (d'un type nouveau) d'équations aux dérivées partielles (EDP en abrégé) non linéaires. Les équations ainsi obtenues sont très générales et contiennent comme cas particuliers de nombreux systèmes et équations classiques : les équations elliptiques semi-linéaires, les équations de type Hartree de la mécanique quantique, équations d'Euler compressibles de la mécanique des fluides, les équations cinétiques (Vlasov, Boltzmann, Fokker-Planck...), l'équation de la chaleur, les équations de type milieux poreux ou les équations du transport optimal (problème de Monge-Kantorovich)...

La terminologie « champ moyen » fait référence à la physique et à la mécanique statistiques : dans ces cadres physiques, il s'agit de décrire le comportement global d'un très grand nombre de particules en interaction qui créent un champ dit « moyen » et dont la dynamique dépend de ce champ. De manière simplifiée, on peut dire que nous étendons cette approche en permettant à chaque agent de « choisir au mieux » ses décisions tout en tenant compte des « champs moyens » créés par les décisions des autres joueurs.

Dans tout ce qui précède, nous avons implicitement admis que les joueurs sont « identiques » ou plus exactement « indistinguables ». Signalons que des variantes de la théorie permettent de considérer plusieurs catégories de joueurs, ou des caractéristiques variant (de manière aléatoire) d'un joueur à l'autre.

Il est donc clair que la classe d'équations que nous obtenons par cette approche générale de modélisation est extrêmement vaste et que de très nombreuses questions, notamment mathématiques, se posent, dont beaucoup restent à résoudre. Le cours, d'une certaine manière, détaille quelques-uns des progrès accomplis durant l'année.

Cette année, les thèmes abordés concernent l'unicité des solutions, les liens avec le contrôle optimal et une nouvelle approche mathématique des MFG.

2. Unicité des solutions

On considère des solutions régulières du système suivant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \nu\Delta u + \rho u + H(x,\nabla u,m) = 0, x \in R^d,\, t \in [0,T] \\ \dfrac{\partial m}{\partial t} + \nu\Delta m + \operatorname{div}\left(\dfrac{\partial H}{\partial p}(x,\nabla u)m\right) = 0, x \in R^d,\, t \in [0,T] \end{cases} \tag{1}$$

où on suppose que toutes les fonctions de x sont périodiques (de période fixée $T_i > 0$ pour chaque $x_i, 1 \leqslant i \leqslant d$), $\nu \geqslant 0, T \in]0,+\infty[, \rho \in R, H(x,p,s)$ est une fonction régulière sur $R^d \times R^d \times [0,\infty[$ et les inconnues u et m sont à valeurs dans R et $[0,\infty[$ respectivement.

Le système (1) est complété par les conditions aux limites en t suivantes

$$u\big|_{t=0} = \overline{U}(x,m(x,0)) \quad , \quad m\big|_{t=T} = \overline{m}(x)\,. \tag{2}$$

où $\overline{m} \geqslant 0$ et $\overline{U}(x,s)$ sont des fonctions régulières données sur R^d et $R^d \times [0,+\infty[$ respectivement. Le résultat d'unicité est donné par le

Théorème 1 : Les solutions de (1)-(2) sont uniques si $\overline{U}$ est croissante en s et si l'hypothèse de structure suivante est vérifiée :

$$\begin{pmatrix} s\frac{\partial^2 H}{\partial p^2}(x,p,s) & \frac{1}{2}s\frac{\partial^2 H}{\partial p \partial s}(x,p,s) \\ \frac{1}{2}s\frac{\partial^2 H}{\partial p \partial s}(x,p,s)^T & -\frac{\partial H}{\partial s}(x,p,s) \end{pmatrix} \geqslant 0, \forall x \in R^d, \forall p \in R^d, \forall s \in [0,+\infty[\tag{3}$$

Remarques : 1) On retrouve le résultat connu lorsque $H(x,p,s) = H(x,p) + g(s)$ avec H convexe et g décroissante, 2) La démonstration est basée d'une part sur l'identité obtenue en multipliant par $(m_1 - m_2)$ l'équation vérifiée par $(u_1 - u_2)$ et par $(u_1 - u_2)$ l'équation vérifiée par $(m_1 - m_2)$ où $(u_1,\, m_1)$ et $(u_2,\, m_2)$ sont deux solutions ; et d'autre part sur l'observation que la condition (3) est équivalente à l'inégalité suivante

$$\left(\frac{\partial H}{\partial p}(x,p,s)s_1 - \frac{\partial H}{\partial p}(x,p_2,s_2)s_2)\cdot(p_1 - p_2) - (H(x,p_1,s_1) - H(x,p_2,s_2)\right)(s_1 - s_2) \geqslant 0$$

pour tous $x \in R^d, p_1, p_2 \in R^d, s_1, s_2 \geqslant 0$.

3. Liens avec le contrôle optimal

On sait bien que $s : H(x,p,s) = H(x,p) + g(x,s)$, le système (1)-(2) peut être interprété comme les équations d'Euler-Lagrange d'un problème de contrôle optimal à savoir

$$\begin{cases} \text{Inf}\ \{\int_Q \int_0^T dx\, dt(mL(x,\alpha) + G(x,m)) + \int_Q \Phi(x, m(0)) \,/\, \alpha \in L^\infty(Qx]0,T[), \\ \frac{\partial m}{\partial t} + \nu\Delta m + \text{div}(\alpha m) = 0 \ \text{ sur } \ R^d \times]0,T[\ \ , m\big|_{t=T} = \overline{m}\} \end{cases} \tag{4}$$

où Q est le domaine de périodicité, $G(x,s) = \int_0^s g(x,\sigma)d\sigma$ et $L(x,p) = \sup\limits_{p \in R^d} (p \cdot \alpha - H(x,\alpha))$.

En fait, il est possible de démontrer que ce cas particulier est la seule situation où le système (1)-(2) « découle » d'un principe variationnel du type de (4). Malgré sa portée donc limitée, il nous sera utile pour donner un éclairage nouveau du cas général.

En effet, dans le cas où les dynamiques de chaque joueur sont bruitées avec, en particulier, un bruit brownien commun, les modèles MFG doivent être écrits en dimension infinie (en tout cas si l'espace d'état est continu) et semblent délicats à analyser, voire même à manipuler. Après les avoir rappelés, nous expliquerons que leur structure est en fait celle d'équations « dérivées » d'équations de Hamilton-Jacobi-Bellman.

Formellement, les modèles MFG sont posés sur $Q \times P(Q)$ ou $Q \times M_+(Q)$ et l'inconnue $U(x,m,t)$ est à valeurs dans R. On note $P(Q)$ l'espace des mesures de probabilité sur Q et $M_+(Q)$ l'espace des mesures positives sur Q. L'équation MFG s'écrit alors

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} - (\nu+\gamma)\Delta_x U + H(x, \nabla u, m) + < \frac{\partial U}{\partial m}, -(\nu+\gamma)\Delta m - \text{div}(\frac{\partial H}{\partial p}(x, \nabla u, m)m) > \\ -\gamma \frac{\partial^2 U}{\partial m^2}(\nabla m, \nabla m) + 2\gamma < \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial m}, \nabla m >= 0 \end{cases} \tag{5}$$

avec $U\big|_{t=0} = \overline{U}(x,m), \nu \geqslant 0, \gamma \geqslant 0$ et H est une fonction régulière sur $R^d \times R^d \times M(Q)$.

Dans le cas particulier où $H(x, \nabla u, m) = H(x, \nabla u) - \frac{\partial G}{\partial m}$ et $\overline{U} = \frac{\partial \Phi}{\partial m}$, nous introduisons l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman suivante (qui correspond à un problème de contrôle stochastique d'équations aux dérivées partielles que nous n'écrirons pas ici)

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \gamma \frac{\partial \Phi}{\partial m^2}(\nabla m, \nabla m) + < \frac{\partial \Phi}{\partial m}, -(\nu+\gamma)\Delta m > + \\ + \sup\limits_{\alpha}\{< \frac{\partial \Phi}{\partial m}, -\text{div}(\alpha m) - \int_Q L(x,\alpha)m\} = 0 \end{cases} \tag{6}$$

avec $\Phi\big|_{t=0} = \overline{\Phi}$.

En supposant que Φ est une solution régulière de (6), on démontre alors dans ce cas particulier le

Théorème 2 : $U = \frac{\partial \Phi}{\partial m}$ est une solution de (5).

La démonstration montre bien la structure d'équation « dérivée » de l'équation (5) hormis la dépendance en m de l'Hamiltonien H.

4. Un problème modèle

Les observations faites dans la section précédente permettent de définir un problème modèle en dimension finie, représentatif des équations de type MFG (et qui en fait, à des détails techniques près, est une formulation exacte des modèles MFG lorsque l'espace d'état Q est un ensemble fini ...). Les équations modèles posées dans $R^n \times [0,\infty[$ s'écrivent

$$\frac{\partial U}{\partial t} + (H'(U)\cdot\nabla)\,U = g(y), y \in R^n, t \geqslant 0 \tag{7}$$

avec $U\big|_{t=0} = U_0(y)$ sur R^n ; H, g et U_0 sont données et régulières (C^∞, bornées et à dérivées bornées sur R^n, à valeurs dans R, R^n et R^n respectivement. L'inconnue U est à valeurs dans R^n.

Théorème 3 : Si H est convexe et si U_0 et g sont monotones sur R^n, alors le système ci-dessus admet une unique solution régulière et monotone.

Remarques : 1) La méthode des caractéristiques montre que, d'une part, il existe pour toutes les données une solution régulière unique sur un intervalle temporel maximal (jusqu'au premier choc...) ; et que, d'autre part, des chocs (discontinuités de U) peuvent se produire en temps fini si U_0 où g n'est pas monotone ; 2) Si $n = 1$ et $g = 0$, (7) n'est rien d'autre que l'écriture non conservative d'une loi de conservation scalaire (de flux H) et on retrouve alors comme cas particulier un résultat bien connu sur l'absence de chocs pour des données initiales croissantes ; 3) Si g et U_0 sont des gradients de fonctions convexes, on retrouve comme cas particulier un résultat bien connu sur les solutions convexes d'équations de Hamilton-Jacobi.

SÉMINAIRE DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

– 5 novembre : Dominique Chapelle (INRIA-Rocquencourt) : Estimation par filtrage pour les EDPs d'évolution, et applications en biomécanique cardiaque.

– 12 novembre : Houssem Haddar (CMAP-École polytechnique) : Méthodes qualitatives pour les problèmes de diffraction inverses en électromagnétisme.

– 19 novembre : Cédric Villani (Université Claude Bernard Lyon 1) : Systèmes de particules et amortissement Landau.

– 7 janvier : Raphaël Danchin (Université Paris 12) : Bornes inférieures pour le temps de vie des solutions de modèles de fluides incompressibles non visqueux.

– 14 janvier : Laurent Boudin (Université Paris 6) : Un modèle de diffusion gazeuse dans les voies respiratoires distales.

– 21 janvier : Rémi Sentis (CEA-Bruyères) : Système de couplage à 3 ondes. Analyse asymptotique, application à l'interaction laser-plasma.

– 28 janvier : Mitchell Luskin (University of Minnesota) : Development and Analysis of Atomistic-to-Continuum Coupling Methods.

– 4 février : Philippe Gravejat (École polytechnique) : Renormalisation de la charge pour le modèle de Bogoliubov-Dirac-Fock réduit.

– 11 février : Ofer Zeitouni (University of Minnesota) : Maxima of Gaussian fields, branching random walks, and the KPP equation.

– 4 mars : Diogo Arsénio (DMA, ENS-Paris) : Concentrations et hypoellipticité dans les équations de transport cinétique.

– 11 mars : Didier Bresch (Université de Savoie) : Sur le caractère bien posé et l'obtention de certains modèles multi-fluides.

– 18 mars : Benjamin Jourdain (Cermics, ENPC) : Méthode de réduction de variance adaptatives robustes pour les vecteurs gaussiens.

25 mars : Hans Christian Öttinger (Institute of Polymers, ETH Zürich) : Nonequilibrium Thermodynamics for Mathematicians.

– 1er avril : Panagiotis Souganidis (University of Chicago) : New remarks about random homogenization in stationary ergodic environments.

– 8 avril : Scott N. Armstrong (University of Chicago) : The neutronic multigroup diffusion model in a random environment.

– 29 avril : Frédéric Klopp (LAGA, Institut Galilée, Université Paris 13) : Statistiques spectrales des opérateurs aléatoires dans le régime localisé.

– 6 mai : Mathias Rousset (INRIA-Lille) : Limite diffusive et simulation hybride avec réduction de variance pour un modèle de chemotaxis avec variable de mémoire interne.

– 13 mai : Giovanni Samaey (Université catholique de Louvain) : Numerical issues in multiscale simulation and the role of approximate macroscopic models.

– 20 mai : Michal Kowalczyk (Université du Chili) : Minimal surfaces and entire solutions of the Allen-Cahn equation.

– 27 mai : Alexei Lozinski (Université Paul Sabatier-Toulouse III) : Des schémas AP (préservant l'asymptotique) pour des problèmes elliptiques fortement anisotropes.

– 10 juin : Yalchin Efendiev (Texas A&M University) : Multiscale model reduction techniques for flows in heterogeneous porous media.

– 17 juin : Serguei Nazarov (IPME-St. Petersburg) : Vibrating black holes and the continuous spectrum of peak-shaped elastic bodies.

Publications

Lions P.L., Musiela M., *Convexity and non-convexity of option prices for SABR models.*

Lions P.L., Guéant O. et Lasry J.-M., « Applications of Mean Field Games to growth theory »*, in* Paris-Princeton Lectures in Mathematical Finance.

Lions P.L., Guéant O. et Lasry J.-M., « Mean Field Games and applications », *Paris-Princeton Lectures on Mathematical Finance 2010*, LNM 2003, Springer, 2011, 205-266.

Lions P.L., Souganidis P.E., *Viscosity solutions and stochastic partial differential equations* (livre en préparation).

Lions P.L., Perthame B. et Souganidis P.E., « Scalar conservation laws with rough (stochastic) fluxes and stochastic averaging lemmes », séminaire commun, 9 septembre 2010, Isaac Newton Institute, Cambridge.

Lions P.L., « Jeux à champ moyen » (Résumé du cours au Collège de France), *Annuaire du Collège de France 2009-2010,* Paris, Collège de France, 2011.

Lions P.L., Cardialaguet P. et Souganidis P.E., « A discussion about the homogenization of moving interfaces », *J. Maths. Pures Appl.*, 91, 2010, 339-363.

Missions, invitations, conférences

– Conférence aux « Rencontres économistes-mathématiciens », Toulouse (1er septembre 2010).

– Conférence au Symposium Abel, Oslo (27-28 septembre 2010).

– Panel de la Conférence *Sovereign Wealth Funds And Other Long-Term Investors: A New Form of Capitalism*, New York (4-5 octobre 2010)

– Doctorat Honoris Causa de l'École Polytechnique Fédérale de Lausanne, Magistrale 2010, Lausanne (9 octobre 2010).

– Conférence à l'université de Chicago (13 octobre 2010).

– Conférence à l'université de Chicago (15 octobre 2010).

– Conférence à l'université de Chicago (19 janvier 2011).

– Conférence à l'université de Chicago (21 janvier 2011).

– Conférence à l'université de Chicago (26 janvier 2011).

– Minicours (8 h) l'université du Texas Austin (1er mars-10 mars 2011).

– Série de 3 conférences (Center for Mathematical Sciences Lectures) au Technion, Haïfa (12 avril-14 avril 2011).

– Conférence publique avec P.-N. Giraud la Cité des Sciences de Tunis (4 mai 2011).

– Conférence à l'Institut Dauphine de Tunis, Tunis (5 mai 2011).

– Conférence au Workshop *Mean Field Games And Related Topics*, Université La Sapienza, Rome (12 mai 2011).

– Panel du colloque *L'Université dans le monde*, Rectorat de Paris (16 juin 2011).

– Conférence au colloque en l'honneur de H. Berestycki, ENS Ulm (23 juin 2011).

– Panel des Rencontres économiques d'Aix-en-Provence *Le monde dans tous ses états* (10 juillet 2011)

Responsabilités collectives et fonctions diverses

– Membre de l'Académie des sciences ; de l'Académie des technologies ; de l'Académie des sciences d'Italie, d'Argentine et du Brésil ; de l'Istituto Lombardo et de l'Académie de Naples, de la TWAS.

– Professeur à temps partiel à l'École polytechnique.

– Conseiller scientifique à l'INRIA.

– Président du conseil d'administration de l'ENS.

– Président du conseil scientifique du CEA-DAM.

– Président du conseil scientifique de France Telecom.

– Président du conseil scientifique de la Fondation de recherche pour l'aéronautique et l'espace.

– Président du conseil scientifique de la chaire de Finance et développement durable de l'université Paris-Dauphine.

– Président du conseil scientifique de l'Initiative de recherche « Finance post-crise ».

– Président du conseil scientifique de ParisTech.

– Président du conseil scientifique du projet EMMA.

– Président du jury du prix « Science et défense ».

– Membre du Haut Conseil de la science et de la technologie.

– Membre du conseil scientifique de l'Institut Europlace de finance.

– Membre du *Scientific Advisory Panel* de l'European Mathematical Society.

– Membre fondateur du comité international de l'« International Summer School of Applied Mathematics », Morningside Institute, Chinese Academy of Sciences.

– Membre de l'*International Advisory Board* de l'Institute of Mathematical Sciences de l'Imperial College.

– Membre du conseil scientifique de la Fondation du risque.

– Membre du conseil d'administration et du conseil scientifique de la Fondation sciences mathématiques de Paris.

– Membre du conseil d'administration de la Fondation d'entreprise IXIS.

– Membre de la Société des amis du Palais de la Découverte.

– Membre de l'*International Advisory Board* de la Scuola di Dottorato in Scienze Astronomiche, Chimiche, Fisiche e Mathematiche « Vito Volterra ».

– Membre du conseil scientifique du BCAM (Basque Centre for Applied Mathematics).

– Administrateur de Sark et Channel Bridge.

– Conseiller scientifique auprès de BNP PARIBAS, EADS-ST et IEF.

– Fondateur de MFG R&D.

– Éditeur-en-chef du *Journal de mathématiques pures et appliquées*.

– Éditeur de 45 revues internationales.