

Gyres océaniques et ondes de Rossby piégées

Laure Saint-Raymond

Université Paris VI & Ecole Normale Supérieure
Département de Mathématiques et Applications

**Travail en collaboration avec Christophe Cheverry,
Isabelle Gallagher and Thierry Paul**

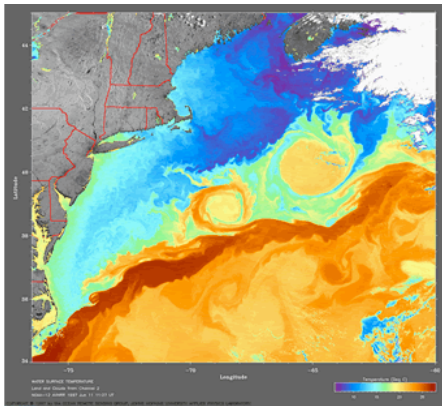
Collège de France, 12 février 2010

Modèles mathématiques pour les gyres océaniques

► Observations physiques

Les gyres océaniques sont des **structures persistantes de type vortex**

- étendue horizontale : 10 à 100 km
- persistance : 1 à 10 ans



Le **mécanisme de formation** des gyres océaniques est généralement décrit de la façon suivante :

- le vent produit des ondes dont la vitesse est comparable à celle de l'écoulement ;
- la convection par les flots zonaux stoppe la propagation, ce qui crée des zones de ventilation.

Le **mécanisme de formation** des gyres océaniques est généralement décrit de la façon suivante :

- le vent produit des ondes dont la vitesse est comparable à celle de l'écoulement ;
- la convection par les flots zonaux stoppe la propagation, ce qui crée des zones de ventilation.

Parmi les ondes propagées sous les effets de la force de Coriolis et de la pression hydrostatique, seules les **ondes de Rossby** peuvent générer de telles structures.

Regime	Period (typical value)	Dynamical structure
Rotating (Poincaré waves)	1 day 1 week	Frequency increases with wave number
Quasigeostrophic (Rossby waves)	1 month	Geostrophic balance between fluid velocity and pressure. Eastward propagation Frequency decreases as wave number increases

► Description mathématique des mouvements océaniques

On considère l'océan comme un **fluide incompressible non visqueux à surface libre**, et on suppose de plus que

- la densité est homogène ;
- la loi de pression est donnée par l'approximation hydrostatique ;
- le mouvement est essentiellement horizontal et ne dépend pas de la coordonnée verticale.

L'évolution de la hauteur d'eau h et de la vitesse d'écoulement v est alors régie par les **équations de Saint-Venant avec force de Coriolis**

$$\partial_t h + \nabla \cdot (hv) = 0$$

$$\partial_t (hv) + \nabla \cdot (hv \otimes v) + \omega(hv)^\perp + gh\nabla h = \tau$$

► Description mathématique des mouvements océaniques

On considère l'océan comme un **fluide incompressible non visqueux à surface libre**, et on suppose de plus que

- la densité est homogène ;
- la loi de pression est donnée par l'approximation hydrostatique ;
- le mouvement est essentiellement horizontal et ne dépend pas de la coordonnée verticale.

L'évolution de la hauteur d'eau h et de la vitesse d'écoulement v est alors régie par les **équations de Saint-Venant avec force de Coriolis**

$$\partial_t h + \nabla \cdot (hv) = 0$$

$$\partial_t (hv) + \nabla \cdot (hv \otimes v) + \omega(hv)^\perp + gh\nabla h = \tau$$

Les courants macroscopiques sont des solutions stationnaires.
Ils vérifient la **relation de Sverdrup**.

$$\nabla \cdot \bar{u} = 0, \quad \nabla \cdot (\bar{u} \otimes \bar{u}) + \omega \bar{u}^\perp = \tau / \underline{h},$$

où \underline{h} est constante, et τ prend en compte

- le pompage d'Ekman (lié au forçage par le vent moyen) ;
- les effets de gradient de température et de topographie.

Pour simplifier, on considère uniquement des courants de cisaillement $\bar{u}(x) = (\bar{u}_1(x_2), 0)$.

On calcule alors la **réponse aux fluctuations du vent** en supposant qu'elles prescrivent la donnée initiale.

L' **impulsion au temps 0** est en fait une superposition d'ondes localisées en espace de très petites longueurs d'ondes.

Les courants macroscopiques sont des solutions stationnaires.
Ils vérifient la **relation de Sverdrup**.

$$\nabla \cdot \bar{u} = 0, \quad \nabla \cdot (\bar{u} \otimes \bar{u}) + \omega \bar{u}^\perp = \tau / \underline{h},$$

où \underline{h} est constante, et τ prend en compte

- le pompage d'Ekman (lié au forçage par le vent moyen) ;
- les effets de gradient de température et de topographie.

Pour simplifier, on considère uniquement des courants de cisaillement $\bar{u}(x) = (\bar{u}_1(x_2), 0)$.

On calcule alors la **réponse aux fluctuations du vent** en supposant qu'elles prescrivent la donnée initiale.

L' **impulsion au temps 0** est en fait une superposition d'ondes localisées en espace de très petites longueurs d'ondes.

► Ordres de grandeur et scaling

Pour étudier la propagation des ondes de surface, on introduit la **variation de profondeur** $\rho = \delta h / \bar{h}$ avec

$$\bar{h} \sim 1\text{km}, \quad \delta h \sim 1\text{m}.$$

Pour exhiber des structures de type gyres, on doit de plus choisir des **échelles d'observation** appropriées

$$t_o \sim 100 \text{ jours}, \quad , \quad l_o = 1000\text{km}, \quad v_0 \sim 0.1\text{ms}^{-1}.$$

différentes de la **vitesse caractéristique** des courants macroscopiques

$$v_c \sim 10\text{ms}^{-1}.$$

Les **équations sans dimension** s'écrivent alors

$$(SW_\varepsilon) \quad \begin{aligned} \varepsilon \partial_t \rho + \varepsilon \bar{u} \cdot \nabla \rho + \nabla \cdot u &= -\varepsilon^2 \nabla \cdot (\rho u) \\ \varepsilon \partial_t u + \varepsilon \bar{u} \cdot \nabla u + \frac{1}{\varepsilon} \omega u^\perp + \nabla \rho &= -\varepsilon u \cdot \nabla \bar{u} - \varepsilon^2 u \cdot \nabla u \\ (\rho, u)|_{t=0} &= \sum (\rho_j(x), u_j(x)) \exp\left(\frac{iS_j(x)}{\varepsilon}\right) \end{aligned}$$

► Ordres de grandeur et scaling

Pour étudier la propagation des ondes de surface, on introduit la

variation de profondeur $\rho = \delta h / \bar{h}$ avec

$$\bar{h} \sim 1\text{km}, \quad \delta h \sim 1\text{m}.$$

Pour exhiber des structures de type gyres, on doit de plus choisir des **échelles d'observation** appropriées

$$t_o \sim 100 \text{ jours}, \quad , \quad l_o = 1000\text{km}, \quad v_0 \sim 0.1\text{ms}^{-1}.$$

différentes de la **vitesse caractéristique** des courants macroscopiques

$$v_c \sim 10\text{ms}^{-1}.$$

Les **équations sans dimension** s'écrivent alors

$$(SW_\varepsilon) \quad \begin{aligned} \varepsilon \partial_t \rho + \varepsilon \bar{u} \cdot \nabla \rho + \nabla \cdot u &= -\varepsilon^2 \nabla \cdot (\rho u) \\ \varepsilon \partial_t u + \varepsilon \bar{u} \cdot \nabla u + \frac{1}{\varepsilon} \omega u^\perp + \nabla \rho &= -\varepsilon u \cdot \nabla \bar{u} - \varepsilon^2 u \cdot \nabla u \\ (\rho, u)|_{t=0} &= \sum (\rho_j(x), u_j(x)) \exp\left(\frac{iS_j(x)}{\varepsilon}\right) \end{aligned}$$

Etude mathématique de la propagation des ondes

► Un cas simple avec résolution spectrale explicite

Dans l'**approximation betaplan** $\omega(x) = \beta x_2$,
en **absence de convection** $\bar{u} = 0$, le propagateur linéaire s'écrit

$$A_0(x, \varepsilon D_x) = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \partial_1 & \varepsilon \partial_2 \\ \varepsilon \partial_1 & 0 & -\beta x_2 \\ \varepsilon \partial_2 & \beta x_2 & 0 \end{pmatrix}$$

Il peut être diagonalisé de façon exacte en utilisant

- une base de Fourier ($\exp(\frac{i}{\varepsilon} x_1 \xi_1)$) en x_1
- une base de Hermite ($\psi_n^\varepsilon(x_2)$) en x_2

Etude mathématique de la propagation des ondes

► Un cas simple avec résolution spectrale explicite

Dans l'**approximation betaplan** $\omega(x) = \beta x_2$,
en **absence de convection** $\bar{u} = 0$, le propagateur linéaire s'écrit

$$A_0(x, \varepsilon D_x) = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \partial_1 & \varepsilon \partial_2 \\ \varepsilon \partial_1 & 0 & -\beta x_2 \\ \varepsilon \partial_2 & \beta x_2 & 0 \end{pmatrix}$$

Il peut être diagonalisé de façon exacte en utilisant

- une base de Fourier ($\exp(\frac{i}{\varepsilon} x_1 \xi_1)$) en x_1
- une base de Hermite ($\psi_n^\varepsilon(x_2)$) en x_2

Proposition. Soient $\tau(n, \xi_1, j)$ ($j = 0, \pm$) les trois racines du polynôme

$$(*) \quad \tau^3 - (\xi_1^2 + \beta\varepsilon(2n+1))\tau + \varepsilon\beta\xi_1 = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \xi_1 \in \mathbb{R}$$

Alors il existe une famille complète $(\Psi_{n, \xi_1, j}^\varepsilon)_{n, \xi_1, j}$ de L^2 telle que

$$A_0(x, \varepsilon D_x) \Psi_{n, \xi_1, j}^\varepsilon = i\tau(n, \xi_1, j) \Psi_{n, \xi_1, j}^\varepsilon$$

On obtient trois **propagateurs scalaires** à partir de l'équation symbolique (*), en remarquant que $\beta\varepsilon(2n+1)$ est la quantification de l'oscillateur harmonique $-\varepsilon^2 \partial_2^2 + \beta^2 x_2^2$.

- deux modes de Poincaré

$$\tau_\pm \sim \pm \sqrt{\xi_1^2 + \beta\varepsilon(2n+1)}$$

- un mode de Rossby

$$\tau_0 \sim \frac{\varepsilon\beta\xi_1}{\xi_1^2 + \beta\varepsilon(2n+1)}$$

Proposition. Soient $\tau(n, \xi_1, j)$ ($j = 0, \pm$) les trois racines du polynôme

$$(*) \quad \tau^3 - (\xi_1^2 + \beta\varepsilon(2n+1))\tau + \varepsilon\beta\xi_1 = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \xi_1 \in \mathbb{R}$$

Alors il existe une famille complète $(\Psi_{n, \xi_1, j}^\varepsilon)_{n, \xi_1, j}$ de L^2 telle que

$$A_0(x, \varepsilon D_x) \Psi_{n, \xi_1, j}^\varepsilon = i\tau(n, \xi_1, j) \Psi_{n, \xi_1, j}^\varepsilon$$

On obtient trois **propagateurs scalaires** à partir de l'équation symbolique (*), en remarquant que $\beta\varepsilon(2n+1)$ est la quantification de l'oscillateur harmonique $-\varepsilon^2 \partial_2^2 + \beta^2 x_2^2$.

- deux modes de Poincaré

$$\tau_\pm \sim \pm \sqrt{\xi_1^2 + \beta\varepsilon(2n+1)}$$

- un mode de Rossby

$$\tau_0 \sim \frac{\varepsilon\beta\xi_1}{\xi_1^2 + \beta\varepsilon(2n+1)}$$

La propagation de l'énergie associée aux modes de Rossby a lieu

- en temps diffractif, i.e. sur une échelle de temps pour laquelle toute l'énergie portée par les ondes de Poincaré est dispersée ;
- le long des caractéristiques du hamiltonien $\tilde{\tau}_0 = \tau_0/\varepsilon$

$$\frac{dX_i}{dt} = \frac{\partial \tilde{\tau}_0}{\partial \xi_i}, \quad \frac{d\Xi_i}{dt} = -\frac{\partial \tilde{\tau}_0}{\partial x_i}$$

Ces caractéristiques sont périodiques en x_2 , et linéaires en x_1 sauf si $\xi_1 \sim \pm \sqrt{\beta^2 x_2^2 + \xi_2^2}$, auquel cas elles sont piégées (points fixes).

Les termes non linéaires couplent les amplitudes (via les **équations d'enveloppe**). En utilisant

- des espaces fonctionnels adaptés (définis avec l'oscillateur harmonique)
- et une caractérisation précise des résonances éventuelles

on peut montrer que ce système infini d'équations différentielles ordinaires est localement bien posé (et génériquement globalement bien posé).

La propagation de l'énergie associée aux modes de Rossby a lieu

- en temps diffractif, i.e. sur une échelle de temps pour laquelle toute l'énergie portée par les ondes de Poincaré est dispersée ;
- le long des caractéristiques du hamiltonien $\tilde{\tau}_0 = \tau_0/\varepsilon$

$$\frac{dX_i}{dt} = \frac{\partial \tilde{\tau}_0}{\partial \xi_i}, \quad \frac{d\Xi_i}{dt} = -\frac{\partial \tilde{\tau}_0}{\partial x_i}$$

Ces caractéristiques sont périodiques en x_2 , et linéaires en x_1 sauf si $\xi_1 \sim \pm \sqrt{\beta^2 x_2^2 + \xi_2^2}$, auquel cas elles sont piégées (points fixes).

Les termes non linéaires couplent les amplitudes (via les **équations d'enveloppe**). En utilisant

- des espaces fonctionnels adaptés (définis avec l'oscillateur harmonique)
- et une caractérisation précise des résonances éventuelles

on peut montrer que ce système infini d'équations différentielles ordinaires est localement bien posé (et génériquement globalement bien posé).

► Outils pour l'analyse asymptotique

Si le courant zonal \bar{u} et le paramètre de Coriolis ω sont quelconques, on n'a **pas de décomposition spectrale explicite** pour le propagateur

$$A(x, \varepsilon D_x) = \begin{pmatrix} (\varepsilon \bar{u} \cdot \varepsilon \nabla) & \varepsilon \partial_1 & \varepsilon \partial_2 \\ \varepsilon \partial_1 & (\varepsilon \bar{u} \cdot \varepsilon \nabla) & -\omega(x_2) + \varepsilon^2 \bar{u}'(x_2) \\ \varepsilon \partial_2 & \omega(x_2) & (\varepsilon \bar{u} \cdot \varepsilon \nabla) \end{pmatrix}$$

On n'a même pas de description qualitative du spectre.

Quand $\varepsilon \rightarrow 0$, l'analyse semi-classique fournit de bonnes approximations de la dynamique.

- Le calcul (pseudo-)differential est remplacé par des calculs formels dans l'espace des phases :

$$(x_2, \varepsilon \partial_2) \rightarrow (x_2, \xi_2).$$

- Les commutateurs (qui sont négligés dans ces calculs) introduisent des erreurs d'ordre élevé en ε :

$$[x_2, \varepsilon \partial_2] = -\varepsilon.$$

► Outils pour l'analyse asymptotique

Si le courant zonal \bar{u} et le paramètre de Coriolis ω sont quelconques, on n'a **pas de décomposition spectrale explicite** pour le propagateur

$$A(x, \varepsilon D_x) = \begin{pmatrix} (\varepsilon \bar{u} \cdot \varepsilon \nabla) & \varepsilon \partial_1 & \varepsilon \partial_2 \\ \varepsilon \partial_1 & (\varepsilon \bar{u} \cdot \varepsilon \nabla) & -\omega(x_2) + \varepsilon^2 \bar{u}'(x_2) \\ \varepsilon \partial_2 & \omega(x_2) & (\varepsilon \bar{u} \cdot \varepsilon \nabla) \end{pmatrix}$$

On n'a même pas de description qualitative du spectre.

Quand $\varepsilon \rightarrow 0$, **l'analyse semi-classique** fournit de bonnes approximations de la dynamique.

- Le calcul (pseudo-)differential est remplacé par des calculs formels dans l'espace des phases :

$$(x_2, \varepsilon \partial_2) \rightarrow (x_2, \xi_2).$$

- Les commutateurs (qui sont négligés dans ces calculs) introduisent des erreurs d'ordre élevé en ε :

$$[x_2, \varepsilon \partial_2] = -\varepsilon.$$

► Principales difficultés

Dans l'étude de la propagation linéaire, des difficultés apparaissent à cause de

- la **structure matricielle** du propagateur A
- la **différence de scaling** entre les modes de Rossby et de Poincaré

La polarisation ne peut pas être obtenue par approximations successives (théorie des formes normales).

Le traitement du couplage non-linéaire nécessite de plus

- de déterminer des **espaces fonctionnels adaptés** pour résoudre le problème de Cauchy (uniformément en ε);
- de **caractériser les résonances** pour obtenir les équations d'enveloppe.

► Principales difficultés

Dans l'étude de la propagation linéaire, des difficultés apparaissent à cause de

- la **structure matricielle** du propagateur A
- la **différence de scaling** entre les modes de Rossby et de Poincaré

La polarisation ne peut pas être obtenue par approximations successives (théorie des formes normales).

Le traitement du couplage non-linéaire nécessite de plus

- de déterminer des **espaces fonctionnels adaptés** pour résoudre le problème de Cauchy (uniformément en ε);
- de **caractériser les résonances** pour obtenir les équations d'enveloppe.

Analyse semi-classique de la propagation linéaire

► Polarisation des ondes de Poincaré et de Rossby

On calcule d'abord une sorte de **polynôme caractéristique**. Par substitutions and combinaisons linéaires, on obtient le sous-système

$$\begin{pmatrix} (\varepsilon \bar{u}_1 \xi_1 - \tau) & \xi_1 \\ \xi_1 & (\varepsilon \bar{u}_1 \xi_1 - \tau) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\varepsilon \partial_2 u_2 \\ i(\varepsilon^2 \bar{u}'' - \omega) u_2 \end{pmatrix}$$

et l'équation scalaire

$$\varepsilon \partial_2 \left(\frac{i\omega \xi_1 u_2 + i(\varepsilon \bar{u}_1 \xi_1 - \tau) \varepsilon \partial_2 u_2}{(\varepsilon \bar{u}_1 \xi_1 - \tau)^2 - \xi_1^2} \right) - \omega \left(\frac{i\xi_1 \varepsilon \partial_2 u_2 + (\varepsilon \bar{u}_1 \xi_1 - \tau) i\omega u_2}{(\varepsilon \bar{u}_1 \xi_1 - \tau)^2 - \xi_1^2} \right) + i(\varepsilon \bar{u}_1 \xi_1 - \tau) u_2 = O(\varepsilon^2)$$

Grâce au calcul fonctionnel pseudo-différentiel, on obtient les **trois propagateurs scalaires** T_{\pm} , T_0

- en résolvant l'équation symbolique

$$(\tau - \varepsilon \bar{u}_1 \xi_1)^3 - (\tau - \varepsilon \bar{u}_1 \xi_1)(\xi_2^2 + \xi_1^2 + \omega^2(x_2)) + \varepsilon \omega'(x_2) \xi_1 = O(\varepsilon^2),$$

- puis en calculant de façon itérative les développements des symboles.

On montre de plus que toute condition initiale peut être **décomposée microlocalement** sur les modes propres des propagateurs scalaires T_{\pm} , T_0 .

Grâce au calcul fonctionnel pseudo-différentiel, on obtient les **trois propagateurs scalaires** T_{\pm} , T_0

- en résolvant l'équation symbolique

$$(\tau - \varepsilon \bar{u}_1 \xi_1)^3 - (\tau - \varepsilon \bar{u}_1 \xi_1)(\xi_2^2 + \xi_1^2 + \omega^2(x_2)) + \varepsilon \omega'(x_2) \xi_1 = O(\varepsilon^2),$$

- puis en calculant de façon itérative les développements des symboles.

On montre de plus que toute condition initiale peut être **décomposée microlocalement** sur les modes propres des propagateurs scalaires T_{\pm} , T_0 .

► Dispersion des ondes de Poincaré

Si la donnée initiale est microlocalisée en dehors de $\xi_2^2 + \omega^2(x_2) = 0$ et de $\xi_1 = 0$, on peut trouver des opérateurs pseudo-différentiels $H_{2\pm}(\xi_1)$ de symbole principal $\xi_2^2 + \omega^2(x_2)$ tels que

$$\hat{T}_{\pm}(\xi_1) = \pm \sqrt{H_{2\pm}(\xi_1) + \xi_1^2}.$$

Loin des séparatrices de $H_{2\pm}$, la **condition de quantification de Bohr-Sommerfeld** (avec sous-symbole) montre que les valeurs propres de $H_{2\pm}(\xi_1)$ sont de la forme :

$$\lambda_{\pm}^k(\xi_1) = \lambda_{\pm} \left(\left(k + \frac{1}{2} \right) \epsilon \right) + \epsilon \mu_{\pm}^k(\xi_1) + O(\epsilon^2),$$

où λ_{\pm} est l'énergie $\xi_2^2 + \omega^2(x_2)$ définie en variable d'action, et $\mu_{\pm}^k \in C^{\infty}$ est la correction due au sous-symbole.

► Dispersion des ondes de Poincaré

Si la donnée initiale est microlocalisée en dehors de $\xi_2^2 + \omega^2(x_2) = 0$ et de $\xi_1 = 0$, on peut trouver des opérateurs pseudo-différentiels $H_{2\pm}(\xi_1)$ de symbole principal $\xi_2^2 + \omega^2(x_2)$ tels que

$$\hat{T}_{\pm}(\xi_1) = \pm \sqrt{H_{2\pm}(\xi_1) + \xi_1^2}.$$

Loin des séparatrices de $H_{2\pm}$, la **condition de quantification de Bohr-Sommerfeld** (avec sous-symbole) montre que les valeurs propres de $H_{2\pm}(\xi_1)$ sont de la forme :

$$\lambda_{\pm}^k(\xi_1) = \lambda_{\pm} \left(\left(k + \frac{1}{2} \right) \epsilon \right) + \epsilon \mu_{\pm}^k(\xi_1) + O(\epsilon^2),$$

où λ_{\pm} est l'énergie $\xi_2^2 + \omega^2(x_2)$ définie en variable d'action, et $\mu_{\pm}^k \in C^{\infty}$ est la correction due au sous-symbole.

La composante de type Poincaré est donc une superposition d'**ondes élémentaires**, indexées par (q, p) (états cohérents en x_1) et k (quantification en x_2)

$$\int \exp(i(x_1 - q)\xi_1 - (\xi_1 - p)^2) \exp\left(\pm i \frac{(\lambda_{\pm}^k(\xi_1) + \xi_1^2)^{\frac{1}{2}} t}{\epsilon}\right) \Psi_{k, \xi_1, \pm}^{\epsilon}(x_2) d\xi_1.$$

Ces intégrales sont $O(\epsilon^{\infty})$ sauf s'il existe un **point stationnaire pour la phase**, donné par les conditions :

$$\xi_1 = p \text{ and } \epsilon(x_1 - q) \pm \frac{(2\xi_1 + \epsilon \partial_{\xi_1} \mu_{\pm}^k)}{2\sqrt{\lambda_{\pm}^k + \xi_1^2}} t = 0.$$

Pour les **temps diffractifs** $t \sim 1$, comme il n'y a pas de point critique pour x_1 dans un domaine compact, l'énergie portée par les ondes de Poincaré sort de tout compact.

La composante de type Poincaré est donc une superposition d'**ondes élémentaires**, indexées par (q, p) (états cohérents en x_1) et k (quantification en x_2)

$$\int \exp(i(x_1 - q)\xi_1 - (\xi_1 - p)^2) \exp\left(\pm i \frac{(\lambda_{\pm}^k(\xi_1) + \xi_1^2)^{\frac{1}{2}} t}{\epsilon}\right) \Psi_{k, \xi_1, \pm}^{\epsilon}(x_2) d\xi_1.$$

Ces intégrales sont $O(\epsilon^{\infty})$ sauf s'il existe un **point stationnaire pour la phase**, donné par les conditions :

$$\xi_1 = p \text{ and } \epsilon(x_1 - q) \pm \frac{(2\xi_1 + \epsilon \partial_{\xi_1} \mu_{\pm}^k)}{2\sqrt{\lambda_{\pm}^k + \xi_1^2}} t = 0.$$

Pour les **temps diffractifs** $t \sim 1$, comme il n'y a pas de point critique pour x_1 dans un domaine compact, l'énergie portée par les ondes de Poincaré sort de tout compact.

La composante de type Poincaré est donc une superposition d'**ondes élémentaires**, indexées par (q, p) (états cohérents en x_1) et k (quantification en x_2)

$$\int \exp(i(x_1 - q)\xi_1 - (\xi_1 - p)^2) \exp\left(\pm i \frac{(\lambda_{\pm}^k(\xi_1) + \xi_1^2)^{\frac{1}{2}} t}{\epsilon}\right) \Psi_{k, \xi_1, \pm}^{\epsilon}(x_2) d\xi_1.$$

Ces intégrales sont $O(\epsilon^{\infty})$ sauf s'il existe un **point stationnaire pour la phase**, donné par les conditions :

$$\xi_1 = p \text{ and } \epsilon(x_1 - q) \pm \frac{(2\xi_1 + \epsilon \partial_{\xi_1} \mu_{\pm}^k)}{2\sqrt{\lambda_{\pm}^k + \xi_1^2}} t = 0.$$

Pour les **temps diffractifs** $t \sim 1$, comme il n'y a pas de point critique pour x_1 dans un domaine compact, l'énergie portée par les ondes de Poincaré sort de tout compact.

► Piégeage des ondes de Rossby

Les trajectoires sont des **sous-variétés des surfaces d'énergie** :

$$\xi_2^2 = \frac{\omega'(x_2)\xi_1}{\tau - \bar{u}(x_2)\xi_1} - \xi_1^2 - \omega^2(x_2) \equiv V_\tau(x_2).$$

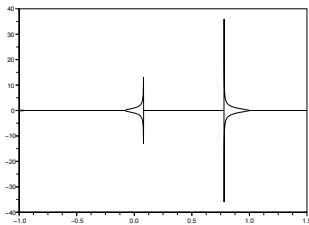
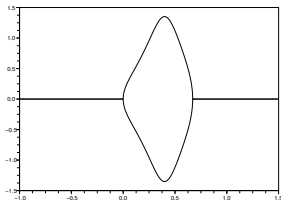
► Piégeage des ondes de Rossby

Les trajectoires sont des **sous-variétés des surfaces d'énergie** :

$$\xi_2^2 = \frac{\omega'(x_2)\xi_1}{\tau - \bar{u}(x_2)\xi_1} - \xi_1^2 - \omega^2(x_2) \equiv V_\tau(x_2).$$

Le **mouvement le long de x_2** peut être de deux types, en fonction de **l'existence éventuelle d'une singularité** entre deux racines de V_τ .

- Si x_{min} et x_{max} sont des points tournants, le mouvement est périodique.
- Si x_{min} ou x_{max} est un point singulier ou critique, le mouvement est dit asymptotique.



On obtient alors des informations qualitatives sur la propagation de l'énergie en intégrant

$$\frac{d}{dt}X_1 = \bar{u}(X_2(t)) + \frac{\omega'(X_2(t))(-\Xi_1^2 + \Xi_2^2(t) + \omega^2(X_2(t)))}{(\Xi_1^2 + \Xi_2^2(t) + \omega^2(X_2(t)))^2}$$

Par un changement de variables, on peut exprimer la **condition de piégeage** en fonction des paramètres initiaux (ξ_1, x_2^0, ξ_2^0) .

Si $\omega(x_2) = \beta x_2$ et si \bar{u} n'est pas identiquement positive, il y a une sous-variété de codimension 1 de conditions initiales donnant lieu à des ondes de Rossby piégées,

- **concentrées spatialement** sur des droites $x_2 = x_s$ (à cause de la géométrie simplifiée)

$$X_2(t) \rightarrow x_s, \quad X_1(t) \rightarrow x_1^\infty,$$

- **fortement oscillantes** par rapport à x_2

$$|\Xi_2(t)| \rightarrow \infty.$$

La vorticité associée se concentre sur des ensembles de mesure nulle.

On obtient alors des informations qualitatives sur la propagation de l'énergie en intégrant

$$\frac{d}{dt}X_1 = \bar{u}(X_2(t)) + \frac{\omega'(X_2(t))(-\Xi_1^2 + \Xi_2^2(t) + \omega^2(X_2(t)))}{(\Xi_1^2 + \Xi_2^2(t) + \omega^2(X_2(t)))^2}$$

Par un changement de variables, on peut exprimer la **condition de piégeage** en fonction des paramètres initiaux (ξ_1, x_2^0, ξ_2^0) .

Si $\omega(x_2) = \beta x_2$ et si \bar{u} n'est pas identiquement positive, il y a une sous-variété de codimension 1 de conditions initiales donnant lieu à des ondes de Rossby piégées,

- **concentrées spatialement** sur des droites $x_2 = x_s$ (à cause de la géométrie simplifiée)

$$X_2(t) \rightarrow x_s, \quad X_1(t) \rightarrow x_1^\infty,$$

- **fortement oscillantes** par rapport à x_2

$$|\Xi_2(t)| \rightarrow \infty.$$

La vorticité associée se concentre sur des ensembles de mesure nulle.

Cas d'un couplage faible

► Un système hyperbolique symétrisable

En posant $U = (\frac{2}{\varepsilon^2}(\sqrt{1 + \varepsilon^2\rho} - 1), u)$, le système de départ se réécrit

$$\varepsilon^2 \partial_t U + A(x, \varepsilon D_x) U + \varepsilon^3 \sum_{j=1,2} S_j(U) \varepsilon \partial_j U = 0$$

avec $S_j(U)$ **symétrique**.

Par la méthode que l'on va décrire maintenant, on ne peut considérer que des **non linéarités faibles**.

Cette restriction est due à un mauvais contrôle L^∞ des fonctions à deux échelles (semi-classiques).

En particulier, le **couplage est évanescent** dans la limite $\varepsilon \rightarrow 0$.

Cas d'un couplage faible

► Un système hyperbolique symétrisable

En posant $U = (\frac{2}{\varepsilon^2}(\sqrt{1 + \varepsilon^2\rho} - 1), u)$, le système de départ se réécrit

$$\varepsilon^2 \partial_t U + A(x, \varepsilon D_x) U + \varepsilon^3 \sum_{j=1,2} S_j(U) \varepsilon \partial_j U = 0$$

avec $S_j(U)$ **symétrique**.

Par la méthode que l'on va décrire maintenant, on ne peut considérer que des **non linéarités faibles**.

Cette restriction est due à un mauvais contrôle L^∞ des fonctions à deux échelles (semi-classiques).

En particulier, le **couplage est évanescent** dans la limite $\varepsilon \rightarrow 0$.

Cas d'un couplage faible

► Un système hyperbolique symétrisable

En posant $U = (\frac{2}{\varepsilon^2}(\sqrt{1 + \varepsilon^2\rho} - 1), u)$, le système de départ se réécrit

$$\varepsilon^2 \partial_t U + A(x, \varepsilon D_x) U + \varepsilon^3 \sum_{j=1,2} S_j(U) \varepsilon \partial_j U = 0$$

avec $S_j(U)$ **symétrique**.

Par la méthode que l'on va décrire maintenant, on ne peut considérer que des **non linéarités faibles**.

Cette restriction est due à un mauvais contrôle L^∞ des fonctions à deux échelles (semi-classiques).

En particulier, le **couplage est évanescent** dans la limite $\varepsilon \rightarrow 0$.

Pour les systèmes hyperboliques symétriques, on a une **théorie d'existence locale** dans H^s pour $s > \frac{d}{2} + 1$.

Ici, comme ∂_2 ne commute pas avec la perturbation singulière, le temps d'existence n'est a priori pas uniforme en ε .

Pour obtenir des **estimations uniformes de régularité**, on doit donc définir des normes spécifiques :

- adaptées au cadre semi-classique (pour avoir une donnée initiale de norme $O(1)$) ;
- qui ont de bonnes propriétés de commutation avec $A(x, \varepsilon D_x)$ (pour être propagées uniformément en ε).

Pour les systèmes hyperboliques symétriques, on a une **théorie d'existence locale** dans H^s pour $s > \frac{d}{2} + 1$.

Ici, comme ∂_2 ne commute pas avec la perturbation singulière, le temps d'existence n'est a priori pas uniforme en ε .

Pour obtenir des **estimations uniformes de régularité**, on doit donc définir des normes spécifiques :

- adaptées au cadre semi-classique (pour avoir une donnée initiale de norme $O(1)$);
- qui ont de bonnes propriétés de commutation avec $A(x, \varepsilon D_x)$ (pour être propagées uniformément en ε).

► Propagation de la régularité

Dans le **cadre semi-classique**, on peut généraliser un résultat de Dutrifoy, Majda et Schochet obtenu dans le cas betaplan. On définit

$$D_\varepsilon \sim \begin{pmatrix} \varepsilon^2 \partial_2^2 - \omega^2 + 2\varepsilon\omega' & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon^2 \partial_2^2 - \omega^2 - 2\varepsilon\omega' & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon^2 \partial_2^2 - \omega^2 \end{pmatrix}$$

En utilisant la propriété fondamentale

$$[\varepsilon^2 \partial_2^2 - \omega^2, \varepsilon \partial_2 \pm \omega] = \pm 2\varepsilon\omega'(\varepsilon \partial_2 \pm \omega) \pm \varepsilon^2 \omega''$$

on vérifie alors que D_ε **commute presque avec** $A(x, \varepsilon D_x)$

$$[D_\varepsilon, A(x, \varepsilon D_x)] = O(\varepsilon^2 (Id - D_\varepsilon))$$

On construit alors des **espaces W_ε^s de type Sobolev à poids** en utilisant des puissances de D_ε .

► Propagation de la régularité

Dans le **cadre semi-classique**, on peut généraliser un résultat de Dutrifoy, Majda et Schochet obtenu dans le cas betaplan. On définit

$$D_\varepsilon \sim \begin{pmatrix} \varepsilon^2 \partial_2^2 - \omega^2 + 2\varepsilon\omega' & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon^2 \partial_2^2 - \omega^2 - 2\varepsilon\omega' & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon^2 \partial_2^2 - \omega^2 \end{pmatrix}$$

En utilisant la propriété fondamentale

$$[\varepsilon^2 \partial_2^2 - \omega^2, \varepsilon \partial_2 \pm \omega] = \pm 2\varepsilon\omega'(\varepsilon \partial_2 \pm \omega) \pm \varepsilon^2 \omega''$$

on vérifie alors que D_ε **commute presque avec** $A(x, \varepsilon D_x)$

$$[D_\varepsilon, A(x, \varepsilon D_x)] = O(\varepsilon^2 (Id - D_\varepsilon))$$

On construit alors des **espaces W_ε^s de type Sobolev à poids** en utilisant des puissances de D_ε .

► Propagation de la régularité

Dans le **cadre semi-classique**, on peut généraliser un résultat de Dutrifoy, Majda et Schochet obtenu dans le cas betaplan. On définit

$$D_\varepsilon \sim \begin{pmatrix} \varepsilon^2 \partial_2^2 - \omega^2 + 2\varepsilon\omega' & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon^2 \partial_2^2 - \omega^2 - 2\varepsilon\omega' & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon^2 \partial_2^2 - \omega^2 \end{pmatrix}$$

En utilisant la propriété fondamentale

$$[\varepsilon^2 \partial_2^2 - \omega^2, \varepsilon \partial_2 \pm \omega] = \pm 2\varepsilon\omega'(\varepsilon \partial_2 \pm \omega) \pm \varepsilon^2 \omega''$$

on vérifie alors que D_ε **commute presque avec** $A(x, \varepsilon D_x)$

$$[D_\varepsilon, A(x, \varepsilon D_x)] = O(\varepsilon^2 (Id - D_\varepsilon))$$

On construit alors des **espaces** W_ε^s **de type Sobolev à poids** en utilisant des puissances de D_ε .

Pour propager ce type d'estimations, il faut comprendre les **propriétés multiplicatives** des espaces W_ε^s .

- D_ε permet de contrôler deux ε -dérivées en x_2 .
- Comme le symbole principal de D_ε est scalaire, la symétrie du terme non linéaire d'ordre le plus élevé est préservée.

On peut alors montrer une **estimation trilinéaire** du type

$$\left| \langle U | S_j(U) \varepsilon \partial_j U \rangle_{W_\varepsilon^{3,2}} \right| \leq \| \varepsilon D_x U \|_{L^\infty} \| U \|_{W_\varepsilon^{3,2}}^2.$$

A cause du scaling semi-classique, on perd une puissance de ε dans l'injection

$$\| \varepsilon D_x U \|_{L^\infty} \leq \frac{1}{\varepsilon} \| U \|_{W_\varepsilon^{3,2}}.$$

On obtient finalement l'existence d'une solution U_ε sur un **temps** $[0, T^*[$ **uniforme en ε** .

Pour propager ce type d'estimations, il faut comprendre les **propriétés multiplicatives** des espaces W_ε^s .

- D_ε permet de contrôler deux ε -dérivées en x_2 .
- Comme le symbole principal de D_ε est scalaire, la symétrie du terme non linéaire d'ordre le plus élevé est préservée.

On peut alors montrer une **estimation trilinéaire** du type

$$\left| \langle U | S_j(U) \varepsilon \partial_j U \rangle_{W_\varepsilon^{3,2}} \right| \leq \| \varepsilon D_x U \|_{L^\infty} \| U \|_{W_\varepsilon^{3,2}}^2.$$

A cause du scaling semi-classique, on perd une puissance de ε dans l'injection

$$\| \varepsilon D_x U \|_{L^\infty} \leq \frac{1}{\varepsilon} \| U \|_{W_\varepsilon^{3,2}}.$$

On obtient finalement l'existence d'une solution U_ε sur un temps $[0, T^*[$ **uniforme en ε** .

Pour propager ce type d'estimations, il faut comprendre les **propriétés multiplicatives** des espaces W_ε^s .

- D_ε permet de contrôler deux ε -dérivées en x_2 .
- Comme le symbole principal de D_ε est scalaire, la symétrie du terme non linéaire d'ordre le plus élevé est préservée.

On peut alors montrer une **estimation trilinéaire** du type

$$\left| \langle U | S_j(U) \varepsilon \partial_j U \rangle_{W_\varepsilon^{3,2}} \right| \leq \| \varepsilon D_x U \|_{L^\infty} \| U \|_{W_\varepsilon^{3,2}}^2.$$

A cause du scaling semi-classique, on perd une puissance de ε dans l'injection

$$\| \varepsilon D_x U \|_{L^\infty} \leq \frac{1}{\varepsilon} \| U \|_{W_\varepsilon^{3,2}}.$$

On obtient finalement l'existence d'une solution U_ε sur un **temps** $[0, T^*[$ **uniforme en** ε .

► Approximation linéaire

Soit U_ε^η la solution du système faiblement non linéaire

$$\varepsilon^2 \partial_t U + A(x, \varepsilon D_x)U + \varepsilon^{3+\eta} S_j(U) \varepsilon \partial_j U = 0, \quad \eta \geq 0.$$

et V_ε la solution du système linéaire.

- Si $\eta > 0$, pour tout $T > 0$

$$\|U_\varepsilon - V_\varepsilon\|_{L^2} \rightarrow 0 \text{ sur } [0, T] \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0.$$

En particulier la norme L^2 de U_ε sur un compact donné reste bornée par en dessous s'il y a des ondes de Rossby piégées, i.e. si le front d'onde initial intersecte Λ .

- Si la solution V_ε du système linéaire satisfait $\|\varepsilon V_\varepsilon\|_{L^\infty} \rightarrow 0$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$, alors

$$\|U_\varepsilon^0 - V_\varepsilon\|_{L^2} \rightarrow 0 \text{ sur } [0, T^*[\text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0.$$

En particulier, pour $t \in]0, T^*[$, l'énergie de U_ε sur tout compact est portée seulement par les ondes de Rossby.

► Approximation linéaire

Soit U_ε^η la solution du système faiblement non linéaire

$$\varepsilon^2 \partial_t U + A(x, \varepsilon D_x)U + \varepsilon^{3+\eta} S_j(U) \varepsilon \partial_j U = 0, \quad \eta \geq 0.$$

et V_ε la solution du système linéaire.

- Si $\eta > 0$, pour tout $T > 0$

$$\|U_\varepsilon - V_\varepsilon\|_{L^2} \rightarrow 0 \text{ sur } [0, T] \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0.$$

En particulier la norme L^2 de U_ε sur un compact donné reste bornée par en dessous s'il y a des ondes de Rossby piégées, i.e. si le front d'onde initial intersecte Λ .

- Si la solution V_ε du système linéaire satisfait $\|\varepsilon V_\varepsilon\|_{L^\infty} \rightarrow 0$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$, alors

$$\|U_\varepsilon^0 - V_\varepsilon\|_{L^2} \rightarrow 0 \text{ sur } [0, T^*[\text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0.$$

En particulier, pour $t \in]0, T^*[$, l'énergie de U_ε sur tout compact est portée seulement par les ondes de Rossby.

► Approximation linéaire

Soit U_ε^η la solution du système faiblement non linéaire

$$\varepsilon^2 \partial_t U + A(x, \varepsilon D_x)U + \varepsilon^{3+\eta} S_j(U) \varepsilon \partial_j U = 0, \quad \eta \geq 0.$$

et V_ε la solution du système linéaire.

- Si $\eta > 0$, pour tout $T > 0$

$$\|U_\varepsilon - V_\varepsilon\|_{L^2} \rightarrow 0 \text{ sur } [0, T] \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0.$$

En particulier la norme L^2 de U_ε sur un compact donné reste bornée par en dessous s'il y a des ondes de Rossby piégées, i.e. si le front d'onde initial intersecte Λ .

- Si la solution V_ε du système linéaire satisfait $\|\varepsilon V_\varepsilon\|_{L^\infty} \rightarrow 0$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$, alors

$$\|U_\varepsilon^0 - V_\varepsilon\|_{L^2} \rightarrow 0 \text{ sur } [0, T^*[\text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0.$$

En particulier, pour $t \in]0, T^*[$, l'énergie de U_ε sur tout compact est portée seulement par les ondes de Rossby.