Équations aux dérivées partielles et applications

M. Pierre-Louis Lions, membre de l'Institut
(Académie des Sciences), Professeur

Cours : Jeux à champ moyen (suite)

1. Introduction

Le cours, suite de celui de l'an dernier, a porté sur une théorie nouvelle élaborée en collaboration avec M. Jean-Michel Lasry, appelée théorie des « jeux à champ moyen ». L'objectif de cette théorie est d'introduire rigoureusement, d'analyser et d'appliquer dans différents contextes une nouvelle classe de modèles mathématiques permettant d'étudier des situations faisant intervenir un très grand nombre de joueurs rationnels (au sens de l'Économie, c'est-à-dire optimisant leur comportement), chaque joueur interagissant avec les autres en « moyenne ». Ce type de situations est fréquent en Économie et en Finance où chaque agent (joueur) optimise ses actions en tenant compte d'informations globales c'est-à-dire moyennées sur l'ensemble des joueurs. D'autres domaines d'applications concernent les transports et l'étude du trafic ou la Biologie et l'Écologie.

Plus précisément, nous considérons des équilibres de Nash à N joueurs, faisons tendre N vers l'infini, obtenons ainsi des systèmes d'un type nouveau d'Équations aux Dérivées Partielles (EDP en abrégé) non linéaires modélisant des équilibres (ou points de Nash) pour des continua de joueurs, et analysons mathématiquement ces systèmes. Les équations que nous introduisons de cette manière sont très générales et contiennent comme cas particuliers de nombreux systèmes et équations classiques : les équations elliptiques semilinéaires, les équations de type Hartree de la Mécanique Quantique, les équations d'Euler compressibles de la Mécanique des Fluides, les modèles cinétiques (équations de Vlasov, Fokker-Planck, Boltzmann…), les équations des milieux poreux, les équations du transport optimal de masse (problème de Monge-Kantorovich) ou les équations d'Euler-Lagrange associées à des problèmes de contrôle optimal d'EDP…

La terminologie « champ moyen » provient de la Physique et de la Mécanique et est naturelle puisque notre approche contient effectivement les théories classiques de champ moyen en Physique et en Mécanique (voir d'ailleurs les exemples mentionnés plus haut). Indiquons simplement qu'un cas particulier de notre théorie est celui où les joueurs n'ont plus de possibilité d'influer sur (en optimisant) leur comportement et sont alors soumis passivement aux interactions avec le reste des joueurs ce qui est bien sûr le cas des « particules » en Physique ou des éléments de matière en Mécanique des milieux continus.

Il est donc clair que la classe de systèmes que nous obtenons par cette approche de modélisation est extrêmement vaste et que de très nombreuses questions d'Analyse Mathématique se posent, dont beaucoup restent à résoudre. Signalons en outre une direction importante de notre théorie : dans tout ce qui précède, nous avons implicitement considéré un ensemble homogène de joueurs « identiques » (en fait, ayant les mêmes caractéristiques). Il est en fait utile et souvent réaliste d'introduire plusieurs catégories de joueurs (ou agents, ou organismes vivants…), chaque catégorie étant composée d'un très grand nombre de « joueurs identiques ». De plus, le nombre total de joueurs n'est pas nécessairement constant dans le temps (naissance et mort, échanges d'attributs…). Les systèmes que nous introduisons dans ces cas contiennent alors comme cas particuliers des modèles de dynamique des populations ou de réactions chimiques…

Cette année, le cours a porté sur le cadre théorique mathématique nécessaire à la justification (rigoureuse) de la limite quand le nombre de joueurs N tend vers l'infini. Ce cadre mathématique permet de comprendre le comportement asymptotique des fonctions symétriques d'un grand nombre de variables et de leur calcul différentiel, ainsi que des solutions symétriques d'EDP en très grande dimension. Signalons le travail antérieur d'A. Grunbaum[1] qui contient une esquisse du cadre général abstrait que nous introduisons, et les considérations heuristiques d'A. Matytsin[2]. Enfin, indiquons que les résultats que nous présentons s'appliquent à de nombreux autres sujets que la théorie des jeux à champ moyen : EDP à N variables quand N tend vers l'infini, grandes déviations pour des EDP stochastiques, théorie du transport et systèmes de particules (éventuellement stochastiques) en interaction.

2. Fonctions symétriques d'un grand nombre de variables

Afin de simplifier la présentation et les notations, nous ne considérons ici que le cas de variables décrivant un ensemble $Q = \overline{\mathcal{O}}$ où $\mathcal{O}$ est un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^d$ $(d \geq 1)$ muni de la métrique euclidienne usuelle $(|x - y|)$ — nous pourrions aussi bien considérer le tore ou $[0, 1]^d$ avec périodicité, ou aussi simplement le cas

1. Propagation of chaos for the Boltzmann Equation, Arch. Rat. Mech. Anal., **42** (1971), p. 323-345.

2. On the large N limit of the Itzykson-Zuber integral, preprint.

d'un espace métrique Q compact quelconque. L'objectif étant de comprendre le comportement quand N tend vers l'infini de suites de fonctions « continues » $u_N(x_1, \ldots, x_N)$ symétriques par rapport à $(x_1, \ldots, x_d) \in Q^N$ (i.e. $u_N(X) = u_N(X_\sigma)$, $\forall X \in Q^N$, $\forall \sigma \in \mathcal{S}^N$, où $X = (x_1, \ldots, x_N)$, $X_\sigma = (x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(N)})$) et $\mathcal{S}^N$ désigne le groupe des permutations de l'ensemble $\{1, \ldots, N\}$), il nous faut introduire diverses métriques sur Q^N (et sur l'espace quotient $Q^N/\mathcal{S}^N$) : $\tilde{d}_p(X,Y) = (\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}|x_i - y_i|^p)^{1/p}$ (pour $1 \leqslant p \leqslant \infty$), $\tilde{d}_{LP}(X,Y) = \inf\{\varepsilon > 0 \,/\, \frac{1}{N}(\#\{i \,/\, |x_i - y_i| > \varepsilon\}) < \varepsilon\}$, $d_p(X, Y) = \inf_{\sigma\in\mathcal{S}^N} \tilde{d}_p(X,Y_\sigma)$, $d_{LP}(X,Y) = \inf_{\sigma\in\mathcal{S}^N} \tilde{d}_{LP}(X,Y_\sigma)$.

L'idée essentielle sera de considérer un point $X = (x_1, \ldots, x_N) \in Q^N$ (identifié à ses permutations…) comme soit une mesure de probabilité « empirique » $m_X^N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\delta_{x_i}$, soit une variable aléatoire dans un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ nontrivial (fixé dans tout ce qui suit) prenant les valeurs $x_1, \ldots, x_N$ avec probabilité $\frac{1}{N}$. On note enfin $P = P(Q)$ l'ensemble des mesures de probabilité sur Q, espace métrique compact pour les distances dites de Wasserstein $d_p(m_1, m_2) = \inf\{E[|X - Y|^p]^{1/p} \,/\, X \in L^p(\Omega\,;\mathbb{R}^d), X$ a pour loi m_1, Y a pour loi $m_2\}$ (en tout cas pour $p < \infty$) ou de Lévy-Prohorov $d_{LP}(m_1, m_2) = \inf\{\varepsilon > 0, P(|X - Y| > \varepsilon) < \varepsilon\}$. Malheureusement, la terminologie consacrée oublie que les distances d_p ont été introduites (et identifiées dans le cas $p = 1$) par Monge et Kantorovich. Toutes ces distances (à nouveau si $p < \infty$) induisent sur P la convergence faible des mesures et on a bien $d_p(m_X^N, m_Y^N) = d_p(X, Y)$, $d_{LP}(m_X^N, m_Y^N) = d_{LP}(X, Y)$. Enfin, on notera P_p l'espace P muni de la distance d_p et $P = P_2$.

En observant que les mesures m_X^N sont denses dans P, on obtient facilement le

Théorème 1 : *Soit $u_N \in C(Q^N)$ symétrique. On suppose que*

(1)
$$\begin{cases}\sup_N \sup_{X\in Q^d} |u_N(X)| < \infty, \lim_{\varepsilon\to 0} \sup_N \sup\{|u_N(X) \\ -u_N(Y)| \,/\, X, Y \in Q^N, \tilde{d}_{LP}(X,Y) < \varepsilon\} = 0\end{cases}$$

Alors, on peut extraire une sous-suite (encore notée u_N pour simplifier) telle qu'il existe $U \in C(P)$ vérifiant

(2)
$$\lim_{N\to\infty} \sup_{X\in Q^N} |u^N(X) - U(m_X^N)| = 0$$

Remarques : i) De multiples variantes et extensions de ce résultat sont possibles (plusieurs groupes de variables symétriques, réitération, modules de continuité en $\tilde{d}_\infty$, demi-limites au sens des solutions de viscosité…),

ii) Un exemple important de fonctions U dans $C(P)$ est fourni par les polynômes i.e. les combinaisons linéaires finies de monômes définis par, étant donnés $k \geqslant 1$ (ordre) et $\varphi \in C(Q^k)$ ou pour simplifier $C^\infty(Q^k)$ symétrique (coefficient),

$$M_k(m) = \int_{Q^K} \varphi \bigotimes_{i=1}^{k} dm(x_i). \tag{3}$$

Et l'ensemble des polynômes est dense dans C (application du théorème de Stone-Weierstrass ou démonstration constructive directe...),

iii) Il sera utile dans la suite d'observer qu'une fonction U dans $C(P_p)$ peut être identifiée à une fonction dans $C(L^p)$ (où $L^p = L^p(\Omega\,;\mathbb{R}^d)$) possédant la propriété d'invariance ou de symétrie suivante : $U(X) = U(Y)$ si X et Y ont la même loi. On note $C_{\mathcal{L}}$ le sous-espace vectoriel formé composé de telles fonctions.

Le résultat ci-dessous est en quelque sorte dual d'un résultat classique à savoir le théorème d'Hewitt et Savage (que l'on peut en fait redémontrer très simplement grâce à notre point de vue...). Rappelons que, si $(f_N)_{N \geqslant 1}$ est une suite de mesures de probabilité sur Q^N symétriques, après extraction éventuelle d'une sous-suite, on peut supposer que les marginales $f_N^k = \int f_N(X) dx_{k+1} \ldots dx_N$ convergent faiblement, pour tout $k \geqslant 1$, vers $f^k \in P(Q^k)$ symétrique. Bien sûr, $f^k = \int f^{k+1} dx_{k+1}$ $(\forall k \geqslant 1)$. Et la donnée d'une telle suite consistante $(f^k)_{k \geqslant 1}$ est équivalente (Hewitt-Savage) à la donnée d'une mesure de probabilité π sur P telle que $f^k = \int_P \bigotimes_{i=1}^{k} m(x_i)\, d\pi(m)$. On dit alors que f_N converge vers π (et on dira que u_N converge vers U si (2) a lieu).

Théorème 2 : *Soient $U \in C(P)$, $\pi \in P(P)$, $u_N \in C(Q^N)$ symétrique et $f_N \in P(Q^N)$ symétrique. On suppose que u_N converge vers U et que f_N converge vers π. Alors, on a*

$$\int_{Q^N} u_N \, df_N \to \int_P U(m)\, d\pi(m) \text{ si } N \to \infty \tag{4}$$

Remarque : Si $\pi = \delta_f$ (« chaos moléculaire »...) alors on déduit de (4) le fait suivant

$$\int_{Q^N} \left| u_N - \int_{Q^N} u_N \, df_N \right|^2 df_N \to 0 \; si \; N \to \infty \tag{5}$$

3. Calcul différentiel

Le but est de définir sur P un calcul différentiel compatible avec la limite considérée au paragraphe précédent, ce qui n'est pas le cas du calcul différentiel élaboré (ou esquissé) dans l'espace (dit) de Wasserstein par de nombreux auteurs. La présentation la plus simple de notre calcul différentiel consiste en se servir d'une part de la structure Hilbertienne de $L^2(\Omega)$ et du calcul différentiel induit et d'autre part de la troisième remarque faite après le théorème 1.

Plus précisément, on note $\mathcal{L}$ l'application qui à $X \in L^2$ (Ω) associe sa loi. Si U est une fonction définie sur P (ou sur un voisinage de $m_0 \in P$) alors $U \circ \mathcal{L}$ est définie sur L^2 et $U \circ \mathcal{L}(X) = U \circ \mathcal{L}(Y)$ si X et Y ont même loi. Bien sûr, $U \in C^{0,\alpha}$ (P) $(0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$ si et seulement si $U \circ \mathcal{L} \in C^{0,\alpha}_{\mathcal{L}}(L^2)$. On dit alors que U est différentiable en $m_0 \in P$ s'il existe X_0 tel que $\mathcal{L}(X_0) = m_0$ et $U \circ \mathcal{L}$ est différentiable en X_0 (on peut vérifier que cette propriété est équivalente à la différentiabilité de $U \circ \mathcal{L}$ en tout point de $\mathcal{L}^{-1}(m_0)$). En identifiant différentielle et gradient grâce à la structure Hilbertienne de L^2 (Ω), on peut démontrer que si $\tilde{U}$ est différentiable en $X_0 \in L^2$ et $\tilde{U} \in C_{\mathcal{L}}(L^2)$ (par exemple), alors U définie par $U(m) = \tilde{U}(X)$ si $\mathcal{L}(X) = m$ est différentiable en $m_0 = \mathcal{L}(X_0)$ et $\tilde{U}'(X_0)\,(\in L^2(\Omega))$ est mesurable par rapport à la tribu engendrée par X_0.

Ensuite, il est naturel de définir les fonctions C^k, $C^{k,a}$ $(0 < \alpha \leqslant 1)$ sur P par ce biais : par exemple, $U \in C^1$ (P) si $U \circ \mathcal{L} \in C^1$ (L^2)…

Se posent alors les questions de savoir si le calcul différentiel que nous venons de définir est i) d'une part intrinsèque, ii) d'autre part cohérent avec la limite « $N \to \infty$ ». Tel est bien le cas et nous nous contenterons d'illustrer ces deux faits par quelques exemples. Tout d'abord, la notion naturelle de variations dans P correspond au transport des mesures par des champs de vecteur B sur $\mathbb{R}^d$ (ou sur Q…) supposés, pour simplifier, réguliers. En notant par $(m_t)_{t \in \mathbb{R}}$ le groupe induit, on montre que si U est différentiable en m_0 alors $U(m_t)$ est dérivable en $t = 0$ et

(6) $$\frac{d}{dt} U(m_t)\,|_{t=0} = E[\nabla(U \circ \mathcal{L})(X_0)\, B(X_0)] \quad \text{où} \quad \mathcal{L}(X_0) = m_0$$

De plus, on démontre que $U \in C^1$ (P) si et seulement si il existe un module de continuité uniforme ω tel que, pour toute mesure $M(x, y) \in P(Q^2)$, $\frac{d}{dt} U(m_t)\,|_{t=0+}$ existe et

(7) $$|U(m_1) - U(m_0) - \frac{d}{dt} U(m_1)| \leqslant d_2(m_0, m_1)\,\omega(d_2(m_0, m_1)),$$

où m_t est défini par $\int_Q \varphi\, dm_t = \int_{Q2} \varphi\,((1-t)\,x + ty)\, dM(x, y)$, $\forall \varphi\, C(Q)$.

Enfin, U est différentiable en m_0 si et seulement si on peut trouver $\overline{U}$, $\underline{U} \in C^1(P)$ telles que : $\overline{U} \geqslant U \geqslant \underline{U}$ sur P et $\overline{U}(m_0) = \underline{U}(m_0)$.

Le deuxième point, à savoir la cohérence avec la limite étudiée précédemment, peut s'illustrer par l'exemple suivant des résultats que nous avons obtenus. En notant $\pi_N U$ la fonction symétrique définie sur Q^N par $\pi_N U(X) = U(m^N_X)$, on démontre que $U \in C^1$ (P) si et seulement si $\pi_N U \in C^1$ (Q^N) et il existe un module de continuité uniforme ω indépendant de N tel que, pour tous X, $Y \in Q^N$,

(8) $$|(\pi_N U)(Y) - (\pi_N U)(X) - (\nabla(\pi_N U)(X), Y - X)| \leqslant d_2(X, Y)\,\omega\,(d_2(X, Y)).$$

Remarque : Bien sûr, les résultats mentionnés ci-dessus ne sont que des échantillons (à peine) représentatifs du calcul différentiel mis en place et présenté dans le cours. Signalons qu'il est possible d'obtenir de nombreuses autres caractérisations, d'introduire des méthodes de régularisation et d'étudier l'approximation (par exemple par des polynômes)… Enfin, nous pouvons ainsi introduire une notion de fonction convexe sur P (U est convexe si $U \circ \mathcal{L}$ est convexe sur L^2) qui a de nombreuses applications…

4. Équations aux dérivées partielles

Là encore, nous nous contenterons de quelques exemples.

EXEMPLE 1 : Équation eikonale

On considère la solution u_N (solution de viscosité) de

$$\frac{\partial u_N}{\partial t} + N \sum_i |\nabla_{x_i} u_N|^2 = 0 \text{ dans } (\mathbb{R}^d)^N \times]0,+\infty[\tag{9}$$

avec la condition initiale

$$u_N|_{t=0} = u_N^0 \tag{10}$$

où u_N^0 est symétrique et $u_N^0 \underset{N}{\rightarrow} U^0 \in C(P)$. La solution (de viscosité) de (9) est donnée par la formule de Lax-Oleinik

$$u_N(X,t) = \inf\{u_N(Y) + \frac{1}{2t}\tilde{d}_2(X,Y)^2\}\,; \tag{11}$$

Bien sûr, u_N est symétrique et $u_N \underset{N}{\rightarrow} U \in C(P \times [0,+\infty[)$ donnée par

$$U(m,t) = \inf_{m' \in P}\{U_0(m') + \frac{1}{2t}d_2(m,m')^2\}. \tag{12}$$

Grâce au calcul différentiel introduit ci-dessus, on peut alors écrire une équation « Eikonale » dans P et démontrer que la formule (12) est bien l'unique solution (de viscosité) de cette équation.

EXEMPLE 2 : Équation de diffusion à coefficients constants

On considère la solution u_N de

$$\frac{\partial u_N}{\partial t} - \frac{\alpha^2}{2}\sum_{i=1}^N \Delta_{x_i} u - N - \frac{\beta^2}{2}\sum_{i,j=1}^N \nabla_{x_i}\nabla_{x_j} U_N = 0 \text{ dans } (\mathbb{R}^d)^N \times]0,+\infty[\tag{13}$$

avec la condition initiale (10). Là encore, on démontre que $u_N \underset{N}{\rightarrow} U \in C(P \times [0,\infty[)$ où U est l'unique solution (de viscosité par exemple) d'une équation de diffusion sur P que l'on peut écrire formellement comme

$$\frac{\partial U}{\partial t} + (\nabla U, \frac{\alpha^2}{2}\Delta m) - \frac{\beta^2}{2}\sum_{i=1}^d D^2 U(\frac{\partial m}{\partial x_i}, \frac{\partial m}{\partial x_i}) = 0 \ \ \textit{et} \ \ U|_{t=0} = U^0 \tag{14}$$

Il est bien sûr possible et utile d'aller au-delà de ces deux exemples, ce que nous ferons dans le cours de l'année 2008-2009.

Cours et Séminaire

Cours : Le cours a eu lieu du 12 octobre 2007 au 11 janvier 2008.

Séminaire de Mathématiques Appliquées

- 12 octobre 2007 : Olivier Pironneau (Laboratoire J.-L. Lions, Université Paris 6). Zooms numériques et méthodes de sous-domaines.
- 19 octobre 2007 : Bruno Bouchard (Ceremade, Université Paris-Dauphine). Régularité d'EDS rétrogrades et approches probabilistes pour la résolution d'équations semi-linéaires paraboliques.
- 9 novembre 2007 : Christian Klingenberg (Université de Wuerzburg, Allemagne). New numerical solvers for Hydro- and Magnetohydrodynamics.
- 16 novembre 2007 : Xavier Blanc (Laboratoire J.-L. Lions, Université Paris 6). Vortex dans des condensats de Bose-Einstein en rotation rapide.
- 23 novembre 2007 : Nizar Touzi (CMAP, École Polytechnique). Méthode de Monte Carlo pour les EDP non linéaires.
- 30 novembre 2007 : Albert Cohen (Laboratoire J.-L. Lions, Université Paris 6). Triangulations adaptatives et algorithmes greedy pour l'approximation et l'apprentissage.
- 7 décembre 2007 : Stefano Olla (Ceremade, Université Paris-Dauphine). Modèles microscopiques pour la conductivité thermique.
- 14 décembre 2007 : Clément Mouhot (Ceremade, Université Paris-Dauphine). Quelques résultats d'hypocoercivité en théorie cinétique collisionnelle.
- 11 janvier 2008 : Jean-Michel Morel (CMLA-ENS Cachan). Encore et toujours l'équation de la chaleur.
- 18 janvier 2008 : Pierre Cardaliaguet (Université de Brest). Propagation d'interfaces avec termes non locaux.
- 25 janvier 2008 : Stéphane Gaubert (INRIA-Rocquencourt). De la théorie de Perron-Frobenius à la programmation dynamique et vice versa.
- 1er février 2008 : Sylvia Serfaty (Université de Paris 6 & Courant Institute, New York). Configurations de vortex dans le modèle de Ginzburg-Landau de la supraconductivité.
- 8 février 2008 : Sergio Guerrero Rodriguez (Université de Paris 6). Contrôle optimal singulier pour quelques équations aux dérivées partielles.
- 15 février 2008 : Jean-François Le Gall (Université de Paris-Sud 11). Autour des grandes cartes planaires aléatoires.
- 14 mars 2008 : Radu Ignat (Université de Paris-Sud 11). Un résultat de compacité pour l'état de Landau en micromagnétisme.
- 21 mars 2008 : Peter Constantin (Université de Chicago). Particles and Fluids.
- 28 mars 2008 : Herbert Koch (Université de Bonn). Strong uniqueness for elliptic and parabolic equations.
- 4 avril 2008 : Tony Lelièvre (CERMICS, ENPC). Méthodes adaptatives en dynamique moléculaire.
- 11 avril 2008 : Claude Viterbo (École Polytechnique). Homogénéisation symplectique.
- 16 mai 2008 : Antonin Chambolle (École Polytechnique). « Rigidité » dans les matériaux fracturés.
- 23 mai 2008 : Nader Masmoudi (Courant Institute of Mathematical Science). Passage à la limite de Klein-Gordon-Zakharov vers Schrödinger non linéaire.

— 30 mai 2008 : François Golse (École Polytechnique). Le gaz de Lorentz périodique dans la limite de Boltzmann-Grad.
— 6 juin 2008 : Massimiliano Gubinelli (Université de Paris-Sud). Sur l'équation du transport stochastique et les EDS avec dérive irrégulière.
— 13 juin 2008 : Ivan Gentil (Ceremade, Université Paris-Dauphine). Convergence entropique et inégalités fonctionnelles.
— 20 juin 2008 : Graeme Milton (University of Utah). Variational principles for elastodynamics and Maxwell's equations in inhomogeneous bodies.

Publications

— *Towards a self-consistent theory of volatility.* En collaboration avec J.-M. Lasry. A paraître dans J. Maths. Pures Appl.
— *On the energy of some microscopic stochastic lattices.* En collaboration avec X. Blanc et C. Le Bris. Arch. Rat. Mech. Anal., **184** (2007), p. 303-340.
— *Correlations and bounds for stochastic volatility models*. En collaboration avec M. Musiela. Annales de l'I.H.P. Non Linear Analysis, **24** (2007), p. 1-16.
— *Large investor trading impacts on volatility.* En collaboration avec J.-M. Lasry. Annales de l'I.H.P. Non Linear Analysis, **24** (2007), p. 311-323.
— *Instantaneous self-fulfilling of long-term prophecies on the probabilistic distribution of financial asset values.* En collaboration avec J.-M. Lasry. Annales de l'I.H.P. Non Linear Analysis, **24** (2007), p. 361-368.
— *Mean Field Games.* En collaboration avec J.-M. Lasry. Japanese Journal of Mathematics, **2** (2007), p. 229-260.
— *Deux remarques sur les flots généralisés d'équations différentielles ordinaires.* En collaboration avec M. Hauray et C. Le Bris. C.R. Acad. Sci. Paris. **344** (2007), p. 759-764.
— *Global existence of weak solutions to some micro-macro models.* En collaboration avec N. Masmoudi. C.R. Acad. Sci. Paris, **345** (2007), p. 15-20.
— *A discussion about the homogenization of moving interfaces.* En collaboration avec P. Cardialaguet et P.E. Souganidis.
— *Préface du numéro spécial de ESAIM M^2AN sur la Modélisation Moléculaire,* **41** (2007).
— *Atomistic to continuum limits for computational materials science.* En collaboration avec X. Blanc et C. Le Bris. ESAIM M^2AN, **41** (2007), p. 391-426.
— *Stochastic homogenization and random lattices.* En collaboration avec X. Blanc et C. Le Bris.
— *Convexity and non-convexity of option prices for SABR models.* En collaboration avec M. Musiela.
— *Trois chapitres du Lecture Notes in Maths. # 1919, Paris-Princeton Lectures In Mathematical Finance 2004*, En collaboration avec J.-M. Lasry. Springer, Berlin, (2007), p. 103-172.
— *Résumé du Cours au Collège de France (2006-2007) : Jeux à champ moyen.*
— *Existence and uniqueness of solutions to Fokker-Planck type equations with irregular coefficients.* En collaboration avec C. Le Bris. Comm. P.D.E., **33** (2008), p. 1272-1317.
— *Molecular simulation and related topics : some open mathematical problems.* Non-linearity, **21** (2008).
— *Préface de Finance and Sustainable Developement*, Economica, Paris, 2008. En collaboration avec P.-A. Chiappori et J.-M. Lasry.

Missions, Invitations, Conférences

— Conférence au Colloque « Geometric Function Theory and Nonlinear Analysis », on the occasion of the 60^{th} birthday of Tadeusz Iwaniec, Ischia, Naples (11-14 octobre 2007).
— Conférence à l'Académie des Sciences d'Autriche : Johann Radon Lectures, Vienne (17 octobre 2007).
— Conférence dans un lycée dans le cadre de la « Junior Academy », Vienne, (18 octobre 2007).
— Conférence pour l'élection à l'Académie des Sciences d'Argentine, « Analyses, modèles et simulations », Rosario (26 octobre 2007).
— Cours (8 h) à l'Université du Texas à Austin (13-26 janvier 2008).
— Conférences du Collège de France à Tunis « L'homme artificiel », Bibliothèque Nationale (4 février 2008).
— Conférence publique à l'Académie des Sciences, Tunis (5 février 2008).
— Cours (8 h) à l'Université du Texas à Austin (10-21 février 2008).
— Cours (2 h) à l'Université de La Havane (28 février 2008).
— Conférence au Congrès « 8^{th} International Conference on Operations Research », La Havane, Cuba (28 février 2008).
— Cours (6 h) dans le cadre du « Collège de France à Bruxelles », Bruxelles (15-16 avril 2008, 21-22 avril 2008).
— Cours (4 h) à l'École d'Été, « Topics in PDE and applications 2008 », Grenade (7-9 avril 2008).
— Conférence « Magna », Académie des Sciences du Brésil, Rio de Janeiro (6 mai 2008).
— Conférence COPEA, UFRJ, Rio de Janeiro (8 mai 2008).
— Conférence au Colloque « Chicago-Paris Workshop in Financial Mathematics », Château de la Princesse, Mello (27 juin 2008).

Responsabilités collectives et fonctions diverses

— Membre de l'Académie des Sciences ; de l'Académie des Technologies ; de l'Académie des Sciences d'Italie, d'Argentine et du Brésil ; de l'Istituto Lombardo.
— Professeur à temps partiel à l'École Polytechnique.
— Président du Conseil Scientifique de l'ENS puis Membre du Conseil d'Administration de l'ENS.
— Président du Conseil Scientifique du CEA-DAM.
— Président du Conseil Scientifique d'EDF.
— Président du Conseil Scientifique de France Telecom.
— Président du Conseil Scientifique de la Fondation de Recherche pour l'Aéronautique et l'Espace.
— Président du Conseil Scientifique de la Chaire de Finance et Développement Durable de l'Université Paris-Dauphine.
— Président du Conseil Scientifique de ParisTech.
— Président du jury du prix « Science et Défense ».
— Membre du Haut Conseil de la Science et de la Technologie.
— Membre du Visiting Committee du CEA.

— Membre du Conseil Scientifique de l'Institut Europlace de Finance.
— Membre du Scientific Advisory Panel de l'European Mathematical Society.
— Membre fondateur du Comité International de l'« International Summer School of Applied Mathematics », Morningside Institute, Chinese Academy of Sciences.
— Membre du Comité des Programmes Scientifiques du CNES.
— Membre de l'International Advisory Board de l'Institute of Mathematical Sciences de l'Imperial College.
— Membre du Conseil Scientifique de la Fondation du Risque.
— Membre du Board of Trustees et du Conseil Scientifique de l'IMDEA (Madrid).
— Membre du Conseil d'Administration et du Conseil Scientifique de la Fondation Sciences Mathématiques de Paris.
— Membre du Conseil d'Administration de la Fondation d'Entreprise IXIS.
— Membre du Comité d'Orientation de l'ENS.
— Membre de la Société des Amis du Palais de la Découverte.
— Membre de l'International Advisory Board of the Scuola di Dottorato in Scienze Astronomiche, Chimiche, Fisiche e Mathematiche « Vito Volterra ».
— Administrateur de Sark et Channel Bridge.
— Conseiller Scientifique auprès de BNP PARIBAS, CALYON, EADS-ST, REECH.