Équations aux dérivées partielles et applications

M. Pierre-Louis LIONS, membre de l'Institut
(Académie des Sciences), professeur

COURS : Équations aux dérivées partielles stochastiques

1. Introduction

Le cours a porté sur une classe générale d'équations aux dérivées partielles stochastiques, du second ordre, fortement non linéaires et éventuellement dégénérées, de la forme

$$(1) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = F\,(x,\, t,\, \omega,\, u,\, Du,\, D^2u) + H\,(x,\, t,\, \omega,\, u,\, Du) \cdot \zeta$$

où $u = u\,(x, t, \omega)$ est une fonction scalaire ($u \to \mathbb{R}$), $x \in \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, $t \geq 0$, ω (l'aléa) $\in \Omega$ avec (Ω, F, F_t, P) un espace de probabilité fixé muni d'une filtration (continue, complète), Du correspond au gradient spatial de u ($Du = \nabla_x u$) et D^2u à la matrice Hessienne spatiale de u. Les fonctions F et H sont données et adaptées à la filtration. De plus, F est définie sur $\mathbb{R}^d \times [0, +\infty[\times \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times S^d$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, où S^d désigne l'espace des matrices symétriques $d \times d$. Et on fera toujours l'hypothèse d'ellipticité (éventuellement dégénérée) suivante pour tous x, t, ω, λ, $p \in \mathbb{R}^d \times [0, +\infty[\times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$

$$(2) \qquad F\,(x, t, \omega, \lambda, p, A) \leq F\,(x, t, \omega, \lambda, p, B) \text{ si } A, B \in S^d,\ A \leq B.$$

La fonction H est définie sur $\mathbb{R}^d \times [0, +\infty[\times \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ à valeurs dans $\mathbb{R}^M$ ou même dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$) avec $M \geq 1$. Enfin, ζ est, au moins formellement, la dérivée temporelle d'un processus stochastique (éventuellement « spatio-temporel »...) adapté à F_t, à valeurs dans $\mathbb{R}^M$ (ou $\mathcal{H}$) et $H \cdot \zeta$ désigne le produit scalaire. Un exemple naturel et important correspond à $\zeta = \frac{d}{dt} W$ où W est un mouvement Brownien dans $\mathbb{R}^M$ adapté à F_t.

Le cours a permis de présenter quelques-uns des principaux éléments d'une théorie élaborée en collaboration avec P.E. Souganidis appelée théorie des solutions de viscosité stochastiques. Pour simplifier la présentation de ce résumé, nous nous restreignons dans ce qui suit au cas particulier où $F = F\ (Du,\ D^2u)$, $H = H\ (Du)$, $\zeta = w$ (où $w \in C\ ([0, +\infty\ [;\ \mathbb{R}^M)$, $w\ (0) = 0$) et au cas de problèmes posés dans l'espace entier (i.e. sans conditions aux limites). L'équation (1) devient alors pour $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$, $\omega \in \Omega$

$$(3) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = F\ (Du,\ D^2u) + H\ (Du) \cdot \dot{w}$$

complétée de la condition initiale

$$(4) \qquad u|_{t=} = u_0 \text{ sur } \mathbb{R}^d$$

où $u_0 \in UC\ (\mathbb{R}^d)$ – espace des fonctions scalaires uniformément continues sur $\mathbb{R}^d$ – est donnée.

2. Motivations et difficultés

Les motivations pour l'équation (1) ou (3) et ses applications sont nombreuses et d'origine variée. Le cas où F, H sont linéaires a été étudié par de nombreux probabilistes et apparaît naturellement dans le « transport par diffusion ». Par exemple, si W_t est un Brownien la fonction $u = u_0\,(x + W_t)$, d'après la formule de Itô, vérifie (au sens des différentielles de Itô)

$$(5) \qquad du = \frac{1}{2}\Delta \mathrm{u}\,\mathrm{dt} + Du \cdot dW.$$

Une application reliée, mais assez différente, concerne le filtrage non linéaire et l'équation dite de Zakaï.

Une autre application apparaît dans la théorie du contrôle stochastique. De la même manière que, grâce au principe de la programmation dynamique, le contrôle stochastique « en espérance » conduit aux équations de Hamilton-Jacobi-Bellman, on peut montrer que le contrôle stochastique « trajectoriel » conduit à des équations du type (1).

D'autres applications de ces équations apparaissent en science des matériaux, en Finance, en Physique Statistique et dans la propagation de fronts et d'interfaces dans des milieux aléatoires...

Les difficultés mathématiques sont considérables car aucune théorie ou méthode « classique » ne s'applique à cause des éventuelles singularités, de la non linéarité de l'équation (1) et du fait que, presque sûrement, les trajectoires du mouvement Brownien ne sont pas à variation bornée.

La formulation même de l'équation (3) (ou (1)) pose problème. En effet, si W est un mouvement Brownien, il est tentant d'utiliser les différentielles de Itô pour écrire (3). Et on peut établir que ceci n'est pas réellement possible (inconsistance de la propagation de fronts et d'interfaces, caractère mal posé de (3) pour $F = 0$, H non nulle par exemple...). On est donc obligé d'utiliser une formulation de différentielles de Stratanovich compatible avec la régularisation de W ce qui conduit naturellement à aborder l'existence et l'unicité de solutions par prolongement unique par densité des solutions classiques (solutions de viscosité) connues dans le cas où $w \in C^1$.

En revanche, on peut construire, grâce à la méthode des caractéristiques, si $F = 0$ et si H et u_0 sont réguliers ($C^{1,1}$ par exemple) une solution de (3)-(4) sur un intervalle de temps court

$$(0 \leq t < \tau = \inf (s \geq 0, |w(s)| \geq C_0^{-1} \text{ où } C_0 = (\sup_{\mathbb{R}^d} \text{ess } |H''|)\ (\sup_{\mathbb{R}^d} \text{ess } |D^2 u_0|)).$$

3. Prolongement unique et formulation

On suppose que $F \in C(\mathbb{R}^d \times S^d)$, $H \in C^{1,1}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$ et $w \in C([0, +\infty[, \mathbb{R}^d)$. Et on rappelle que si $w \in C^1([0, +\infty[$, il existe une unique solution de viscosité de (3)-(4).

THÉORÈME 1 — *Pour toute régularisation $(w^n)_{n \geq 1}$ de u (i.e. $w^n \in C^1([0, +\infty[)$, $w^n \to w$ dans $C([O,T])$ $\forall\ T < \infty$ si $n \to +\infty$), la solution de viscosité u^n de (3)-(4) correspondante (i.e. en remplaçant w par w^u dans (3)) converge uniformément sur $\mathbb{R}^d \times [0, T]$ vers une limite, notée u, vérifiant (4) et indépendante du choix de régularisation.*

Il est également possible de donner un sens à l'équation (3). Tout d'abord, on dit que φ est solution régulière de (3') sur $\mathbb{R}^d \times [t_0, t_1]$

$$(3') \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = H(D\varphi)\,\dot{w}$$

$(0 \leq t_0 < t_1 < \infty)$ si on peut construire φ sur $[t_0, t_1]$ par la méthode des caractéristiques à partir de $(t_0, \varphi(x, t_0))$ en supposant que $\varphi(t) \in C^2(\mathbb{R}^d)$.

Définition 1 : i) $u \in C(\mathbb{R}^d \times [0, +\infty[)$ est sous-solution de viscosité de (3) si l'on a pour toute solution régulière de (3') sur $\mathbb{R}^d \times [t_0, t_1]$, pour tout $b \in C^1([0, +\infty[)$, pour tout $(\bar{x}, \bar{t}) \in \mathbb{R}^d \times]t_0, t_1]$ point de maximum local de $u - \varphi - b$,

$$(6) \qquad b'(\bar{t}) \leq F(D\varphi(\bar{x}, \bar{t}), D^2\varphi(\bar{x}, \bar{t})).$$

ii) u est sur-solution de viscosité de (3) si la propriété précédente a lieu en remplaçant « maximum » par « minimum » et le signe $\leq$ dans (5) par $\geq$.

iii) u est solution de viscosité de (3) si u est sous-solution et sur-solution de viscosité de (3).

THÉORÈME 2 — *La fonction u obtenue par plongement unique dans le Théorème 1 est l'unique solution de viscosité de (3)-(4) dans UC* $(\mathbb{R}^d \times [0, T])$ $(\forall T < \infty)$.

Il est important pour les applications de cette théorie de pouvoir considérer des situations où H n'est pas régulière. Le résultat suivant permet de résoudre complètement cette question pour l'équation (3').

THÉORÈME 3 — ***Les conclusions du Théorème 1 sont vraies pour l'équation (3´) si et seulement si H est la différence de deux fonctions convexes continues.***

Dans le cours ont également été abordés i) le cas de données w Hölderiennes (comme c'est le cas pour les trajectoires browniennes), ii) le cas où H et F dépendent de x, iii) les applications de la théorie et iv) diverses propriétés qualitatives des solutions (régularité, comportement en temps long, conditions aux limites...).

4. Cours et Séminaire

Cours : Le cours a eu lieu du 14 octobre 2005 au 6 janvier 2006.

Séminaire de Mathématiques Appliquées :

— 14 octobre : Pierre-Louis Lions (Collège de France)
Jeux différentiels et champs moyens.

— 21 octobre : Riccardo De Arcangelis (Université de Naples)
Relaxation of Non-Convex Pointwise Gradient Constrained Energies.

— 4 novembre : Philip Maini (Université d'Oxford)
A preliminary model for vascular tumour growth.

— 18 novembre : Didier Smets (Université de Paris 6)
Collisions et éclatements d'agrégats de vortex pour l'équation de Ginzburg-Landau 2D dépendant du temps.

— 25 novembre : Gabriel Turinici (Université Paris-Dauphine)
Les lasers comme réactants photoniques : contrôle, numérique et applications expérimentales.

— 2 décembre : Benoit Desjardins (CEA/DIF, Bruyères-le-Châtel)
Existence de solutions faibles globales à la Leray pour les équations de Navier-Stokes 3d modélisant un fluide visqueux conducteur de chaleur.

— 9 décembre : Philippe Gravejat (Ceremade, Université Paris-Dauphine)
Ondes progressives pour l'équation de Gross-Pitaevskii.

— 16 décembre : George Papanicolaou (Stanford University)
Stochastic volatility surface estimation.

— 6 janvier : Claude Bardos (Université Paris 7)
Analyticité et instabilité des interfaces de Kelvin Helmholtz aux ondes de surface.

— 13 janvier : Josselin Garnier (Université Paris 7)
Retournement temporel des ondes en milieu aléatoire.

— 20 janvier : Isabelle Catto (Université Paris-Dauphine)
Analyse mathématique d'un modèle multi-échelles pour les suspensions concentrées.

— 27 janvier : Yvon Maday (Université Paris 6)
Méthode de bases réduites pour la résolution rapide et fiable de problèmes de la mécanique des fluides à la chimie quantique.

— 3 février : François Golse (Université Paris VII)
Du problème quantique à N corps à l'équation de Schrödinger non linéaire.

— 24 février : Éric Séré (Université Paris-Dauphine)
L'approximation de champ moyen en électrodynamique quantique.

— 3 mars : Wendelin Werner (Université Paris Sud)
Lacets aléatoires.

— 10 mars : Liliana Borcea (Rice University, Houston)
Adaptive Coherent Interferometric Imaging in Random Media.

— 17 mars : Jean-Michel Coron (Université Paris Sud)
Contrôlabilité et non linéarité : Saint-Venant, Korteweg-de Vries et Schrödinger.

— 24 mars : Serge Alinhac (Université Paris Sud)
Explosion des solutions classiques d'équations hyperboliques non linéaires : un survey des résultats récents.

— 31 mars : Claude Le Bris (CERMICS-ENPC)
Des questions mathématiques reliées à la dynamique moléculaire.

— 7 avril : Amandine Aftalion (CNRS - Université Paris VI)
Vortex dans les condensats de Bose Einstein en rotation.

— 28 avril : Patrick Joly (INRIA-Rocquencourt)
Problèmes de fentes minces en propagation d'ondes. Analyse asymptotique et modèles approchés.

— 5 mai : Jean Van Schaftingen (Université catholique de Louvain & Laboratoire J.L. Lions)
Estimations pour des systèmes elliptiques à données L^1.

— 12 mai : David Gérard-Varet (École Normale Supérieure)
Quelques effets de frontières irrégulières en mécanique des fluides.

— 19 mai : Philippe G. Ciarlet (City University of Hong Kong)
Une surface vue comme une fonction de ses formes fondamentales.

— 26 mai : Edriss S. Titi (Weizmann Institute & University of California Irvine)
Global Regularity for Three-dimensional Primitive Equations of Large Scale Ocean and Atmosphere Dynamics.

— 2 juin : Jean-Pierre Puel (Université de Versailles)
Contrôlabilité exacte pour les équations de Navier-Stokes et assimilation de données.

— 9 juin : Giorgio Velo (Université de Bologne et Université de Paris XI)
Long range scattering for the Maxwell-Schroedinger system.

— 16 juin : Norbert J. Mauser (Université de Vienne)
De Dirac-Maxwell à Vlasov-Poisson.

— 23 juin : Patrizia Pucci (Université de Pérouse)
On Elliptic Inequalities on Riemannian Manifolds.

Publications

— *Large investor trading impacts on volatility.* En collaboration avec J.M. Lasry. À paraître dans Comm. PDE.

— *Towards a self-consistent theory of volatility.* En collaboration avec J.M. Lasry. À paraître dans J. Maths. Pures Appl.

— *Correlations and bounds for stochastic volatility models.* En collaboration avec M. Musiela. À paraître dans Ann. IHP. Analyse Non Linéaire.

— *Instantaneous self-fulfilling of long-term prophecies on the probabilistic distribution of financial asset values.* En collaboration avec J.M. Lasry. À paraître dans Ann. IHP. Analyse Non Linéaire.

— *Some properties of diffusion processes with singular coefficients.* En collaboration avec M. Musiela. Comm. Appl. Anal. **10** (2006), p. 109-125.

— *Homogenization of « viscous » Hamilton-Jacobi equations in stationary ergodic media.* En collaboration avec P.E. Souganidis. Comm. PDE **30** (2005), p. 335-375.

— *On the uniqueness of the solution of the two-dimensional Navier-Stokes equation with a Dirac mass a initial vorticity.* En collaboration avec Isabelle Gallagher et Thierry Gallay.

— *On the homogenization and ergodic problems for fully nonlinear equations in half-space type domains.* En collaboration avec G. Barles, F. Da Lio et P.E. Souganidis.

— *On the energy of some microscopic stochastic lattices.* En collaboration avec X. Blanc et C. Le Bris.

— *Du discret au continu pour des modèles de réseaux aléatoires d'atomes.* En collaboration avec X. Blanc et C. Le Bris. À paraître dans C. R. Acad. Sci. Paris.

— *Convexity of solutions of parabolic equations.* En collaboration avec M. Musiela. C. R. Acad. Sci. Paris, 2006.

— *Homogenization of degenerate second order PDE in periodic and almost periodic environments and applications.* En collaboration avec P.E. Souganidis. Ann. IHP. Analyse Non Linéaire, **22** (2005), p. 667-677.

— *From Atoms to crystals : a mathematical journey.* En collaboration avec C. Le Bris. Bull. AMS, **42** (2005), p. 291-363.

— *Lattices and mean energy.* À paraître dans Bol. UMI.

— *Jeux à champ moyen. I — Le cas stationnaire*. En collaboration avec J.M. Lasry. À paraître dans C. R. Acad. Sci. Paris.

— *Jeux à champ moyen. II — Horizon fini et contrôle optimal.* En collaboration avec J.M. Lasry. À paraître dans C. R. Acad. Sci. Paris.

— *Une variante de la théorie de l'homogénéisation stochastique des opérateurs elliptiques.* En collaboration avec X. Blanc et C. Le Bris.

— Éditeur de l'Encyclopedia of Complexity and Systems Science.

— Équations aux dérivés partielles et applications. Leçon inaugurale du Collège de France, Collège de France/Fayard, 2006.

Missions, Invitations, Conférences

— Mission à Singapour, trois conférences (19-21 septembre 2005).

— Conférence à l'IMPA, Rio de Janeiro (4 octobre 2005).

— Conférence COPEA, UFRJ, Rio de Janeiro (6 octobre 2005).

— Conférence au Séminaire Inter-académique franco-brésilien. Académie des Sciences, Paris (10 octobre 2005).

— Mission à l'Academia Nazionale dei Lincei, Rome (10-13 novembre 2005).

— Série de deux conférences au Mathematical Institute, Oxford (14-15 novembre 2005).

— Colloquium de Mathématiques, Toulouse (22 novembre 2005).

— Conférence à l'IHP, Paris (9 janvier 2006).

— Cours (8 h) à l'Université d'Austin (16-27 janvier 2006).

— Cours (8 h) à l'Université d'Austin (21 février-3 mars 2006).

— Série de trois conférences à l'INDAM, Rome (5-6 avril 2006).

— Conférence à l'INDAM, Milan (12 juin 2006).

Responsabilités collectives et fonctions diverses

— Professeur à temps partiel à l'École Polytechnique.

— Président du Conseil Scientifique de l'ENS.

— Président du Conseil Scientifique du CEA-DAM.

— Président du Conseil Scientifique d'EDF.

— Président du Conseil Scientifique de France Telecom.

— Président du Conseil Scientifique de la Fondation de Recherche pour l'Aéronautique et l'Espace.

— Président du jury du prix « Science et Défense ».

— Membre du Comité de Programme de ICM 2006.

— Membre du Visiting Committee du CEA.

— Membre du Conseil Scientifique de l'Institut Europlace de Finance.

— Membre du Scientific Advisory Panel de l'European Mathematical Society.

— Membre fondateur du Comité International de l'« International Summer School of Applied Mathematics », Morningside Institute, Chinese Academy of Sciences.

— Membre du Comité des Programmes Scientifiques du CNES.

— Membre de l'International Advisory Board de l'Institute of Mathematical Sciences de l'Imperial College.

— Membre du Conseil Scientifique de la Fondation du Risque.

— Administrateur d'Alcatel, Sark et Channel Bridge.

— Conseiller Scientifique auprès de BNP PARIBAS, CALYON, EADS-ST.