

SYSTÈMES DE PARTICULES
ET AMORTISSEMENT LANDAU

19 novembre 2010

Cédric Villani
Université de Lyon
& Institut Henri Poincaré
FRANCE

Équations de Newton pour des particules ponctuelles

$$x_i = x_i(t) \in \mathbb{R}^3, \quad \text{masse } m_i, \quad i = 1 \dots N$$

$$\ddot{x}_i = - \sum_{j \neq i} m_j \nabla W(x_i - x_j)$$

$$W(x) = - \frac{\mathcal{G}}{4\pi |x|} \text{ potentiel de Newton (gravitation)}$$

Équations de Newton pour des particules ponctuelles

$$x_i = x_i(t) \in \mathbb{R}^3, \quad \text{mass } m_i, \quad i = 1 \dots N$$

$$\ddot{x}_i = - \sum_{j \neq i} m_j \nabla W(x_i - x_j)$$

$$W(x) = -\frac{\mathcal{G}}{4\pi |x|} \text{ potentiel de Newton (gravitation)}$$

À quoi ressemblent les trajectoires quand $t \rightarrow \infty$??

Sun

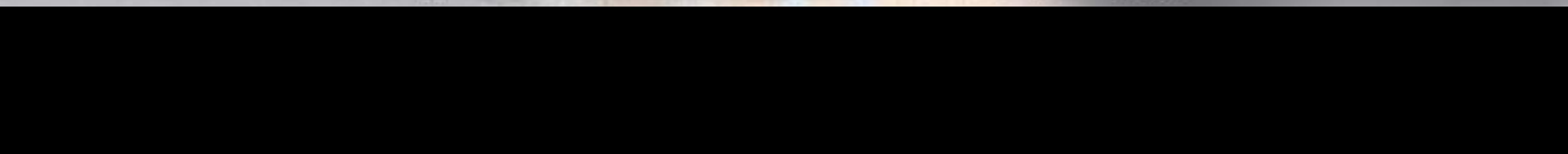


Jupiter



Earth

Pluto



Théorie de Kolmogorov–Arnold–Moser

- Soit $H_0 =$ hamiltonien complètement intégrable
(e.g. planètes indépendantes interagissant avec le Soleil)
- On perturbe en $H_0 + \varepsilon H$

Théorie de Kolmogorov–Arnold–Moser

- Soit $H_0 =$ hamiltonien complètement intégrable
(e.g. planètes indépendantes interagissant avec le Soleil)
- On perturbe en $H_0 + \varepsilon H \implies$ avec probabilité > 0.99 ,
le système reste stable pour tous les temps (déformation
de mouvement quasipériodique),
bien que les lois de conservation n'interdisent pas un
comportement erratique ou catastrophique.

Théorie de Kolmogorov–Arnold–Moser

- Soit H_0 = hamiltonien complètement intégrable (e.g. planètes indépendantes interagissant avec le Soleil)
- On perturbe en $H_0 + \varepsilon H \implies$ avec probabilité > 0.99 , **le système reste stable pour tous les temps** (déformation de mouvement quasipériodique),
bien que les lois de conservation n’interdisent pas un comportement erratique ou catastrophique.

Paradoxe épistémologique

Le Théorème K-A-M ne s’applique “jamais” aux systèmes “réels” (planètes pas assez petites !)

Pourtant a révolutionné la mécanique classique, pour mathématiciens **et** physiciens.

Autre approximation (continue) : champ moyen

$N \geq 10^{12}$ équations simples

sur les positions x_i et les vitesses v_i

$\downarrow N \rightarrow \infty$

une équation (compliquée)

sur $\mu_t(dx dv)$

$\mu_t[A]$: fraction de masse au temps t dans A

$$\sum_j \longrightarrow \int_{x', v'}$$

Autre approximation (continue) : champ moyen

$N \geq 10^{12}$ équations simples

sur les positions x_i et les vitesses v_i

$\downarrow N \rightarrow \infty$

une équation (compliquée)

sur $\mu_t(dx dv)$

$\mu_t[A]$: fraction de masse au temps t dans A

$$\sum_j m_j W(x_j(t) - x) \longrightarrow \int W(x' - x) \mu_t(dx' dv')$$

L'équation de Vlasov

μ_t est préservée par le flot (conservation de la masse)

vol est préservée par le flot (théorème de Liouville)

$\implies f(t, x, v) = \frac{\mu_t(dx dv)}{\text{vol}(dx dv)}$ est aussi préservée :

L'équation de Vlasov

μ_t est préservée par le flot (conservation de la masse)

vol est préservée par le flot (théorème de Liouville)

$\implies f(t, x, v) = \frac{\mu_t(dx dv)}{\text{vol}(dx dv)}$ est aussi préservée :

$$\frac{d}{dt} f(t, X(t), \dot{X}(t)) = 0$$

L'équation de Vlasov

μ_t est préservée par le flot (conservation de la masse)

vol est préservée par le flot (théorème de Liouville)

$\implies f(t, x, v) = \frac{\mu_t(dx dv)}{\text{vol}(dx dv)}$ est aussi préservée :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \dot{X}(t) \cdot \nabla_x f + \ddot{X}(t) \cdot \nabla_v f \right) (t, X(t), \dot{X}(t)) = 0$$

L'équation de Vlasov

μ_t est préservée par le flot (conservation de la masse)

vol est préservée par le flot (théorème de Liouville)

$\implies f(t, x, v) = \frac{\mu_t(dx dv)}{\text{vol}(dx dv)}$ est aussi préservée :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \dot{X}(t) \cdot \nabla_x f + \ddot{X}(t) \cdot \nabla_v f \right) (t, X(t), \dot{X}(t)) = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f + F(t, x) \cdot \nabla_v f = 0 \\ F = -\nabla W * \rho, \quad \rho(t, x) = \int f(t, x, v) dv \end{array} \right.$$

L'équation de Vlasov

μ_t est préservée par le flot (conservation de la masse)

vol est préservée par le flot (théorème de Liouville)

$\implies f(t, x, v) = \frac{\mu_t(dx dv)}{\text{vol}(dx dv)}$ est aussi préservée :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \dot{X}(t) \cdot \nabla_x f + \ddot{X}(t) \cdot \nabla_v f \right) (t, X(t), \dot{X}(t)) = 0$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f + F(t, x) \cdot \nabla_v f = 0 \\ F = -\nabla W * \rho, \quad \rho(t, x) = \int f(t, x, v) dv \end{cases}$$

NB : Justification rigoureuse tjs **ouverte** si W singulier
(Newton/Coulomb : $W \sim \pm 1/r$, $d = 3$)

Meilleur résultat : Hauray–Jabin (2007) : $W \sim \log 1/r \dots$

Piliers de la théorie cinétique : équations de Boltzmann et Vlasov

Boltzmann

Irréversible

Vlasov

Réversible

Piliers de la théorie cinétique : équations de Boltzmann et Vlasov

Boltzmann

Irréversible

Énergie est constante

Vlasov

Réversible

Énergie est constante

Piliers de la théorie cinétique : équations de Boltzmann et Vlasov

Boltzmann

Irréversible

Énergie est constante

Entropie augmente

(Théorème H de Boltzmann)

Vlasov

Réversible

Énergie est constante

Entropie est constante

(par Thm de Liouville)

Piliers de la théorie cinétique : équations de Boltzmann et Vlasov

Boltzmann

Irréversible

Énergie est constante

Entropie augmente

(Théorème H de Boltzmann)

Équilibres gaussiens

$$\rho e^{-|v|^2/T}$$

Vlasov

Réversible

Énergie est constante

Entropie est constante

(par Thm de Liouville)

Espace de dim infinie d'équilibres

Ex. n'importe quel $f(v)$

1946 : La découverte “époustouflante” de Landau



Landau linéarise Vlasov autour de $f^0(v)$: pour des d.i. entières (analytiques) la force **tend vers 0** avec taux $\lambda_L =$

$$\inf_k \inf \left\{ \operatorname{Re} \xi; -4\pi^2 |k|^2 \widehat{W}(k) \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} f^0(v) e^{-2i\pi kt \cdot v} e^{2\pi \xi t} t dt dv = 1 \right\}$$

Ex : $f^0(v) = e^{-|v|^2}$: Coulomb, $\lambda_L > 0$;

Newton, $\lambda_L > 0$ seulement à échelles $< L_J$

Comportement en temps grand de Vlasov

- **amortissement Landau** : des perturbations peuvent s'éteindre spontanément, de manière **apparemment irréversible** (approche vers équilibre?)
- Depuis lors, le comportement en temps grand de Vlasov a été l'objet de très nombreuses discussions. “Bien accepté” et observé e.g. en astrophysique : relaxation en temps “court”, avant augmentation d'entropie.

Fondamental...

- Approches statiques : Lynden-Bell, Robert, Miller... Mais **personne** n'a d'explication théorique basée sur la **dynamique**
... sauf pour l'amortissement Landau (perturbatif!)

Mais ... La linéarisation est-elle raisonnable ?? $f = f^0 + h$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + v \cdot \nabla_x h + F[h] \cdot \left(\nabla_v f^0 + \nabla_v h \right) = 0 \quad (\mathbf{V \ NLin})$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + v \cdot \nabla_x h + F[h] \cdot \left(\nabla_v f^0 + \mathbf{0} \right) = 0 \quad (\mathbf{V \ Lin})$$

Mais ... La linéarisation est-elle raisonnable ?? $f = f^0 + h$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + v \cdot \nabla_x h + F[h] \cdot \left(\nabla_v f^0 + \nabla_v h \right) = 0 \quad (\mathbf{V \ NLin})$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + v \cdot \nabla_x h + F[h] \cdot \left(\nabla_v f^0 + \mathbf{0} \right) = 0 \quad (\mathbf{V \ Lin})$$

- OK si $|\nabla_v h| \ll |\nabla_v f^0|$, mais $|\nabla_v h(t, \cdot)| \geq \varepsilon t \rightarrow +\infty$
“détruisant la validité de la théorie linéaire” (Backus 1960)

Mais ... La linéarisation est-elle raisonnable ?? $f = f^0 + h$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + v \cdot \nabla_x h + F[h] \cdot \left(\nabla_v f^0 + \nabla_v h \right) = 0 \quad (\mathbf{V \ NLin})$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + v \cdot \nabla_x h + F[h] \cdot \left(\nabla_v f^0 + \mathbf{0} \right) = 0 \quad (\mathbf{V \ Lin})$$

- OK si $|\nabla_v h| \ll |\nabla_v f^0|$, mais $|\nabla_v h(t, \cdot)| \geq \varepsilon t \rightarrow +\infty$
“détruisant la validité de la théorie linéaire” (Backus 1960)
- Échelle de temps non linéaire = $1/\sqrt{\varepsilon}$ (O’Neil 1965)

Mais ... La linéarisation est-elle raisonnable ?? $f = f^0 + h$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + v \cdot \nabla_x h + F[h] \cdot \left(\nabla_v f^0 + \nabla_v h \right) = 0 \quad (\mathbf{V \ NLin})$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + v \cdot \nabla_x h + F[h] \cdot \left(\nabla_v f^0 + \mathbf{0} \right) = 0 \quad (\mathbf{V \ Lin})$$

- OK si $|\nabla_v h| \ll |\nabla_v f^0|$, mais $|\nabla_v h(t, \cdot)| \geq \varepsilon t \rightarrow +\infty$
“détruisant la validité de la théorie linéaire” (Backus 1960)
- Échelle de temps non linéaire = $1/\sqrt{\varepsilon}$ (O’Neil 1965)
- Le terme négligé $\nabla_v h$ est d’ordre dominant !

Mais ... La linéarisation est-elle raisonnable ?? $f = f^0 + h$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + v \cdot \nabla_x h + F[h] \cdot \left(\nabla_v f^0 + \nabla_v h \right) = 0 \quad (\mathbf{V \ NLin})$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + v \cdot \nabla_x h + F[h] \cdot \left(\nabla_v f^0 + 0 \right) = 0 \quad (\mathbf{V \ Lin})$$

- OK si $|\nabla_v h| \ll |\nabla_v f^0|$, mais $|\nabla_v h(t, \cdot)| \geq \varepsilon t \rightarrow +\infty$
“détruisant la validité de la théorie linéaire” (Backus 1960)
- Échelle de temps non linéaire = $1/\sqrt{\varepsilon}$ (O’Neil 1965)
- Le terme négligé $\nabla_v h$ est d’ordre dominant !
- La linéarisation élimine la conservation d’entropie

Mais ... La linéarisation est-elle raisonnable ?? $f = f^0 + h$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + v \cdot \nabla_x h + F[h] \cdot \left(\nabla_v f^0 + \nabla_v h \right) = 0 \quad (\mathbf{V \ NLin})$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + v \cdot \nabla_x h + F[h] \cdot \left(\nabla_v f^0 + 0 \right) = 0 \quad (\mathbf{V \ Lin})$$

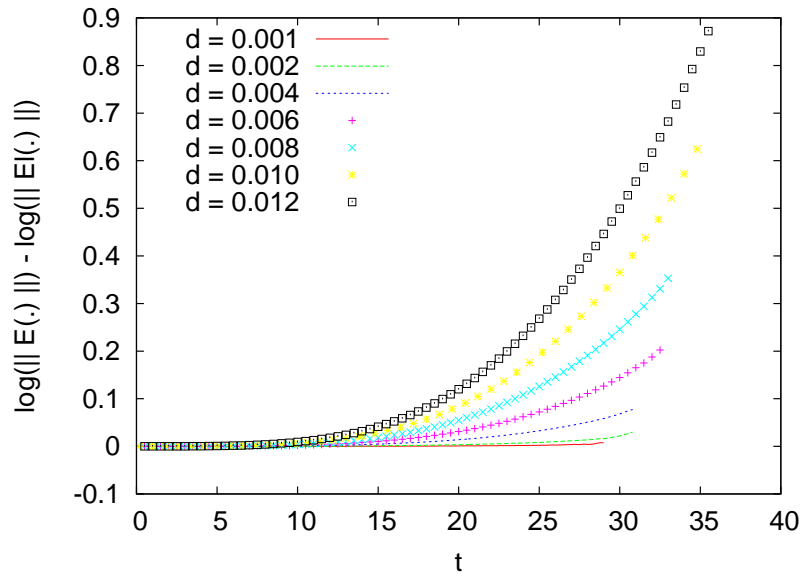
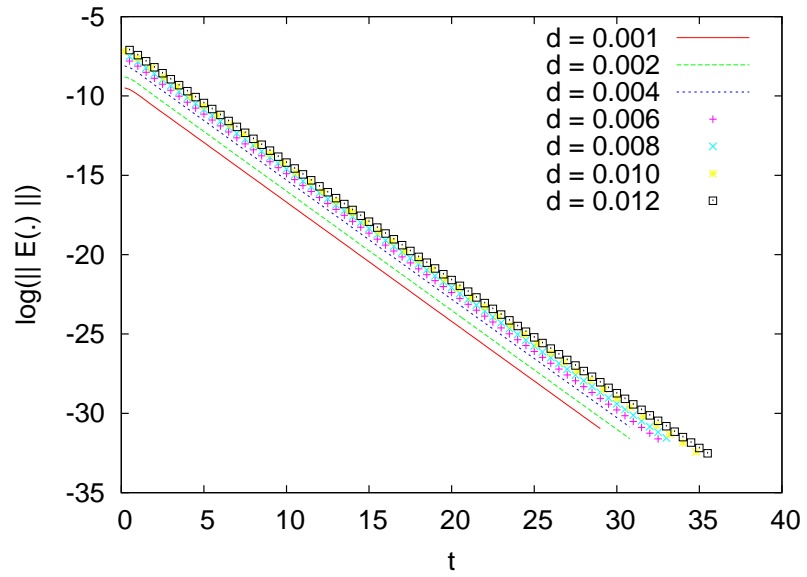
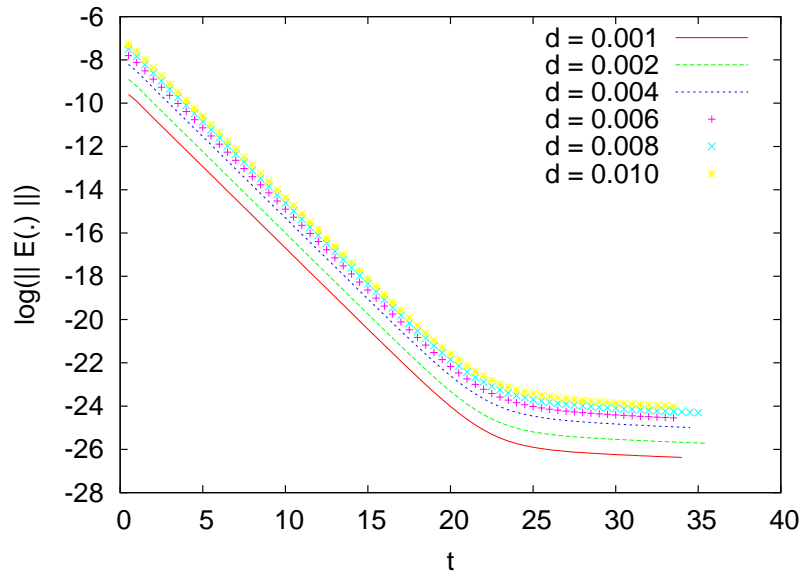
- OK si $|\nabla_v h| \ll |\nabla_v f^0|$, mais $|\nabla_v h(t, \cdot)| \geq \varepsilon t \rightarrow +\infty$
“détruisant la validité de la théorie linéaire” (Backus 1960)
- Échelle de temps non linéaire = $1/\sqrt{\varepsilon}$ (O’Neil 1965)
- Le terme négligé $\nabla_v h$ est d’ordre dominant !
- La linéarisation élimine la conservation d’entropie
- Isichenko 1997 : approche vers l’équilibre en $O(1/t)$

Mais ... La linéarisation est-elle raisonnable ?? $f = f^0 + h$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + v \cdot \nabla_x h + F[h] \cdot \left(\nabla_v f^0 + \nabla_v h \right) = 0 \quad (\mathbf{V \ NLin})$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + v \cdot \nabla_x h + F[h] \cdot \left(\nabla_v f^0 + 0 \right) = 0 \quad (\mathbf{V \ Lin})$$

- OK si $|\nabla_v h| \ll |\nabla_v f^0|$, mais $|\nabla_v h(t, \cdot)| \geq \varepsilon t \rightarrow +\infty$
“détruisant la validité de la théorie linéaire” (Backus 1960)
- Échelle de temps non linéaire = $1/\sqrt{\varepsilon}$ (O’Neil 1965)
- Le terme négligé $\nabla_v h$ est d’ordre dominant !
- La linéarisation élimine la conservation d’entropie
- Isichenko 1997 : approche vers l’équilibre en $O(1/t)$
- Caglioti–Maffei (1998) : au moins certaines solutions non triviales relaxent exponentiellement vite



Filbet 2010

$$e^{-\frac{v^2}{2}} \left(1 + \varepsilon \cos(2\pi kx) \right)$$

Quel théorème ??

Confinement crucial; vient de conteneur ou dynamique

Pour simplifier $x \in \mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d / \mathbb{Z}^d$ ($d \geq 1$)

Quel théorème ??

Confinement crucial ; vient de conteneur ou dynamique

Pour simplifier $x \in \mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d / \mathbb{Z}^d$ ($d \geq 1$)

Théorème (Mouhot–V)

- Soit $W = W(x)$, $\widehat{W}(k) = O(1/|k|^2)$

Quel théorème ??

Confinement crucial ; vient de conteneur ou dynamique

Pour simplifier $x \in \mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d / \mathbb{Z}^d$ ($d \geq 1$)

Théorème (Mouhot–V)

- Soit $W = W(x)$, $\widehat{W}(k) = O(1/|k|^2)$
- Soit $f^0 = f^0(v) =$ équilibre homogène linéairement stable, analytique dans bande de largeur λ_0 autour de \mathbb{R}^d

Quel théorème ??

Confinement crucial ; vient de conteneur ou dynamique

Pour simplifier $x \in \mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d / \mathbb{Z}^d$ ($d \geq 1$)

Théorème (Mouhot–V)

- Soit $W = W(x)$, $\widehat{W}(k) = O(1/|k|^2)$
- Soit $f^0 = f^0(v)$ = équilibre homogène linéairement stable, analytique dans bande de largeur λ_0 autour de \mathbb{R}^d
- Soit $f_i = f_i(x, v)$ = donnée initiale, analytique dans une bande de largeur λ_i autour de \mathbb{R}_v^d , t.q..
 $|f_i - f^0| = O(\varepsilon), \quad \varepsilon \ll 1$

Quel théorème ??

Confinement crucial ; vient de conteneur ou dynamique

Pour simplifier $x \in \mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d / \mathbb{Z}^d$ ($d \geq 1$)

Théorème (Mouhot–V)

- Soit $W = W(x)$, $\widehat{W}(k) = O(1/|k|^2)$
- Soit $f^0 = f^0(v)$ = équilibre homogène linéairement stable, analytique dans bande de largeur λ_0 autour de \mathbb{R}^d
- Soit $f_i = f_i(x, v)$ = donnée initiale, analytique dans une bande de largeur λ_i autour de \mathbb{R}_v^d , t.q..

$$|f_i - f^0| = O(\varepsilon), \quad \varepsilon \ll 1$$

- Soit $f = f(t, x, v)$ la solution de Vlasov NL avec interaction W et $f(0, \cdot) = f_i$, **alors**

$$F[f](t, x) = O(e^{-2\pi\lambda|t|}), \quad \forall \lambda < \min(\lambda_0, \lambda_i, \lambda_L)$$

Remarques mathématiques

- On prouve aussi : $f(t, \cdot) \xrightarrow[\text{weak}]{} f_\infty = f_\infty(v)$ en $t \rightarrow \infty$
- Estimée quantitative.
- Outre **confinement** et **mélange**, crucial : **régularité**
- S'étend à une certaine régularité Gevrey, mais on perd la convergence exponentielle (normal)

Remarques mathématiques

- On prouve aussi : $f(t, \cdot) \xrightarrow{\text{weak}} f_\infty = f_\infty(v)$ en $t \rightarrow \infty$
- Estimée quantitative.
- Outre confinement et mélange, crucial : régularité
- S'étend à une certaine régularité Gevrey, mais on perd la convergence exponentielle (normal)

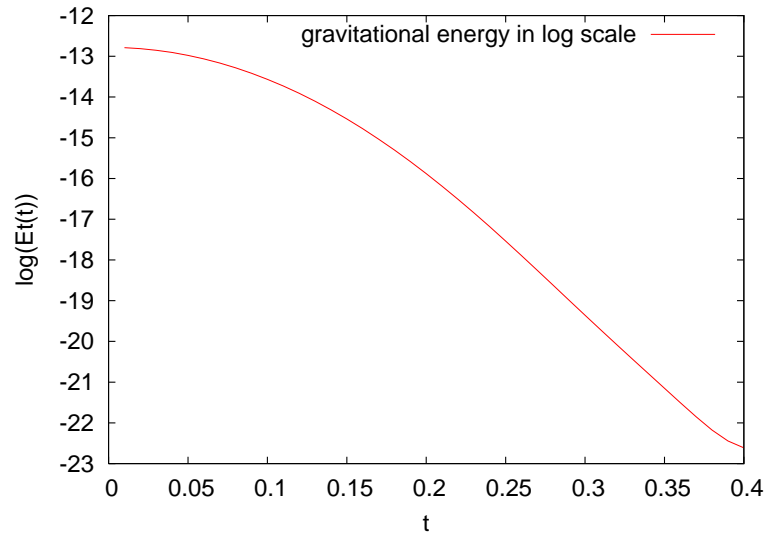
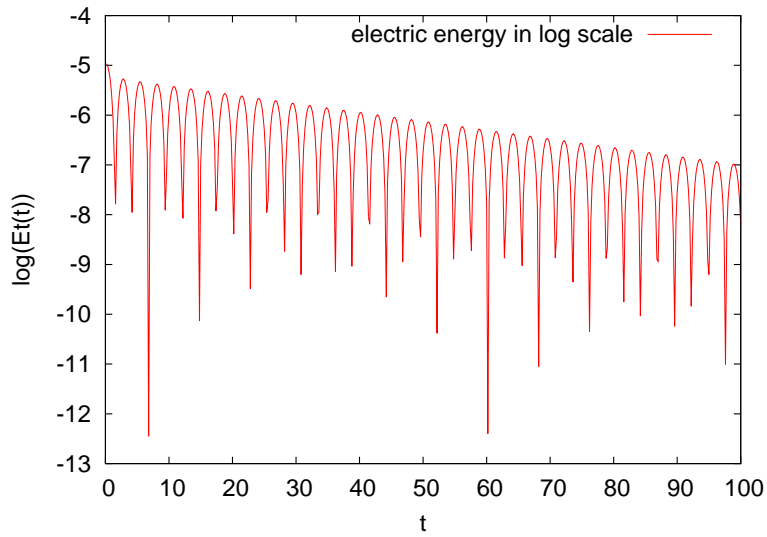
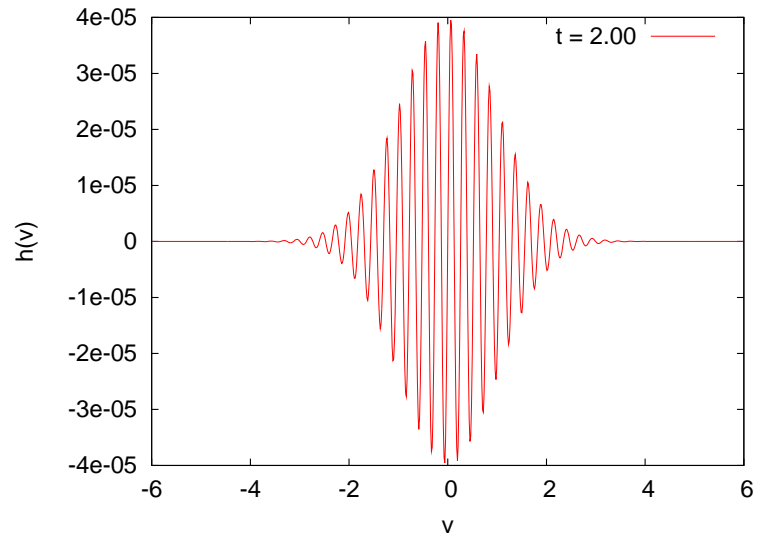
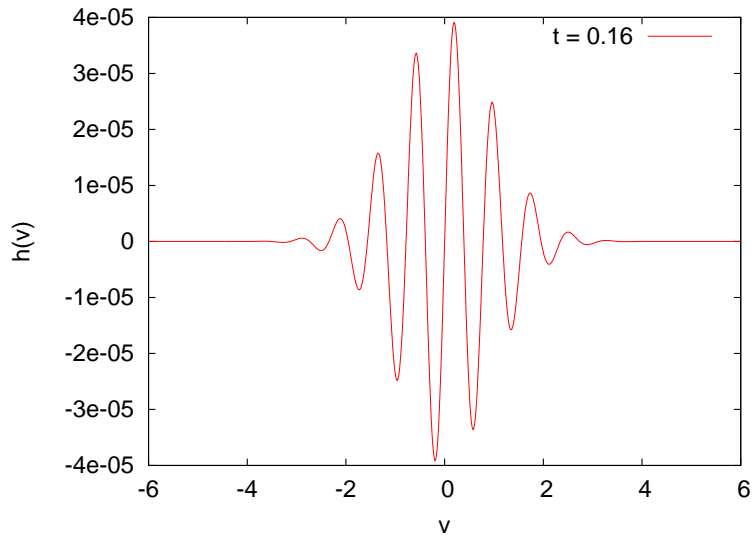
Remarques physiques

Information va vers les petites échelles cinétiques
(invisible!)

.... disparaît dans le néant (\neq radiation!)

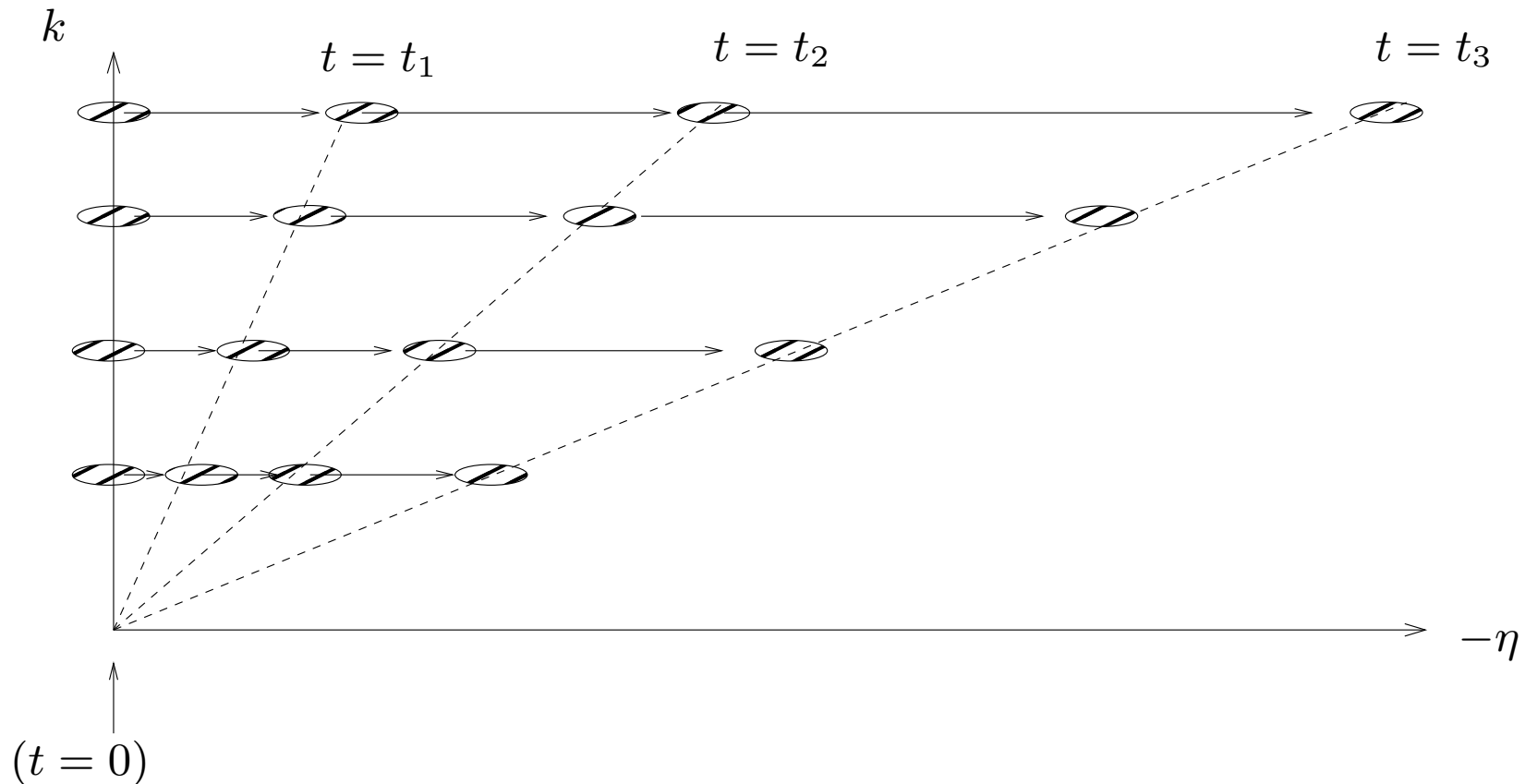
Lynden-Bell : “A [galactic] system whose density has achieved a steady state will have information about its birth still stored in the peculiar velocities of its stars”

Illustration numérique



“Cascade” du transport libre

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f = 0 \implies \boxed{\tilde{f}(t, k, \eta) = \tilde{f}_i(k, \eta + kt)}$$



Regularité se détériore en v , s'améliore en x

Équation de Vlasov linéarisée

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f + F[f] \cdot \nabla_v f^0 = 0$$

Sous condition de stabilité linéaire, $\rho(t, \cdot) \longrightarrow \text{const.}$

Preuve : équation de Volterra sur les modes de ρ

$$\widehat{\rho}(t, k) =$$

$$\widetilde{f}_i(k, kt) - 4\pi^2 \widehat{W}(k) \int_0^t \widehat{\rho}(\tau, k) \widetilde{f}^0(k(t - \tau)) |k|^2 (t - \tau) d\tau$$

Supposons : $\forall \xi \in \mathbb{C}, \quad 0 \leq \mathcal{R}e \xi < \lambda, \quad |\mathcal{L}(\xi) - 1| \geq \kappa > 0$

Alors pour tout $\lambda' < \lambda$,

$$\sup_{t \geq 0, k} |\widehat{\rho}(t, k)| e^{2\pi\lambda'|k|t} \leq C(\lambda, \lambda', \kappa) \sup_{t, k} \left(|\widetilde{f}_i(k, kt)| e^{2\pi\lambda|k|t} \right)$$

(analyse de Laplace–Fourier)

Amortissement non linéaire : plan de bataille ??

Quand $t \rightarrow \infty$, les évolutions linéaire et non linéaire **divergent** ; on doit donc re-prouver la convergence

Première idée : “schéma quasilinéaire”

$$\partial_t f^{n+1} + v \cdot \nabla_x f^{n+1} + F[f^n] \cdot \nabla_v f^{n+1} = 0$$

Amortissement non linéaire : plan de bataille ??

Quand $t \rightarrow \infty$, les évolutions linéaire et non linéaire **divergent** ; on doit donc re-prouver la convergence

Première idée : “schéma quasilinéaire”

$$\partial_t f^{n+1} + v \cdot \nabla_x f^{n+1} + F[f^n] \cdot \nabla_v f^{n+1} = 0$$

Mauvaise idée : Ce qui domine l’amortissement est la **réaction** plutôt que le forçage :

$$\partial_t f^{n+1} + v \cdot \nabla_x f^{n+1} + F[f^{n+1}] \cdot \nabla_v f^n = 0$$

Mais alors on traite un terme dominant $\nabla_v f$ comme une perturbation ! Et les estimées explosent

Nouvel essai

Linéarisons autour de $\bar{f}(t, x, v)$:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f + F[f] \cdot \nabla_v \bar{f} + F[\bar{f}] \cdot \nabla_v f = 0$$

Méthode des **caractéristiques** :

$(X, V)_{s,t}(x, v)$ = position/vitesse au temps t , en partant au temps s de (x, v) , champ de force $F[\bar{f}]$

$$\implies \frac{d}{dt} f(t, X_{0,t}, V_{0,t}) = \frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f + F \cdot \nabla_v f$$

$$\implies f(t, x, v) = f_i(X_{t,0}(x, v), V_{t,0}(x, v)) + \int_0^t F[f](X_{t,\tau}(x, v)) \cdot \nabla_v \bar{f}(\tau, X_{t,\tau}(x, v), V_{t,\tau}(x, v)) d\tau$$

... À estimer en norme analytique! ? Dans quel espace ?

Analyse de Fourier cinétique

$$\tilde{f}(k, \eta) = \iint e^{-2i\pi k \cdot x} e^{-2i\pi \eta \cdot v} f(x, v) dx dv$$

Sol. du transport libre : $\tilde{f}(t, k, \eta) = \tilde{f}_i(k, \eta + kt)$

Analyse de Fourier cinétique

$$\tilde{f}(k, \eta) = \iint e^{-2i\pi k \cdot x} e^{-2i\pi \eta \cdot v} f(x, v) dx dv$$

Sol. du transport libre : $\tilde{f}(t, k, \eta) = \tilde{f}_i(k, \eta + kt)$

Cadre fonctionnel : souhaits

- Quantifier la régularité analytique
- Bon comportement vis-à-vis de la composition (par les trajectoires)
- Bornes uniformes **malgré les oscillations rapides**

Norme analytique naïve :

$$\|f\| = \sup_{k, \eta} |\tilde{f}(k, \eta)| e^{2\pi\lambda|\eta|} e^{2\pi\mu|k|} \text{ mauvais : instable par}$$

composition ou limite en temps grand

Deux familles remarquables de normes analytiques :

$$\|f\|_\lambda = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\lambda^n \|f^{(n)}\|_\infty}{n!} \quad \|f\|_\lambda = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{2\pi\lambda|k|} |\hat{f}(k)|$$

sont des **normes d'algèbre** : $\|fg\| \leq \|f\| \|g\|$

Implique de bonnes propriétés aussi pour la composition

Deux familles remarquables de normes analytiques :

$$\|f\|_\lambda = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\lambda^n \|f^{(n)}\|_\infty}{n!} \quad \|f\|_\lambda = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{2\pi\lambda|k|} |\hat{f}(k)|$$

sont des **normes d'algèbre** : $\|fg\| \leq \|f\| \|g\|$

Implique de bonnes propriétés aussi pour la composition

Procédure $\left\{ \begin{array}{l} \text{hybrider ces deux espaces} \\ \text{ajouter une correction Sobolev} \\ \text{et un décalage en temps (régularité glissante)} \end{array} \right.$

Deux familles remarquables de normes analytiques :

$$\|f\|_\lambda = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\lambda^n \|f^{(n)}\|_\infty}{n!} \quad \|f\|_\lambda = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{2\pi\lambda|k|} |\widehat{f}(k)|$$

sont des **normes d'algèbre** : $\|fg\| \leq \|f\| \|g\|$

Implique de bonnes propriétés aussi pour la composition

Procédure $\left\{ \begin{array}{l} \text{hybrider ces deux espaces} \\ \text{ajouter une } \text{correction Sobolev} \\ \text{et un } \text{décalage en temps} \text{ (régularité glissante)} \end{array} \right.$

\Rightarrow Norme de base pour le pbm non linéaire

$$\|f\|_{\mathcal{Z}_\tau^{\lambda,(\mu,\gamma);p}} = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \sum_{n \in \mathbb{N}^d} \frac{\lambda^n}{n!} e^{2\pi\mu|k|} (1 + |k|)^\gamma \left\| (\nabla_v + 2i\pi\tau k)^n \widehat{f}(k, v) \right\|_{L^p(dv)}$$

NB : Pas dans l'énoncé final! (injections normes naïves)

Deux familles remarquables de normes analytiques :

$$\|f\|_\lambda = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\lambda^n \|f^{(n)}\|_\infty}{n!} \quad \|f\|_\lambda = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{2\pi\lambda|k|} |\hat{f}(k)|$$

sont des **normes d'algèbre** : $\|fg\| \leq \|f\| \|g\|$

Implique de bonnes propriétés aussi pour la composition

Procédure $\left\{ \begin{array}{l} \text{hybrider ces deux espaces} \\ \text{ajouter une } \text{correction Sobolev} \\ \text{et un } \text{décalage en temps} \text{ (régularité glissante)} \end{array} \right.$

\Rightarrow Norme de base pour le pbm non linéaire

$$\|f\|_{\mathcal{Z}_\tau^{\lambda,(\mu,\gamma);p}} = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \sum_{n \in \mathbb{N}^d} \frac{\lambda^n}{n!} e^{2\pi\mu|k|} (1 + |k|)^\gamma \left\| (\nabla_v + 2i\pi\tau k)^n \hat{f}(k, v) \right\|_{L^p(dv)}$$

NB : Pas dans l'énoncé final! (injections normes naïves)

Deux familles remarquables de normes analytiques :

$$\|f\|_\lambda = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\lambda^n \|f^{(n)}\|_\infty}{n!} \quad \|f\|_\lambda = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{2\pi\lambda|k|} |\hat{f}(k)|$$

sont des **normes d'algèbre** : $\|fg\| \leq \|f\| \|g\|$

Implique de bonnes propriétés aussi pour la composition

Procédure $\left\{ \begin{array}{l} \text{hybrider ces deux espaces} \\ \text{ajouter une correction Sobolev} \\ \text{et un décalage en temps (régularité glissante)} \end{array} \right.$

\Rightarrow Norme de base pour le pbm non linéaire

$$\|f\|_{\mathcal{Z}_\tau^{\lambda,(\mu,\gamma);p}} = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \sum_{n \in \mathbb{N}^d} \frac{\lambda^n}{n!} e^{2\pi\mu|k|} (1 + |k|)^\gamma \left\| (\nabla_v + 2i\pi\tau k)^n \hat{f}(k, v) \right\|_{L^p(dv)}$$

NB : Pas dans l'énoncé final! (injections normes naïves)

Deux familles remarquables de normes analytiques :

$$\|f\|_\lambda = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\lambda^n \|f^{(n)}\|_\infty}{n!} \quad \|f\|_\lambda = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{2\pi\lambda|k|} |\hat{f}(k)|$$

sont des **normes d'algèbre** : $\|fg\| \leq \|f\| \|g\|$

Implique de bonnes propriétés aussi pour la composition

Procédure $\left\{ \begin{array}{l} \text{hybrider ces deux espaces} \\ \text{ajouter une } \text{correction Sobolev} \\ \text{et un } \text{décalage en temps} \text{ (régularité glissante)} \end{array} \right.$

\Rightarrow Norme de base pour le pbm non linéaire

$$\|f\|_{\mathcal{Z}_\tau^{\lambda,(\mu,\gamma);p}} = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \sum_{n \in \mathbb{N}^d} \frac{\lambda^n}{n!} e^{2\pi\mu|k|} (1 + |k|)^\gamma \left\| (\nabla_v + 2i\pi\tau k)^n \hat{f}(k, v) \right\|_{L^p(dv)}$$

NB : Pas dans l'énoncé final! (injections normes naïves)

Deux familles remarquables de normes analytiques :

$$\|f\|_\lambda = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\lambda^n \|f^{(n)}\|_\infty}{n!} \quad \|f\|_\lambda = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{2\pi\lambda|k|} |\hat{f}(k)|$$

sont des **normes d'algèbre** : $\|fg\| \leq \|f\| \|g\|$

Implique de bonnes propriétés aussi pour la composition

Procédure $\left\{ \begin{array}{l} \text{hybrider ces deux espaces} \\ \text{ajouter une } \text{correction Sobolev} \\ \text{et un } \text{décalage en temps} \text{ (régularité glissante)} \end{array} \right.$

\Rightarrow Norme de base pour le pbm non linéaire

$$\|f\|_{\mathcal{Z}_\tau^{\lambda,(\mu,\gamma);p}} = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \sum_{n \in \mathbb{N}^d} \frac{\lambda^n}{n!} e^{2\pi\mu|k|} (1 + |k|)^\gamma \left\| (\nabla_v + 2i\pi\tau k)^n \hat{f}(k, v) \right\|_{L^p(dv)}$$

NB : Pas dans l'énoncé final! (injections normes naïves)

Analyse fonctionnelle spécifique

Comportement vis-à-vis multiplication, dérivation, composition...

- Exemple : inégalité de composition

$$\left\| f \left(x + X(x, v), v + V(x, v) \right) \right\|_{\mathcal{Z}_t^{\lambda, \mu; p}} \leq \|f\|_{\mathcal{Z}_\sigma^{\alpha, \beta; p}}$$

$$\alpha = \lambda + \|V\|_{\mathcal{Z}_t^{\lambda, \mu}}, \quad \beta = \mu + \lambda|t - \sigma| + \|X - \sigma V\|_{\mathcal{Z}_t^{\lambda, \mu}}$$

- Exemple : injection à la Sobolev

$$\|f\|_{\mathcal{Z}^{\lambda, \mu; 1}} \leq C^{\frac{1}{\min(\bar{\lambda} - \lambda, \bar{\mu} - \mu)}} \left(\sup_{k, \eta} |\tilde{f}(k, \eta)| e^{2\pi\bar{\lambda}|\eta|} e^{2\pi\bar{\mu}|k|} + \int |f(x, v)| e^{2\pi\beta|v|} dv dx \right).$$

Réinterprétation par régularité

Au lieu de

$$\boxed{F(t, \cdot) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0}$$

prouver

$$\boxed{\sup_{t \geq 0} \|f(t, \cdot)\|_{\mathcal{Z}_t^{\lambda, \mu; 1}} < +\infty}$$

La régularité existe !

Elle domine l'amortissement Landau, Cf. lemme de
Riemann–Lebesgue

\implies On peut la mesurer (en un sens...)

Une première étape dans la preuve : scattering quantitatif

$$F = -\nabla W * \int f \, dv, \quad \|f(t, \cdot)\|_{\mathcal{Z}_t^{\lambda, \mu; 1}} \leq C$$

$$S_{\tau, t} = (X_{\tau, t}, V_{\tau, t}) : \text{flot induit par } F$$

$$S_{\tau, t}^0 = (x + v(t - \tau), v) : \text{flot libre}$$

Une première étape dans la preuve : scattering quantitatif

$$F = -\nabla W * \int f \, dv, \quad \|f(t, \cdot)\|_{\mathcal{Z}_t^{\lambda, \mu; 1}} \leq C$$

$$S_{\tau, t} = (X_{\tau, t}, V_{\tau, t}) : \text{flot induit par } F$$

$$S_{\tau, t}^0 = (x + v(t - \tau), v) : \text{flot libre}$$

$$\Omega_{t, \tau} = S_{t, \tau} \circ S_{\tau, t}^0 \implies$$

$$\|\Omega_{t, \tau} - \text{Id}\|_{\mathcal{Z}_{\tau'}^{\lambda', \mu'}} \leq C' \min(t - \tau, 1) e^{-\alpha\tau}$$

$$(\lambda'\tau' + \mu' \leq \lambda\tau + \mu, \lambda' < \lambda)$$

Une étape clé dans la preuve

Analyse de l'équation **linéaire**

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f + F[f] \cdot \nabla_v \bar{f} = 0$$

où $\bar{f} = \bar{f}(t, x, v)$ est **donnée**, **non stationnaire**,

mais $\sup_{t \geq 0} \|\bar{f}(t)\|_{\mathcal{Z}_t} \leq C$.

Une étape clé dans la preuve

Analyse de l'équation **linéaire**

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f + F[f] \cdot \nabla_v \bar{f} = 0$$

où $\bar{f} = \bar{f}(t, x, v)$ est **donnée, non stationnaire,**

mais $\sup_{t \geq 0} \|\bar{f}(t)\|_{\mathcal{Z}_t} \leq C.$

Inégalité sur $\|\rho(t)\|$? en gros

$$\|\rho(t)\| \leq S(t) + \int_0^t K(t, \tau) \|\rho(\tau)\| d\tau$$

$$K(t, \tau) = O(\tau), \quad \int_0^t K d\tau = O(t) \dots$$

Une étape clé dans la preuve

Analyse de l'équation **linéaire**

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f + F[f] \cdot \nabla_v \bar{f} = 0$$

où $\bar{f} = \bar{f}(t, x, v)$ est **donnée**, **non stationnaire**,

mais $\sup_{t \geq 0} \|\bar{f}(t)\|_{\mathcal{Z}_t} \leq C$.

Inégalité sur $\|\rho(t)\|$? en gros

$$\|\rho(t)\| \leq S(t) + \int_0^t K(t, \tau) \|\rho(\tau)\| d\tau$$

$$K(t, \tau) = O(\tau), \quad \int_0^t K d\tau = O(t) \dots$$

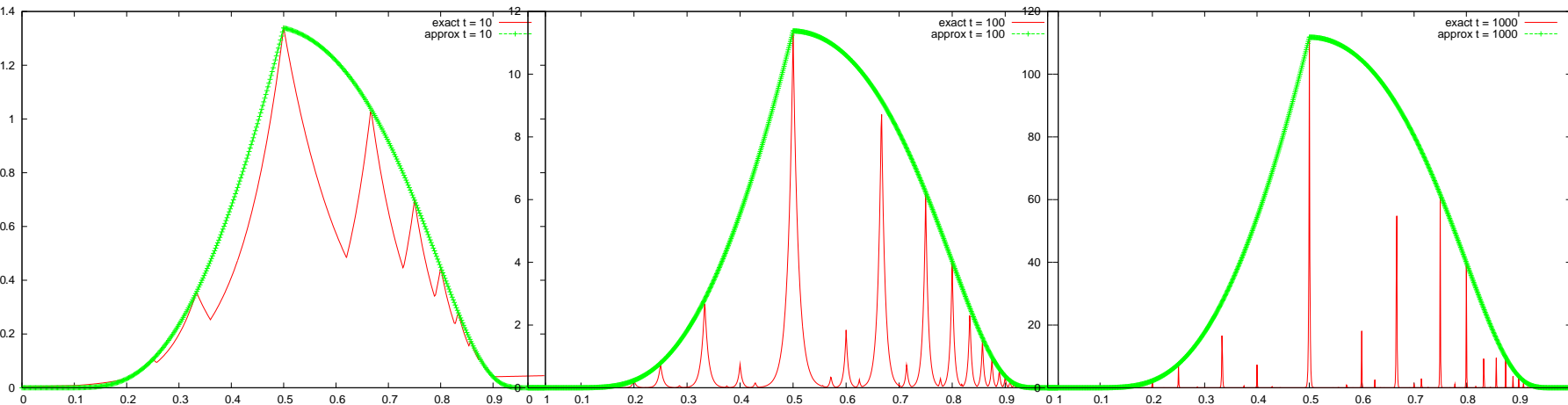
... D'où $\|\rho(t)\| = O(\exp c t^2) \dots$ estimée catastrophique !!

Analyse affinée du noyau de réponse en temps

Pour un bon choix de paramètres,

$$K(t, \tau) \simeq (1 + \tau) \sup_{\ell \neq k \neq 0} |\widehat{W}(k - \ell)| e^{-\alpha |k(t-\tau) + \ell\tau|} e^{-\alpha |\ell|}$$

Couplage de (k, ℓ) plus fort si W plus singulier!



... Quand $t \rightarrow \infty$, K se concentre sur des temps discrets τ (compensation par oscillations — sauf si “résonance”)

Comme l’expérience de l’écho plasma (Malmberg 1967)

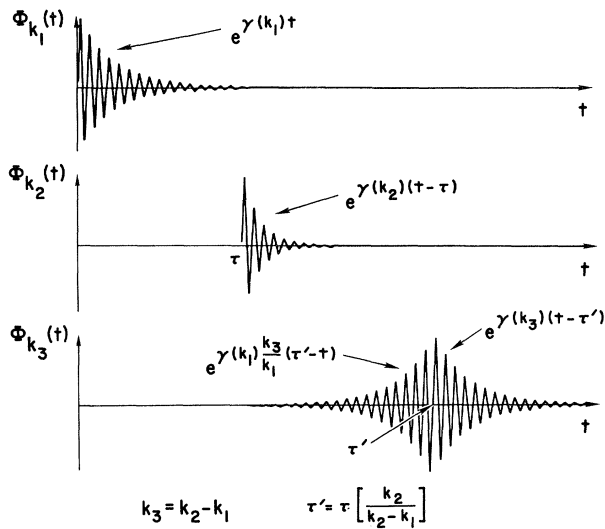


FIG. 1. Approximate variation of the principal Fourier coefficients of the self-consistent field for the case $k_3 \cong k_1 \cong \frac{1}{2}k_2$. Upper line: response to the first pulse; middle line: response to the second pulse; lower line: echo.

where

$$\tan \delta = \gamma(k_1)(k_3 - k_1) / \omega_p(k_3 + k_1)$$

and

$$\tan \delta' = \gamma(k_3)(k_1 - k_3) / \omega_p(k_1 + k_3).$$

It is interesting to note that the echo is not symmetric in that it grows up at the rate $\exp[\gamma(k_1)k_3/k_1(\tau' - t)]$ and damps away at the rate $\exp[\gamma(k_3) \times (t - \tau')]$.

The results of both the first- and second-order calculations are summarized in Fig. 1. The exponentials written in this figure indicate the general dependence of the envelopes of the oscillating curves, which have actually been drawn for the case where $k_1 \cong k_3$.

The above calculation was based on the collisionless Boltzmann equation and is invalidated if collisions are strong enough to destroy the phase information before the echo can appear. Small angle Coulomb collisions are particularly effective in this regard, since the Fokker-Planck operator representing these collisions enhances the collision rate by a factor $(k\bar{v}\tau)^2 \cong (\omega_p\tau)^2$ when operating on a perturbation of the form $e^{ikv\tau}$. By working in a marginal range, one might be able to use this effect as a tool to measure the Coulomb collision rate, even though the neutral collision rate is somewhat higher.

We have considered several variations on the above calculation. Although in this paper we have discussed explicitly only second-order echoes, higher order echoes are also possible. For example, a third-order echo is produced when the velocity space perturbation from the first pulse is modulated by a spatial harmonic of the electric field from the second pulse. The echo then occurs at $t = \tau 2k_2 / (2k_2 - k_1)$ or $t = 2\tau$ when $k_2 = k_1$. This result is more closely related to echoes of other types³ which are also third order for small amplitudes.

It is possible also to have spatial echoes, and these will probably be easier to observe experimentally than the temporal echoes described above. If an electric field of frequency ω_1 is continuously excited at one point in a plasma and an electric field of frequency $\omega_2 > \omega_1$ is continuously excited at a distance l from this point, then a spatial echo of frequency $\omega_2 - \omega_1$ will appear at a distance $l\omega_1 / (\omega_2 - \omega_1)$ from the point where the second field is excited.

Finally, although our discussion has been entirely in terms of electron wave echoes, it is clear that the above treatment can be extended in a straightforward manner to include ion dynamics, and this leads to temporal as well as spatial ion wave echoes.

An observation of plasma echoes would be of fundamental interest, since it would experimentally verify the reversible nature of collisionless damping. The analogy with spin echoes³ strongly suggests the possible use of the echo technique as a means for studying collisional relaxation phenomena in plasmas.

*This research was sponsored in part by the Office of Naval Research under Contract No. Nonr-220(50), and in part by the Defense Atomic Support Agency under Contract No. DA-49-146-XZ-486.

¹L. Landau, J. Phys. USSR **10**, 45 (1946).

²A. Y. Wong, N. D'Angelo, and R. W. Motley, Phys. Rev. **133**, A436 (1964); J. H. Malmberg and C. B. Wharton, Phys. Rev. Letters **6**, 184 (1964); J. H. Malmberg, C. B. Wharton, and W. E. Drummond, in Proceedings of the 1965 Culham Conference (International Atomic Energy Agency, Vienna, 1966), Vol. I, 485.

³E. L. Hahn, Phys. Rev. **80**, 580 (1950); R. M. Hill and D. E. Kaplan, Phys. Rev. Letters **14**, 1062 (1965); R. W. Gould, Phys. Letters **19**, 477 (1965); I. D. Abella, N. A. Kurnit, and S. R. Hartman, Phys. Rev. **141**, 391 (1966).

⁴ Φ_{k_1} and Φ_{k_2} have the dimensions of electric potential owing to our inclusions of ω_p in the arguments of the delta functions.

Effet stabilisant dû au retard : bébés modèles

- $\varphi(t) \leq \int_0^t \tau \varphi(\tau) d\tau \implies \varphi(t) = O(e^{t^2})$

Effet stabilisant dû au retard : bébés modèles

- $\varphi(t) \leq \int_0^t \tau \varphi(\tau) d\tau \implies \varphi(t) = O(e^{t^2})$
- $\varphi(t) \leq \int_0^t \varphi(\tau) d\tau \implies \varphi(t) = O(e^t)$

Effet stabilisant dû au retard : bébés modèles

- $\varphi(t) \leq \int_0^t \tau \varphi(\tau) d\tau \implies \varphi(t) = O(e^{t^2})$
- $\varphi(t) \leq \int_0^t \varphi(\tau) d\tau \implies \varphi(t) = O(e^t)$
- $\varphi(t) \leq t \varphi\left(\frac{t}{2}\right) \implies \varphi(t) = O\left(t^{\log t}\right)$

Effet stabilisant dû au retard : bébés modèles

- $\varphi(t) \leq \int_0^t \tau \varphi(\tau) d\tau \implies \varphi(t) = O(e^{t^2})$
- $\varphi(t) \leq \int_0^t \varphi(\tau) d\tau \implies \varphi(t) = O(e^t)$
- $\varphi(t) \leq t \varphi\left(\frac{t}{2}\right) \implies \varphi(t) = O\left(t^{\log t}\right)$

Bébé modèle pour l'interaction gravitationnelle

$$\varphi_k(t) \leq a(kt) + \frac{ct}{k^2} \varphi_{k+1}\left(\frac{kt}{k+1}\right) \quad k \in \mathbb{N}$$

$$\implies \varphi_k(t) \lesssim a(kt) \exp((ckt)^{1/3})$$

Effet stabilisant dû au retard : bébés modèles

- $\varphi(t) \leq \int_0^t \tau \varphi(\tau) d\tau \implies \varphi(t) = O(e^{t^2})$
- $\varphi(t) \leq \int_0^t \varphi(\tau) d\tau \implies \varphi(t) = O(e^t)$
- $\varphi(t) \leq t \varphi\left(\frac{t}{2}\right) \implies \varphi(t) = O\left(t^{\log t}\right)$

Bébé modèle pour l'interaction gravitationnelle

$$\varphi_k(t) \leq a(kt) + \frac{ct}{k^2} \varphi_{k+1}\left(\frac{kt}{k+1}\right) \quad k \in \mathbb{N}$$

$$\implies \varphi_k(t) \lesssim a(kt) \exp((ckt)^{1/3})$$

Perte de décroissance en temps, sur-polynomiale mais sous-exponentielle \implies peut être compensée par la décroissance exponentielle linéaire

Estimations similaires établies sur le vrai modèle, via bornes techniques de **moments exponentiels**

Rattraper la perte

La perte de régularité en régime perturbatif se guérit souvent par le **schéma de Newton** (Kolmogorov, Nash...)

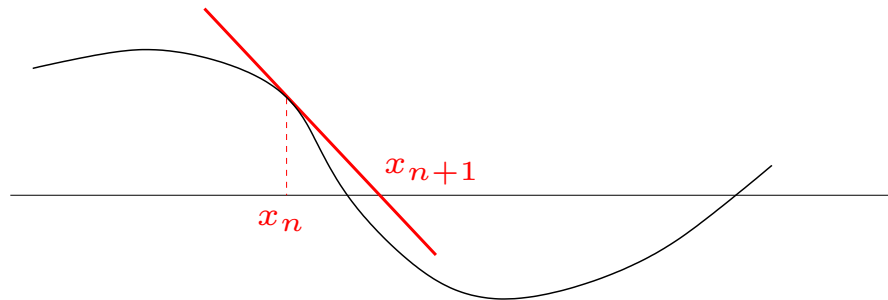
Estimations similaires établies sur le vrai modèle, via bornes techniques de **moments exponentiels**

Rattraper la perte

La perte de régularité en régime perturbatif se guérit souvent par le **schéma de Newton** (Kolmogorov, Nash...)

Schéma de Newton pour résoudre $\Phi(x) = 0$

$$x = \lim x_n, \quad \Phi(x_n) + D\Phi(x_n) \cdot (x_{n+1} - x_n) = 0$$



Converge **monstrueusement vite** : $O(\varepsilon^{2^n})$

Schéma de Newton pour l'équation de Vlasov

$$f^0 = f^0(v) \quad (\text{état stationnaire homogène})$$

$$f^n = f^0 + h^1 + \dots + h^n$$

$$\begin{cases} \partial_t h^1 + v \cdot \nabla_x h^1 + F[h^1] \cdot \nabla_v f^0 = 0 \\ h^1(0, \cdot) = f_i - f^0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \partial_t h^{n+1} + v \cdot \nabla_x h^{n+1} + F[f^n] \cdot \nabla_v h^{n+1} + F[h^{n+1}] \cdot \nabla_v f^n \\ \hspace{15em} = -F[h^n] \cdot \nabla_v h^n \\ h^{n+1}(0, \cdot) = 0. \end{cases}$$

Estimées en temps grand le long du schéma de Newton

- $f^n = f^0 + h^1 + \dots + h^n$
- On contrôle simultanément **fonction densité** + trajectoires

$S_{t,\tau}^n = (X, V)_t \longmapsto (X, V)_\tau$ dans le champ de forces $F[f^n]$

$\Omega_{t,\tau}^n = S_{t,\tau}^n \circ (S_{t,\tau}^0)^{-1}$ (“scattering”)

- On propage un paquet de contrôles, dont

$$\sup_{\tau \geq 0} \left\| \int h_\tau^k dv \right\|_{\mathcal{Z}_\tau^{\lambda_k, \mu_k}} \leq \delta_k$$

$$\sup_{t \geq \tau \geq 0} \left\| h_\tau^k \circ \Omega_{t,\tau}^{k-1} \right\|_{\mathcal{Z}_{\tau - \frac{bt}{1+b}}^{\lambda_k(1+b), \mu_k; 1}} \leq \delta_k, \quad b(t) = \frac{B}{1+t}$$

À chaque étape, en normes \mathcal{Z} ...

1[†]) Estimer $\Omega^n - \text{Id}$ (uniformément en n) et $\nabla\Omega^n - I$

2[†]) Estimer $\Omega^n - \Omega^k$ ($k \leq n - 1$; petit quand $k \rightarrow \infty$)

3[†]) Estimer $(\Omega^k)^{-1} \circ \Omega^n$

4) Estimer $h_\tau^k, \nabla h_\tau^k, \nabla^2 h_\tau^k$ ($k \leq n$) composé avec $\Omega_{t,\tau}^n$

5*) Estimer $\int h^{n+1} dv$

6) Dédire une estimée de $F[h^{n+1}]$

7*) Estimer $h^{n+1} \circ \Omega^n$

8) Estimer $\nabla h^{n+1} \circ \Omega^n$

9) Montrer que $(\nabla h^{n+1}) \circ \Omega^n \simeq \nabla(h^{n+1} \circ \Omega^n)$

† par point fixe classique

* Grâce à l'équation

Utiliser la **convergence surnaturelle du schéma de Newton** ($O(\varepsilon^{2^n})$)

pour absorber les très grandes constantes

Conclusions mathématiques

- On établit effectivement $\sup_{t \geq 0} \|f(t)\|_{Z_t^{\lambda, \mu; 1}} < +\infty$
 - Tout marche bien d'abord parce que **Vlasov linéarisé est un système complètement intégrable!**
- ⇒ Analogie inattendue avec KAM : Schéma de Newton pour vaincre une perte de “régularité” dans un système hamiltonien complètement intégrable perturbé
- **NB** : On utilise **plus** que la convergence super-géométrique de Newton : il est vraiment utile de savoir que $\text{erreur} \leq \exp(-n^s)$
 - En conséquence, pas de version C^k en vue (“**KA** plutôt que **M**”) : nouveau problème ouvert parmi beaucoup (extension aux équilibres non homogènes, etc.)

Conclusions physiques

Landau rencontre Kolmogorov

Trois des plus célèbres paradoxes de la physique classique moderne sont liés :

{ Théorie KAM
échos plasma
amortissement Landau

.... mais seulement dans le régime non linéaire !

Conclusions physiques

Landau rencontre Kolmogorov

Trois des plus célèbres paradoxes de la physique classique moderne sont liés :

{ Théorie KAM
échos plasma
amortissement Landau

.... mais seulement dans le régime non linéaire !

Nature de l'amortissement Landau

Relaxation par **régularité**, provoquée par mélange confiné

Premiers pas en territoire vierge ? Problème universel de la **relaxation isentropique dans les systèmes de particules**

Spéculations sur la régularité

- Relaxation $O(e^{-t})$ dans \mathcal{C}^ω
- Relaxation $O(e^{-t^\nu})$ dans \mathcal{G}^ν pour $\nu > 1/3$ (?)
- Espace d'énergie : **non**, faut au moins 2 dérivées (Lin)
- Espace invariant : pire, $e^{-\beta H}[L^1] = 0$ (Sturm)
- Conjecture : stable en tps $O(1/\varepsilon)$ ($\gg 1/\sqrt{\varepsilon}$) dans C^s .

Spéculations sur la régularité

- Relaxation $O(e^{-t})$ dans C^ω
- Relaxation $O(e^{-t^\nu})$ dans \mathcal{G}^ν pour $\nu > 1/3$ (?)
- Espace d'énergie : **non**, faut au moins 2 dérivées (Lin)
- Espace invariant : pire, $e^{-\beta H}[L^1] = 0$ (Sturm)
- Conjecture : stable en tps $O(1/\varepsilon)$ ($\gg 1/\sqrt{\varepsilon}$) dans C^s .

Semble OK si une certaine constante optimale est polynomiale....

Problème modèle :

$$\|f\|_{C^r} \leq C \varepsilon^{-s} \|f\|_{C^0}^{1-\varepsilon} \|f\|_{C^k}^\varepsilon \quad \varepsilon = r/k \quad ??$$

Spéculations sur la régularité (II)

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f + F[f] \cdot \nabla_v f = \varepsilon Q_L(f, f)$$

$$= \varepsilon \nabla_v \cdot \left\{ \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\Pi_{(v-v_*)^\perp}}{|v-v_*|} \left(f(v_*) \nabla_v f(v) - f(v) \nabla_v f(v_*) \right) dv_* \right\}$$

- $\varepsilon = \log \Lambda / (2\pi \Lambda) \simeq 10^{-2} \rightarrow 10^{-30} \ll 1$

Spéculations sur la régularité (II)

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f + F[f] \cdot \nabla_v f = \varepsilon Q_L(f, f)$$

$$= \varepsilon \nabla_v \cdot \left\{ \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\Pi_{(v-v_*)^\perp}}{|v-v_*|} \left(f(v_*) \nabla_v f(v) - f(v) \nabla_v f(v_*) \right) dv_* \right\}$$

- $\varepsilon = \log \Lambda / (2\pi \Lambda) \simeq 10^{-2} \rightarrow 10^{-30} \ll 1$
- Plausible : régularité \mathcal{G}^ν , en $O(\exp(\varepsilon t)^{-\nu/(2-\nu)})$ en v , peut-être $O(\exp(\varepsilon^\nu (\varepsilon t)^{-3\nu/(2-3\nu)})$ en x
- Plausible : homogénéisation au moins aussi vite que (diffusion ; stabilité de l'homogénéité), i.e. $O(\exp -t^\nu)$
- Déduire : amortissement sur une échelle de temps $\varepsilon^{-\zeta} \ll \varepsilon^{-1}$, alors qu'augmentation d'entropie $O(\varepsilon^{1-\zeta}) \ll 1$

Spéculations sur la régularité (II)

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f + F[f] \cdot \nabla_v f = \varepsilon Q_L(f, f)$$

$$= \varepsilon \nabla_v \cdot \left\{ \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\Pi_{(v-v_*)^\perp}}{|v-v_*|} \left(f(v_*) \nabla_v f(v) - f(v) \nabla_v f(v_*) \right) dv_* \right\}$$

- $\varepsilon = \log \Lambda / (2\pi \Lambda) \simeq 10^{-2} \rightarrow 10^{-30} \ll 1$
- Plausible : régularité \mathcal{G}^ν , en $O(\exp(\varepsilon t)^{-\nu/(2-\nu)})$ en v , peut-être $O(\exp(\varepsilon^\nu (\varepsilon t)^{-3\nu/(2-3\nu)})$ en x
- Plausible : homogénéisation au moins aussi vite que (diffusion ; stabilité de l'homogénéité), i.e. $O(\exp -t^\nu)$
- Déduire : amortissement sur une échelle de temps $\varepsilon^{-\zeta} \ll \varepsilon^{-1}$, alors qu'augmentation d'entropie $O(\varepsilon^{1-\zeta}) \ll 1$
- Heuristique : $\zeta \simeq 8/9 \dots$ (1/6 sans régularité en x)