

Un résultat de compacité pour l'état de Landau en micromagnétisme

Radu IGNAT

Laboratoire de Mathématiques
Université Paris-Sud 11

(en collaboration avec Felix OTTO, Université de Bonn)

Collège de France, 14 Mars 2008

Micromagnétisme

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$, $m : \Omega \rightarrow S^2$ **aimantation**,

$$E_{3D} = \underbrace{d^2 \int_{\Omega} |\nabla m|^2}_{\text{Energie d'échange}} + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla U|^2}_{\text{Energie démagnétisante}}$$

Micromagnétisme

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$, $m : \Omega \rightarrow S^2$ **aimantation**,

$$E_{3D} = \underbrace{d^2 \int_{\Omega} |\nabla m|^2}_{\text{Energie d'échange}} + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla U|^2}_{\text{Energie démagnétisante}}$$

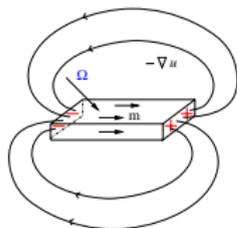
où $U : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ **est le potentiel démagnétisant** défini par

$$\Delta U = \nabla \cdot (m \mathbf{1}_{\Omega}) \quad \text{dans } \mathbb{R}^3.$$

Charges de volume : $\Delta U = \nabla \cdot m$ dans Ω

Charges de surface : $\left[\frac{\partial U}{\partial \nu} \right] = m \cdot \nu$ sur $\partial\Omega$

d = longueur d'échange de l'ordre $O(nm)$



Domaines magnétiques & parois

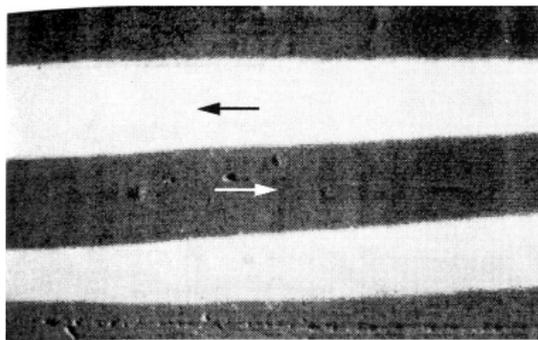


FIG.: Echantillon de permalloy. (Hubert et Schäfer, Springer 1998)

Observation physique

- des vastes régions uniformément magnétisées (**domaines magnétiques**)
- des couches limites (**parois**)

Parois dans les films minces

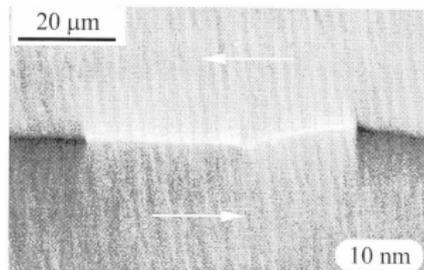


FIG.: Paroi de Néel - film de permalloy. (Hubert et Schäfer, Springer 1998.)

- aimantation dans S^1 ;
- structure $1D$.

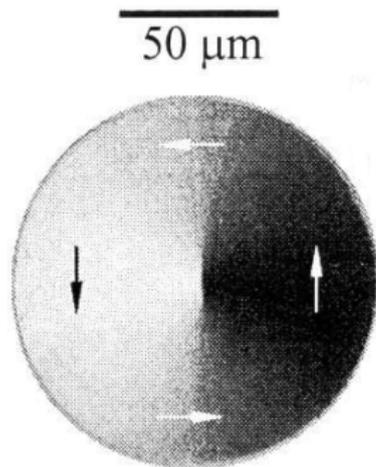


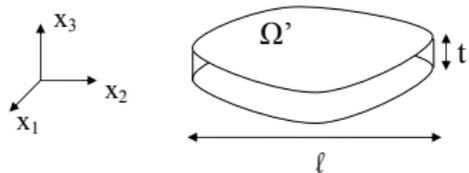
FIG.: Ligne de Bloch. (Hubert et Schäfer, Springer 1998.)

- vortex avec $m_3 \neq 0$;
- structure $2D$.

Films minces

$$\Omega = \Omega' \times (0, t), \quad \ell = \text{diam } \Omega'.$$

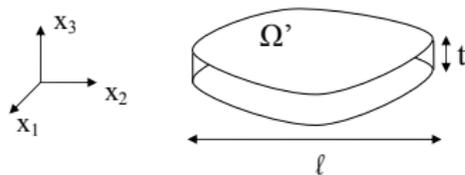
Régime : $t \ll d$, $d^2 \ll t\ell$.



Films minces

$$\Omega = \Omega' \times (0, t), \quad \ell = \text{diam } \Omega'.$$

Régime : $t \ll d$, $d^2 \ll t\ell$.



Hypothèse sur m : m est **invariant en** x_3 ,

$$\text{i.e., } (m', m_3) = m(x_1, x_2) : \Omega' \rightarrow \mathcal{S}^2.$$

Ici, l'apostrophe ' correspond à une quantité **2D**.

On résout $\Delta U = \nabla' \cdot m' 1_{\Omega} + m \cdot \nu 1_{\partial\Omega}$ où $\Omega = \Omega' \times (0, t)$.

On résout $\Delta U = \nabla' \cdot m' 1_{\Omega} + m \cdot \nu 1_{\partial\Omega}$ où $\Omega = \Omega' \times (0, t)$.

On déduit

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla U|^2 dx = t \int_{\mathbb{R}^2} f\left(\frac{t}{2}|\xi'|\right) \left| \frac{\xi'}{|\xi'|} \cdot \widehat{m}' \right|^2 d\xi' + t \int_{\mathbb{R}^2} g\left(\frac{t}{2}|\xi'|\right) |\widehat{m}_3|^2 d\xi',$$

où

$$g(s) = \frac{1 - e^{-2s}}{2s} \quad \text{et} \quad f(s) = 1 - g(s).$$

On résout $\Delta U = \nabla' \cdot m' 1_{\Omega} + m \cdot \nu 1_{\partial\Omega}$ où $\Omega = \Omega' \times (0, t)$.

On déduit

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla U|^2 dx = t \int_{\mathbb{R}^2} f\left(\frac{t}{2}|\xi'|\right) \left| \frac{\xi'}{|\xi'|} \cdot \widehat{m}' \right|^2 d\xi' + t \int_{\mathbb{R}^2} g\left(\frac{t}{2}|\xi'|\right) |\widehat{m}_3|^2 d\xi',$$

où

$$g(s) = \frac{1 - e^{-2s}}{2s} \quad \text{et} \quad f(s) = 1 - g(s).$$

Comme $g(s) \approx 1$ et $f(s) \approx s$ si $s \approx 0$, alors

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla U|^2 dx \approx \frac{t^2}{2} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla'^{-\frac{1}{2}} \nabla' \cdot m'|^2 dx' + t \int_{\Omega'} m_3^2 dx'.$$

(Γ -convergence : DeSimone, Kohn, Müller & Otto)

On résout $\Delta U = \nabla' \cdot m' 1_{\Omega} + m \cdot \nu 1_{\partial\Omega}$ où $\Omega = \Omega' \times (0, t)$.

On déduit

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla U|^2 dx = t \int_{\mathbb{R}^2} f\left(\frac{t}{2}|\xi'|\right) \left| \frac{\xi'}{|\xi'|} \cdot \widehat{m}' \right|^2 d\xi' + t \int_{\mathbb{R}^2} g\left(\frac{t}{2}|\xi'|\right) |\widehat{m}_3|^2 d\xi',$$

où

$$g(s) = \frac{1 - e^{-2s}}{2s} \quad \text{et} \quad f(s) = 1 - g(s).$$

Comme $g(s) \approx 1$ et $f(s) \approx s$ si $s \approx 0$, alors

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla U|^2 dx \approx \frac{t^2}{2} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla'^{-\frac{1}{2}} \nabla' \cdot m'|^2 dx' + t \int_{\Omega'} m_3^2 dx'.$$

(Γ -convergence : DeSimone, Kohn, Müller & Otto)

Remarque. On a noté $m' := m' 1_{\Omega'}$ et alors

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla'^{-\frac{1}{2}} \nabla' \cdot m'|^2 dx' = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{|\xi'|} \left| \xi' \cdot \widehat{m}' \right|^2 d\xi' < \infty \Rightarrow m' \cdot \nu' = 0 \text{ sur } \partial\Omega'$$

Energie du film mince

$$E_{3D} = d^2 t \int_{\Omega'} |\nabla' m|^2 dx' + \frac{t^2}{2} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla'^{-\frac{1}{2}} \nabla' \cdot m'|^2 dx' + t \int_{\Omega'} m_3^2 dx'.$$

Energie du film mince

$$E_{3D} = d^2 t \int_{\Omega'} |\nabla' m|^2 dx' + \frac{t^2}{2} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla'^{-\frac{1}{2}} \nabla' \cdot m'|^2 dx' + t \int_{\Omega'} m_3^2 dx'.$$

$$\text{Scaling : } \omega = \frac{\Omega'}{\ell}, \quad E_{\varepsilon, \eta} = \frac{E_{3D}}{d^2 t}, \quad \eta = \frac{2d^2}{\ell t}, \quad \varepsilon = \frac{d}{\ell},$$

$$E_{\varepsilon, \eta}(m) = \int_{\omega} |\nabla' m|^2 dy' + \frac{1}{\eta} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla'^{-\frac{1}{2}} \nabla' \cdot m'|^2 dy' + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\omega} m_3^2 dy'.$$

Energie du film mince

$$E_{3D} = d^2 t \int_{\Omega'} |\nabla' m|^2 dx' + \frac{t^2}{2} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla'^{-\frac{1}{2}} \nabla' \cdot m'|^2 dx' + t \int_{\Omega'} m_3^2 dx'.$$

$$\text{Scaling : } \omega = \frac{\Omega'}{\ell}, \quad E_{\varepsilon, \eta} = \frac{E_{3D}}{d^2 t}, \quad \eta = \frac{2d^2}{\ell t}, \quad \varepsilon = \frac{d}{\ell},$$

$$E_{\varepsilon, \eta}(m) = \int_{\omega} |\nabla' m|^2 dy' + \frac{1}{\eta} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla'^{-\frac{1}{2}} \nabla' \cdot m'|^2 dy' + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\omega} m_3^2 dy'.$$

BUT : Comportement limite des minimiseurs de $E_{\varepsilon, \eta}$ dans le régime

$$\varepsilon \ll \eta \ll 1.$$

Prédiction (van den Berg) : Configuration limite

$$\begin{cases} m_3 = 0, |m'| = 1 \text{ et } \nabla' \cdot m' = 0 & \text{dans } \omega, \\ m' \cdot \nu' = 0 & \text{sur } \partial\omega. \end{cases}$$

Prédiction (van den Berg) : Configuration limite

$$\begin{cases} m_3 = 0, |m'| = 1 \text{ et } \nabla' \cdot m' = 0 & \text{dans } \omega, \\ m' \cdot \nu' = 0 & \text{sur } \partial\omega. \end{cases}$$

En posant $m' = \nabla'^{\perp} \psi$, alors

$$|\nabla' \psi| = 1 \text{ dans } \omega \quad \text{et} \quad \psi = 0 \text{ sur } \partial\omega.$$

⇒ PAS de solution régulière (**singularités lignes** ou **vortex** pour m')

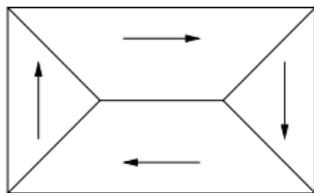
Prédiction (van den Berg) : Configuration limite

$$\begin{cases} m_3 = 0, |m'| = 1 \text{ et } \nabla' \cdot m' = 0 & \text{dans } \omega, \\ m' \cdot \nu' = 0 & \text{sur } \partial\omega. \end{cases}$$

En posant $m' = \nabla'^{\perp} \psi$, alors

$$|\nabla' \psi| = 1 \text{ dans } \omega \quad \text{et} \quad \psi = 0 \text{ sur } \partial\omega.$$

\Rightarrow PAS de solution régulière (**singularités lignes** ou **vortex** pour m')



Etat de Landau : $m' = \nabla'^{\perp} \text{dist}(x', \partial\omega)$

BUT :

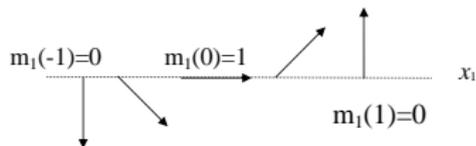
Compacité pour l'état de Landau.

Idée : Analyser le comportement qualitatif et quantitatif des parois :

- parois de Néel (\rightarrow singularités lignes pour l'état de Landau)
- ligne de Bloch (\rightarrow vortex pour l'état de Landau)

Paroi de Néel

- structure $1D$: $m = (m_1(x_1), m_2(x_1), 0)$, $|m| = 1$;

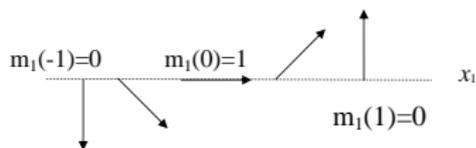


- PAS de charges de surface, MAIS charges de volume :

$$\nabla \cdot m = \frac{dm_1}{dx_1} \neq 0.$$

Paroi de Néel

- structure $1D$: $m = (m_1(x_1), m_2(x_1), 0)$, $|m| = 1$;



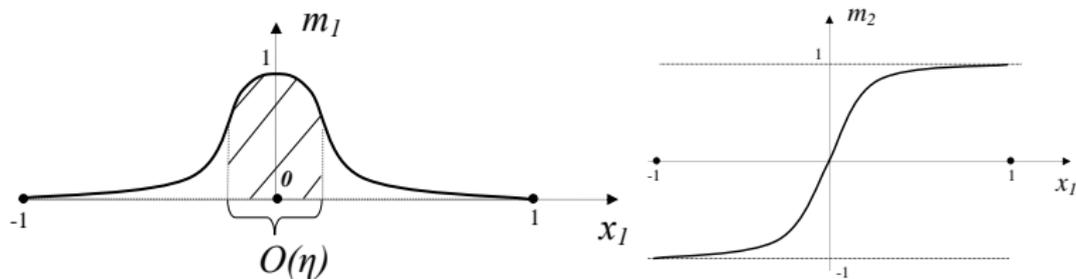
- PAS de charges de surface, MAIS charges de volume :

$$\nabla \cdot m = \frac{dm_1}{dx_1} \neq 0.$$

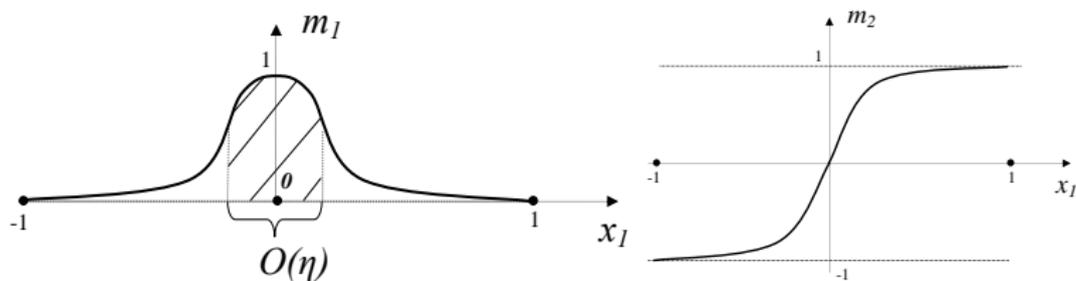
- minimiseur de $E_\eta(m) = \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{dm}{dx_1} \right|^2 + \frac{1}{\eta} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{d}{dx_1} m_1 \right|^2$.

Difficulté : contrôle en $H^{1/2}(\mathbb{R}) \not\subset L^\infty(\mathbb{R})$ et $\sup |m_1| = 1$
 \Rightarrow singularité logarithmique.

- (Melcher) : objet à deux échelles :
 - petit coeur ($|x_1| \lesssim \eta$) de variation rapide ;
 - deux queues de Néel $\eta \lesssim |x_1| \lesssim 1$ à décroissance logarithmique.



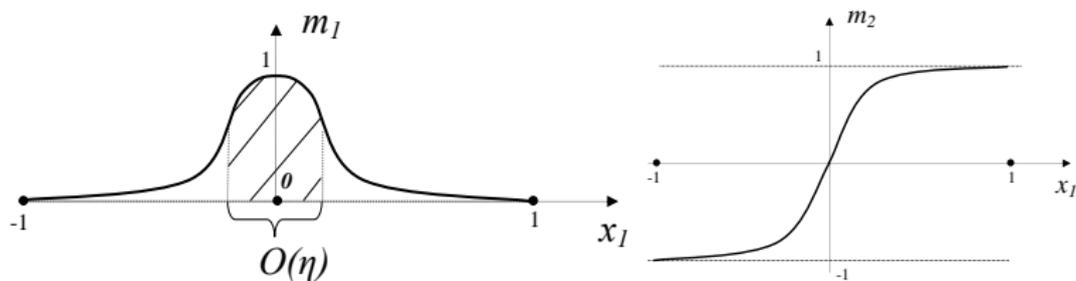
- (Melcher) : objet à deux échelles :
 - petit coeur ($|x_1| \lesssim \eta$) de variation rapide ;
 - deux queues de Néel $\eta \lesssim |x_1| \lesssim 1$ à décroissance logarithmique.



- (DeSimone, Knüpfner & Otto) : stabilité $2D$ de la paroi de Néel

$$E_{Neel} \approx \frac{\pi}{\eta |\ln \eta|} \rightarrow \infty \quad \text{si} \quad \eta \rightarrow 0$$

- (Melcher) : objet à deux échelles :
 - petit coeur ($|x_1| \lesssim \eta$) de variation rapide ;
 - deux queues de Néel $\eta \lesssim |x_1| \lesssim 1$ à décroissance logarithmique.



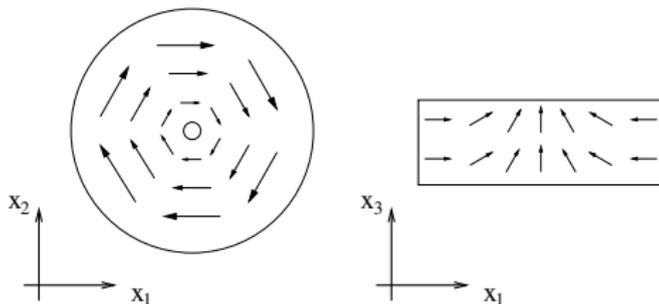
- (DeSimone, Knüpfner & Otto) : stabilité $2D$ de la paroi de Néel

$$E_{Neel} \approx \frac{\pi}{\eta |\ln \eta|} \rightarrow \infty \quad \text{si} \quad \eta \rightarrow 0$$

- (Ignat & Otto) optimalité de la paroi de Néel

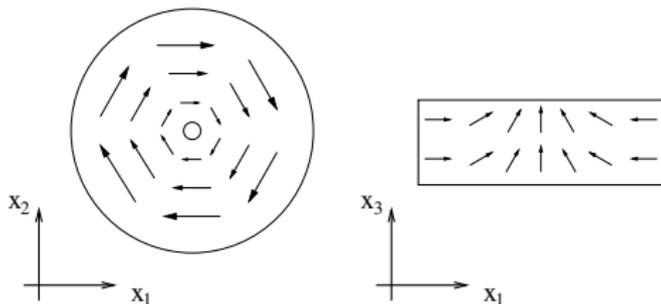
Ligne de Bloch

- structure $2D$: $m = (m'(x'), m_3(x'))$, $|m| = 1$;
- PAS de charges de volume $\nabla' \cdot m' = 0$ dans \mathbb{R}^2
(\rightarrow contrainte topologique $m' \cdot \nu' = 0$ sur ω)
- charges de surface : $m_3^2 = 1 - |m'|^2 \neq 0$.



Ligne de Bloch

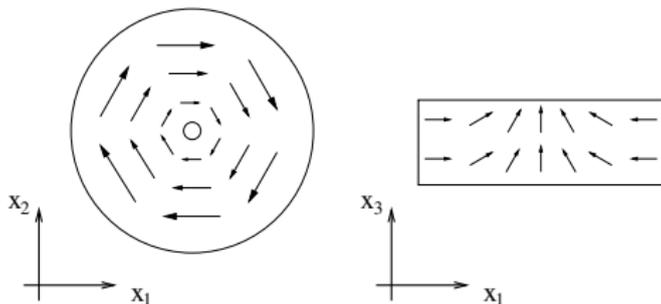
- structure $2D$: $m = (m'(x'), m_3(x'))$, $|m| = 1$;
- PAS de charges de volume $\nabla' \cdot m' = 0$ dans \mathbb{R}^2
(\rightarrow contrainte topologique $m' \cdot \nu' = 0$ sur ω)
- charges de surface : $m_3^2 = 1 - |m'|^2 \neq 0$.



- minimiseur de $E_\varepsilon(m) = \int_\omega |\nabla' m|^2 dx' + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_\omega m_3^2 dx'$.

Ligne de Bloch

- structure $2D$: $m = (m'(x'), m_3(x'))$, $|m| = 1$;
- PAS de charges de volume $\nabla' \cdot m' = 0$ dans \mathbb{R}^2
(\rightarrow contrainte topologique $m' \cdot \nu' = 0$ sur ω)
- charges de surface : $m_3^2 = 1 - |m'|^2 \neq 0$.



- minimiseur de $E_\varepsilon(m) = \int_\omega |\nabla' m|^2 dx' + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_\omega m_3^2 dx'$.
- (Béthuel-Brezis-Hélein) $E_{Bloch} \approx 2\pi |\ln \varepsilon| \rightarrow \infty$ si $\varepsilon \rightarrow 0$

Sommaire

Aimantation :

$$m = (m', m_3)(x') : \omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2, m' \cdot \nu' = 0 \text{ sur } \partial\omega.$$

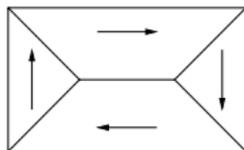
Energie micromagnétique du film mince :

$$E_{\varepsilon, \eta}(m) = \int_{\omega} |\nabla' m|^2 dx' + \frac{1}{\eta} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla'^{-\frac{1}{2}} \nabla' \cdot m'|^2 dx' + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\omega} m_3^2 dx'.$$

Régime : $\varepsilon \ll \eta \ll 1$.

Energie minimale (de l'état de Landau) :

$$E_{Landau} \approx E_{Neel} + E_{Bloch} \approx \frac{C}{\eta |\ln \eta|} + 2\pi |\ln \varepsilon|.$$



Compacité pour l'état de Landau

Théorème (Ignat & Otto)

Si $m_k : \omega \rightarrow S^2$, $m'_k \cdot \nu' = 0$ sur $\partial\omega$,

$$\int_{\omega} |\nabla' m_k|^2 + \frac{1}{\eta_k} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla'^{-\frac{1}{2}} \nabla' \cdot m'_k|^2 + \frac{1}{\varepsilon_k^2} \int_{\omega} m_{3,k}^2 \\ \leq 2\pi |\ln \varepsilon_k| + \frac{C}{\eta_k |\ln \eta_k|}$$

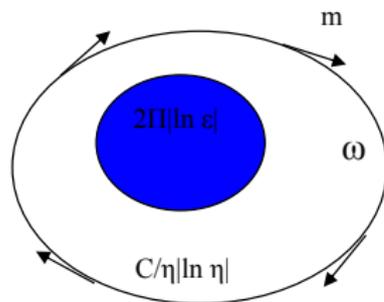
dans le régime $\varepsilon_k, \eta_k \rightarrow 0$, $\frac{C}{\eta_k |\ln \eta_k|} \leq 2\pi\gamma |\ln \varepsilon_k|$, $\gamma \in (0, 1)$

alors $\{m_k\}$ est rel. compacte dans $L^1(\omega)$. Si $m_k \rightarrow m$, alors $m : \omega \rightarrow S^2$,

$$m_3 = 0, \quad |m'| = 1 \text{ p.p. dans } \omega \quad \text{et} \quad \nabla' \cdot m' = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^2.$$

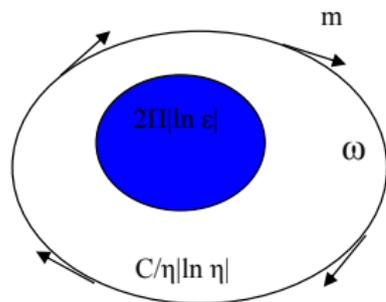
Preuve :

- $m'_k \cdot \nu' = 0$ sur $\partial\omega$
- $\Rightarrow |\deg(m'_k, \partial\omega)| = 1$
- \Rightarrow vortex (petit disque d'énergie $2\pi|\ln \varepsilon_k|$)



Preuve :

- $m'_k \cdot \nu' = 0$ sur $\partial\omega$
- $\Rightarrow |\deg(m'_k, \partial\omega)| = 1$
- \Rightarrow vortex (petit disque d'énergie $2\pi |\ln \varepsilon_k|$)

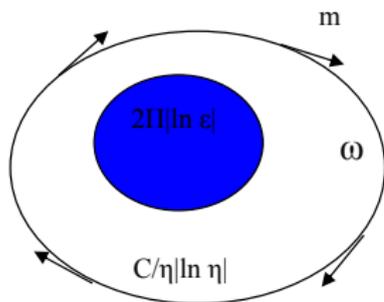


Difficulté : m'_k pourrait avoir des zéros sur $\partial\omega$.

Utiliser que $\{|m'_k| \leq \frac{1}{2}\}$ est petit et faire une extension en miroir de m'_k au tour de $\partial\omega$.

Preuve :

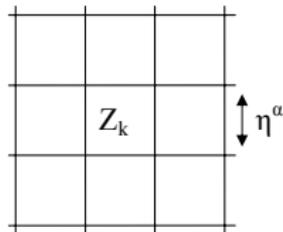
- $m'_k \cdot \nu' = 0$ sur $\partial\omega$
 $\Rightarrow |\deg(m'_k, \partial\omega)| = 1$
 \Rightarrow vortex (petit disque d'énergie $2\pi|\ln \varepsilon_k|$)



Difficulté : m'_k pourrait avoir des zéros sur $\partial\omega$.

Utiliser que $\{|m'_k| \leq \frac{1}{2}\}$ est petit et faire une extension en miroir de m'_k au tour de $\partial\omega$.

- en dehors du vortex, on trouve une grille de taille η_k^α où $|m'_k| \geq 1/2$ et le degré de m'_k sur chaque cellule est nul.



- sur cette grille, on approche m'_k par un champs $2D$ unitaire u_k ($|u_k| = 1$) d'énergie $O(\frac{1}{\eta_k |\ln \eta_k|})$.

- sur cette grille, on approche m'_k par un champs $2D$ unitaire u_k ($|u_k| = 1$) d'énergie $O(\frac{1}{\eta_k |\ln \eta_k|})$.

Théorème de compacité locale : Si $u_k : B_1 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S^1$ et

$$\int_{B_1} |\nabla u_k|^2 + \frac{1}{\eta_k} \int_{B_1} |\nabla^{-\frac{1}{2}} \nabla \cdot u_k|^2 \leq \frac{C}{\eta_k |\ln \eta_k|},$$

alors $\{u_k\}$ rel. compacte dans $L^1(B_1)$. Si $u : B_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ une limite,

$$|u| = 1 \quad \text{et} \quad \nabla \cdot u = 0 \quad \text{dans } B_1.$$

- sur cette grille, on approche m'_k par un champs $2D$ unitaire u_k ($|u_k| = 1$) d'énergie $O(\frac{1}{\eta_k |\ln \eta_k|})$.

Théorème de compacité locale : Si $u_k : B_1 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S^1$ et

$$\int_{B_1} |\nabla u_k|^2 + \frac{1}{\eta_k} \int_{B_1} |\nabla^{-\frac{1}{2}} \nabla \cdot u_k|^2 \leq \frac{C}{\eta_k |\ln \eta_k|},$$

alors $\{u_k\}$ rel. compacte dans $L^1(B_1)$. Si $u : B_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ une limite,

$$|u| = 1 \quad \text{et} \quad \nabla \cdot u = 0 \quad \text{dans } B_1.$$

Idée de preuve : $u_k \xrightarrow{w^*} u$ dans L^∞ . But : $|u| = 1$ p.p.

Critère : $|u(0)| = 1 \iff \int_{B_R} |u| dx \rightarrow 1, R \rightarrow 0;$

- sur cette grille, on approche m'_k par un champs $2D$ unitaire u_k ($|u_k| = 1$) d'énergie $O(\frac{1}{\eta_k |\ln \eta_k|})$.

Théorème de compacité locale : Si $u_k : B_1 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S^1$ et

$$\int_{B_1} |\nabla u_k|^2 + \frac{1}{\eta_k} \int_{B_1} |\nabla^{-\frac{1}{2}} \nabla \cdot u_k|^2 \leq \frac{C}{\eta_k |\ln \eta_k|},$$

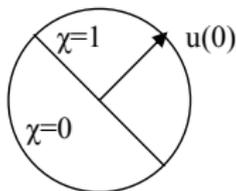
alors $\{u_k\}$ rel. compacte dans $L^1(B_1)$. Si $u : B_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ une limite,

$$|u| = 1 \quad \text{et} \quad \nabla \cdot u = 0 \quad \text{dans } B_1.$$

Idée de preuve : $u_k \xrightarrow{w^*} u$ dans L^∞ . But : $|u| = 1$ p.p.

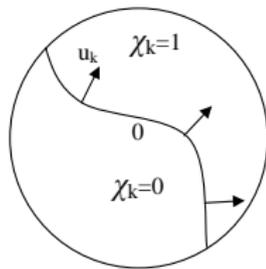
Critère : $|u(0)| = 1 \iff \int_{B_R} |u| dx \rightarrow 1, R \rightarrow 0;$

$\iff \exists \chi : B_1 \rightarrow \{0, 1\}$ telle que



$$\frac{1}{R^2} \int_{B_R} \chi u \cdot \nu dx \rightarrow 1, \quad \nu(x) = \frac{x}{|x|}.$$

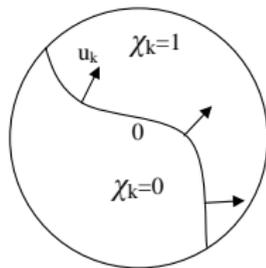
Comment construire la fonction χ ?



Regarder l'orbite de u_k^\perp passant par 0 :

$$\begin{cases} \dot{X}_k(t) = u_k^\perp(X_k(t)), \\ X_k(0) = 0. \end{cases}$$

Comment construire la fonction χ ?



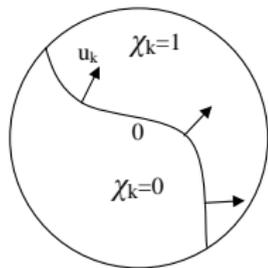
Regarder l'orbite de u_k^\perp passant par 0 :

$$\begin{cases} \dot{X}_k(t) = u_k^\perp(X_k(t)), \\ X_k(0) = 0. \end{cases}$$

- $D\chi_k = u_k \mathcal{H}^1 \llcorner \{X_k\} = u_k |D\chi_k|.$

$$2r \leq \int_{B_r} |D\chi_k| = \int_{B_r} u_k \cdot D\chi_k = \int_{\partial B_r} \chi_k u_k \cdot \nu \, d\mathcal{H}^1 - \underbrace{\int_{B_r} \chi_k \nabla \cdot u_k \, dx}_{\text{petit}}.$$

Comment construire la fonction χ ?



Regarder l'orbite de u_k^\perp passant par 0 :

$$\begin{cases} \dot{X}_k(t) = u_k^\perp(X_k(t)), \\ X_k(0) = 0. \end{cases}$$

- $D\chi_k = u_k \mathcal{H}^1 \llcorner \{X_k\} = u_k |D\chi_k|.$

$$2r \leq \int_{B_r} |D\chi_k| = \int_{B_r} u_k \cdot D\chi_k = \int_{\partial B_r} \chi_k u_k \cdot \nu \, d\mathcal{H}^1 - \underbrace{\int_{B_r} \chi_k \nabla \cdot u_k \, dx}_{\text{petit}}.$$

$\Rightarrow \{\chi_k\}$ borné dans $BV_{loc}(B_1)$ et χ une limite.

- $1 \leq \frac{1}{R^2} \int_0^R dr \int_{\partial B_r} \chi_k u_k \cdot \nu \, d\mathcal{H}^1 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{1}{R^2} \int_{B_R} \chi u \cdot \nu \, dx.$

Γ -convergence :

Notre énergie renormalisée :

$$\begin{cases} E_\eta(m) &= \eta \int_\omega |\nabla m|^2 dx + |\ln \eta| \int_\omega |\nabla^{-\frac{1}{2}} \nabla \cdot m|^2 dx, \\ m : \omega &\rightarrow S^1. \end{cases}$$

Question : Calculer la Γ -limite de E_η .

Γ -convergence :

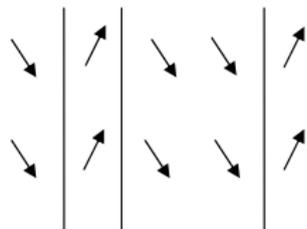
Notre énergie renormalisée :

$$\begin{cases} E_\eta(m) = \eta \int_\omega |\nabla m|^2 dx + |\ln \eta| \int_\omega |\nabla^{-\frac{1}{2}} \nabla \cdot m|^2 dx, \\ m : \omega \rightarrow S^1. \end{cases}$$

Question : Calculer la Γ -limite de E_η .

Cas 1D : $m = m(x_1)$.

$$E_0(m) = \pi(1-|m_1|)^2 \#\{\text{sauts de } m\}.$$



Configuration limite m .

Perspectives :

- Est-ce que les minimiseurs convergent vers l'état de Landau dans ce régime où *l'énergie paroi* \ll *l'énergie vortex*?
- Montrer la compacité de l'état de Landau dans le régime complémentaire : *l'énergie paroi* \gg *l'énergie vortex*.
- Trouver la Γ – *limite* de E_η dans le cas $2D$.