Un résultat sur le contrôle du déplacement d'une zone de fluide

O. Glass (en collaboration avec T. Horsin)

Laboratoire Jacques-Louis Lions
Université Pierre et Marie Curie

Collège de France, le 29 mai 2009.

I. Introduction

Équation

- On considère Ω un domaine borné et régulier du plan, simplement connexe pour simplifier.
- Équation d'Euler des fluides parfaits incompressibles

$$\begin{cases} \partial_t u + (u.\nabla)u + \nabla p = 0 \text{ dans } [0,T] \times \Omega, \\ \text{div } u = 0 \text{ dans } [0,T] \times \Omega. \end{cases}$$

- Ici, $u : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}^2$ est le champ de vitesses du fluide, $p : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}$ est le champ de pression.

- Lorsque le fluide ne peut pas pénétrer le domaine :

$$u.n = 0 \text{ sur } [0,T] \times \partial\Omega,$$

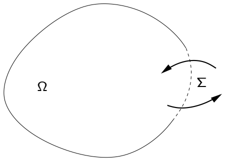
  avec n la normale unitaire extérieure, le système est globalement bien posé : pour u_0 tel que div $u_0 = 0$ dans Ω et $u_0.n = 0$ sur le bord, il existe une unique solution régulière globale partant de cette donnée initiale, cf. Wolibner (1933).

Contrôle frontière

- On considère une partie ouverte non vide Σ du bord $\partial\Omega$.
- Les conditions au bord sont les suivantes :
  - sur $\partial\Omega \setminus \Sigma$, le fluide glisse sans pénétrer dans le domaine.
  - sur Σ, on suppose que l'on peut choisir les conditions au bord qui sont les suivantes (Yudovich) :

$$\begin{cases} u(t,x).n(x) \text{ sur } [0,T] \times \Sigma, \\ \text{rot } u(t,x) \text{ sur } \Sigma_T^- := \{(t,x) \in [0,T] \times \Sigma \ / \ u(t,x).n(x) < 0\}. \end{cases}$$

- Cette condition est un contrôle dont on dispose sur le système, i.e. un moyen que l'on se donne d'influencer son évolution.



Problème de contrôlabilité exacte

- Question générale de théorie du contrôle des EDP : peut-on utiliser le contrôle afin de « commander » la dynamique du système ?

- L'un des principaux problèmes de contrôle est la question de contrôlabilité exacte :

  Étant donnés deux états possibles du système u_0 et u_1 et un temps $T > 0$, peut-on trouver un contrôle tel que la solution correspondante du sysème partant de u_0 au temps $t = 0$ atteigne la cible u_1 au temps $t = T$?

- Formulation alternative : étant donnés u_0, u_1 et T, peut-on trouver une solution de l'équation satisfaisant au bord :

$$u.n = 0 \text{ sur } [0, T] \times (\partial\Omega \setminus \Sigma),$$

  (système sous-déterminé) et amenant u_0 à u_1 en temps T ?

Résultats de contrôlabilité exacte

Théorème (Coron)

L'équation d'Euler bidimensionnelle est exactement contrôlable en temps arbitraire si et seulement si Σ rencontre toutes les composantes connexes du bord.

Remarque

Au moins deux conservations montrent que cette condition est nécessaire :

- *La loi de Kelvin, qui prouve que la circulation de vitesse le long d'une courbe de Jordan est conservée lorsqu'on suit le flot,*
- *La vorticité $\omega := \text{rot}\, u$ suit également le flot (dans le cas 2D).*

Théorème (G.)

Le résultat précédent est valable en trois dimensions d'espace.

Problème de contrôlabilité approchée

- Lorsque la contrôlabilité exacte n'a pas lieu, on peut se poser le problèmes de contrôlabilité approchée pour la norme $\|\cdot\|_X$ sur l'espace des états :

  Étant donnés deux états possibles du système u_0 et u_1, un temps $T > 0$ et $\varepsilon > 0$, peut-on trouver un contrôle tel que la solution correspondante du sysème partant de u_0 au temps $t = 0$ satisfasse au temps $t = T$:

$$\|u(T, \cdot) - u_1\|_X \leq \varepsilon \text{ ?}$$

- Formulation alternative : étant donnés u_0, u_1 et T, peut-on trouver une solution du système sous-déterminé avec la contrainte au bord :

$$u.n = 0 \text{ sur } [0, T] \times (\partial\Omega \setminus \Sigma),$$

  et amenant u_0 à un état au temps T satisfaisant la condition précédente ?

Résultats de contrôlabilité approchée

Théorème (Coron)

Si Σ *est non vide (mais ne rencontre pas toutes les composantes connexes du bord), le système est approximativement contrôlable pour la norme* $L^p(\Omega)$, $p < \infty$.

Remarque

Les mêmes conservation que précédemment (circulation de vitesse, répartition de vorticité) montrent qu'en général le résultat est faux si $p = +\infty$.

Résultats de contrôlabilité approchée

Théorème (G.)

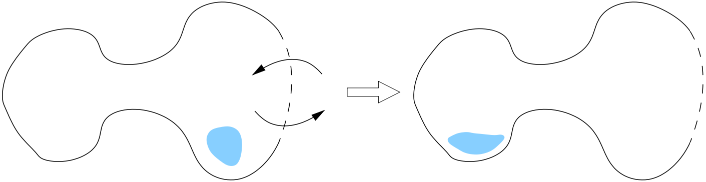
Si de plus u_0 *et* u_1 *ont même circulation sur les composantes du bord non contrôlée, alors la contrôlabilité approchée a lieu dans* $W^{1,p}$*,* $p < \infty$*. Si de surcroît il existe des difféomoprhismes de ces composantes menant la répartition de vorticité de* u_0 *sur celle de* u_1*, elle a lieu dans* $W^{2,p}$*,* $p < \infty$*.*

Remarques

- *Même dans ce cas, la contrôlabilité approchée dans* $W^{2,\infty}$ *n'a pas lieu.*
- *Le cas tridimensionnel est ouvert quand* Σ *ne rencontre pas toutes les composantes connexes du bord.*

Un autre type de contrôlabilité

- Un autre type de contrôlabilité est naturel pour des équations fluides : est-il possible de déplacer une zone de fluide d'un endroit à un autre en employant le contrôle ? (D'après une suggestion de J.-P. Puel)



- On peut par exemple penser à une zone de fluide polluée, que l'on souhaite déplacer à une zone de traitement.
- Si on souhaite maîtriser la zone de fluide durant tout son parcours, il est naturel de demander à ce que celui-ci ait entièrement lieu dans le domaine.
- Cf. Horsin dans le cas de l'équation de Burgers.

Première définition

- Par incompressibilité du fluide, la zone de départ et la zone cible doivent avoir la même aire.
- Il n'y a pas ici d'obstruction topologique.
- Dans la suite, on s'intéressera à des zones données par l'intérieur (dans Ω) de courbes de Jordan régulières (C^∞).

Définition

On dira qu'il y a contrôlabilité lagrangienne exacte, si étant données deux courbes de Jordan régulières γ_0, γ_1 dans Ω, encerclant la même aire, un temps $T > 0$, une donnée initiale u_0, on peut trouver un contrôle tel que le flot du champ de vitesse mène γ_0 à γ_1, en restant dans le domaine.

Objection

La contrôlabilité lagrangienne exacte n'a pas lieu en général, en effet :

- Prenons rot $u_0 = 0$. Alors si le flot laisse γ_0 dans le domaine, on aura pour tout temps rot $u(t, \cdot) = 0$ au voisinage de 0.
- Comme div $u = 0$, on a que localement autour de γ_0, u est le gradient d'une fonction harmonique ; u est donc analytique au voisinage de γ_0.
- Il suit que si γ_0 est analytique, son analyticité est propagée.
- Si on prend γ_1 régulière mais non analytique, la propriété ne peut pas avoir lieu.

Contrôlabilité lagrangienne approchée

Définition

On dira qu'il y a contrôlabilité lagrangienne approchée dans C^k, si étant données deux courbes de Jordan régulières γ_0, γ_1 dans Ω, encerclant la même aire, un temps $T > 0$, une donnée initiale u_0 et un réel $\varepsilon > 0$, on peut trouver un contrôle tel que le flot du champ de vitesse laisse γ_0 dans Ω pour tout temps $t \in [0, T]$ et satisfait, à reparamétrisation près :

$$\|\Phi^u(T, \gamma_0) - \gamma_1\|_{C^k} \leq \varepsilon.$$

Ici, $(t, x) \mapsto \Phi^u(t, x)$ est le flot du champ de vecteurs u.

Résultat principal

Théorème (G.-Horsin)

Soient deux courbes de Jordan régulières γ_0, γ_1 *dans* Ω, *encerclant la même aire. Soit* $k \in \mathbb{N}$. *On considère* $u_0 \in C^\infty(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^2)$ *satisfaisant*

$$div(u_0) = 0 \text{ dans } \Omega \text{ et } u_0.n = 0 \text{ sur } [0, T] \times (\partial\Omega \setminus \Sigma).$$

Quels que soient $T > 0$, $\varepsilon > 0$, *il existe une solution* u *de l'équation d'Euler dans* $C^\infty([0, T] \times \overline{\Omega}; \mathbb{R}^2)$ *avec*

$$u.n = 0 \text{ sur } [0, T] \times (\partial\Omega \setminus \Sigma) \text{ et } u_{|t=0} = u_0 \text{ dans } \Omega,$$

et dont le flot satisfait

$$\forall t \in [0, T],\ \Phi^u(t, \gamma_0) \subset \Omega,$$

et à reparamétrisation près

$$\|\gamma_1 - \Phi^u(T, \gamma_0)\|_{C^k} \leq \varepsilon.$$

Un résultat connexe : les poches de tourbillon

Théorème (Yudovich, 1961)

Pour tout $u_0 \in C^0(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^2)$ *tel que* $u_0.n = 0$ *sur* Ω *et rot* $u_0 \in L^\infty$*, il existe une unique solution (faible) globale à l'équation d'Euler partant de* u_0 *et satisfaisant* $u.n = 0$ *sur le bord.*

Un cas particulier de donnée initiale à vorticité L^∞ est celui des poches de tourbillon.

Définition

Une solution « poche de tourbillon » est une solution de l'équation d'Euler dont la donnée initiale est la fonction caractéristique de l'intérieur d'une courbe de Jordan régulière (au moins $C^{1,\alpha}$*).*

Théorème (Chemin, 1993)

Dans $\mathbb{R}^2$, la régularité du bord de la courbe est propagée globalement en temps.

Cf. aussi Bertozzi-Constantin, Danchin, Depauw, Dutrifoy, Gamblin & Saint-Raymond, Hmidi, Serfati, Sueur,...

Question : peut-on contrôler la forme d'une poche de tourbillon située dans un domaine borné, par un contrôle frontière ?

Contrôle de la forme d'une poche de tourbillon

Théorème (G.-Horsin)

Soient deux courbes de Jordan régulières γ_0, γ_1 dans Ω, encerclant la même aire. Soit $u_0 \in \mathcal{L}ip(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^2)$ avec $u_0.n \in C^\infty(\partial\Omega)$ une poche de tourbillon correspondant à γ_0, i.e.

$$\begin{cases} rot\,(u_0) = \mathbf{1}_{Int(\gamma_0)} \text{ dans } \Omega, \\ div\,(u_0) = 0 \text{ dans } \Omega, \\ u_0.n = 0 \text{ sur } \partial\Omega \setminus \Sigma. \end{cases}$$

Pour tout $T > 0$, tout $k \in \mathbb{N}$, tout $\varepsilon > 0$, il existe $u \in L^\infty([0,T]; \mathcal{L}ip(\overline{\Omega}))$ solution de l'équation d'Euler telle que

$$rot\ u = 0 \text{ sur } [0,T] \times \Sigma,$$
$$u.n = 0 \text{ sur } [0,T] \times (\partial\Omega \setminus \Sigma) \text{ et } u_{|t=0} = u_0 \text{ dans } \Omega,$$

que $\Phi^u(T, 0, \gamma_0)$ ne sorte pas du domaine et qu'à reparamétrisation près on ait

$$\|\gamma_1 - \Phi^u(T, 0, \gamma_0)\|_{C^k} \leq \varepsilon.$$

Remarques

- Tant que la poche reste régulière, on a seulement $u(t,\cdot) \in \mathcal{L}ip(\Omega)$.
- Sans la régularité de la poche $u(t,\cdot)$ est seulement log-Lipschitz :

$$|u(t,x) - u(t,y)| \lesssim |x-y| \log(e + |x-y|).$$

II. Éléments de preuve

Flots potentiels

- Quel que soit $\theta(t,x)$ harmonique en x pour tout t,

$$v(t,x) := \nabla_x \theta(t,x) \text{ est solution de l'équation d'Euler avec}$$
$$p(t,x) = -(\theta_t + |\nabla\theta|^2/2).$$

- Il s'agit des flots potentiels classiques en mécanique des fluides

- La construction de flot potentiels bien choisis est aussi au cœur de la preuve de la contrôlabilité exacte de l'équation.

- À noter qu'en dimension 2, l'outil complexe est très utile pour construire de tels flots dans la mesure où

$$f \text{ satisfait les équations de Cauchy-Riemann} \iff \operatorname{rot} Vf = \operatorname{div} Vf = 0,$$

où $Vf := (\operatorname{Re} f, -\operatorname{Im} f)$.

Proposition principale

Proposition

Soient deux courbes de Jordan régulières γ_0, γ_1 *dans* Ω, *encerclant la même aire. Quels que soient* $k \in \mathbb{N}$, $T > 0$, $\varepsilon > 0$, *il existe* $\theta \in C_0^\infty([0,1]; C^\infty(\overline{\Omega}; \mathbb{R}))$ *tel que*

$$\Delta_x \theta(t, \cdot) = 0 \textit{ in } \Omega, \; \textit{pour tout } t \in [0,1],$$
$$\frac{\partial \theta}{\partial n} = 0 \textit{ sur } [0,1] \times (\partial\Omega \setminus \Sigma),$$

et dont le flot satisfait

$$\forall t \in [0,1], \; \Phi^{\nabla\theta}(t, 0, \gamma_0) \subset \Omega,$$

et à reparamétrisation près

$$\|\gamma_1 - \Phi^{\nabla\theta}(T, 0, \gamma_0)\|_{C^k} \leq \varepsilon.$$

Idées de preuve de la proposition principale

- Il s'agit de trouver un flot potentiel menant (de manière approchée dans C^k) γ_0 à γ_1 et respectant la condition aux limites sur $\partial\Omega \setminus \Sigma$.

- Cela se prouve en deux parties :

  - Partie 1 : trouver un champ de vecteurs à divergence nulle menant γ_0 à γ_1.

  - Partie 2 : approcher à chaque instant sur la courbe le champ de vecteurs précédent, par le gradient d'une fonction harmonique défini sur tout Ω et satisfaisant la contrainte.

Partie 1

Proposition

Soient γ_0 *et* γ_1 *deux courbes de Jordan de classe* C^∞ *incluses dans* Ω*. Si* γ_0 *et* γ_1 *satisfont*

$$|Int(\gamma_0)| = |Int(\gamma_1)|,$$

alors il existe $v \in C_0^\infty((0,1) \times \Omega; \mathbb{R}^2)$ *tel que*

$$div\ v = 0 \text{ dans } (0,1) \times \Omega,$$

$$\Phi^v(1, 0, \gamma_0) = \gamma_1.$$

Une preuve pour la partie 1

- Le cas où $\mathrm{Int}(\gamma_0)$ et $\mathrm{Int}(\gamma_1)$ ne s'intersectent pas pourrait être traité relativement simplement.
- Mais une façon de traîter le cas général est de se ramener au cas opposé :

  $$\mathrm{Int}(\gamma_0) \cap \mathrm{Int}(\gamma_1) \neq \emptyset.$$

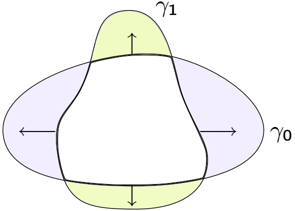
  Il suffit pour cela de trouver un champ v de divergence nulle amenant un point de γ_0 dans $\mathrm{Int}(\gamma_1)$, et de prendre $\Phi^v(1, \gamma_0)$ comme nouvelle courbe initiale.
- Cela n'est pas difficile dans la mesure où tout champ

  $$v(t,x) = \nabla^\perp \psi(t,x) = (-\partial_{x_2}\psi, \partial_{x_1}\psi),$$

  est de divergence nulle.
- Quitte à opérer une petite translation, on peut supposer de plus que γ_0 et γ_1 se coupent transversalement.

Partie 1, suite

- On a (pour simplifier !) une situation du type

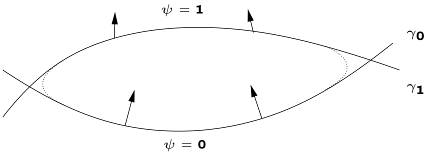


- On travaille uniquement sur la différence symétrique des deux intérieurs.
- Le but est sur chaque composante, de trouver un champ de vecteurs qui amène γ_0 à γ_1 (zone verte) ou γ_1 à γ_0 (zone violette).

Partie 1, suite

- Sur chaque composante de la différence symétrique, on construit un champ de vecteurs amenant l'intervalle γ_0^k de γ_0 sur l'intervalle γ_1^k de γ_1.

- Une façon de construire un tel champ est de considérer $\nabla\psi$ où ψ est l'extension harmonique d'une fonction valant 0 (respectivement 1) sur l'intervalle γ_0^k (resp. sur l'intervalle γ_1^k) et « régularisé aux intersections ».



Partie 1, suite

- Ensuite on normalise ces champs de sorte que par le flot correspondant, pour $t \in [0,1]$

$$\mathrm{Aire}(\gamma_0^k, \Phi(t,\gamma_0^k)) = t\mathrm{Aire}(\gamma_0^k, \gamma_1^k). \qquad (*)$$

- Il faut veiller à ce que ces champs de vecteurs se recollent de manière régulière aux points de $\gamma_0 \cap \gamma_1$.

- Ensuite, on considère le champ restreint à $\{(t, \Phi(t,\gamma_0))\}$ se prolonge en un champ de divergence nulle grâce à (*).

Partie 2

Proposition

Soit γ_0 une courbe de Jordan de classe C^∞ ; soit $X \in C^0([0,1]; C^\infty(\overline{\Omega}))$ un champ de vecteurs régulier et de divergence nulle, avec $X.n = 0$ sur $[0,1] \times \partial\Omega$. Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon > 0$ il existe $\theta \in C^\infty([0,1] \times \overline{\Omega}; \mathbb{R})$ tel que

$$\Delta_x \theta(t, \cdot) = 0 \text{ in } \Omega, \text{ pour tout } t \in [0,1],$$
$$\frac{\partial \theta}{\partial n} = 0 \text{ sur } [0,1] \times (\partial\Omega \setminus \Sigma),$$

et dont le flot satisfait

$$\forall t \in [0,1], \ \Phi^{\nabla\theta}(t, 0, \gamma_0) \subset \Omega,$$

et à reparamétrisation près

$$\|\Phi^X(t, 0, \gamma_0) - \Phi^{\nabla\theta}(t, 0, \gamma_0)\|_{C^k} \leq \varepsilon, \quad \forall t \in [0,1].$$

Une preuve pour la partie 2

- La preuve s'opère en trois étapes successives.

- Première étape : lorsque toutes les données sont analytiques réelles : $\gamma_0 \in C^\omega(\mathbb{S}^1; \mathbb{R}^2)$ et $X \in C^0([0,1]; C^\omega(\overline{\Omega}))$.

- Soit $\gamma(t) := \Phi^X(t, \gamma_0)$, qui pour chaque t est une courbe analytique.

- Dans ce cas, on considère pour chaque temps la solution du problème elliptique suivant :

$$\begin{cases} \Delta_x \psi(t,\cdot) = 0 \text{ dans } \mathrm{Int}(\gamma(t)), \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial n}(t,\cdot) = X(t,\cdot).n(\cdot) \text{ sur } \gamma(t), \\ \displaystyle\int_{\gamma(t)} \psi(t,\cdot)\, d\sigma = 0. \end{cases}$$

Partie 2, suite

- Comme $\gamma(t)$ et $X.n$ sur $\gamma(t)$ sont anaytiques, on peut étendre la solution ψ au-delà du bord $\gamma(t)$ (résultat à la Cauchy-Kowalevski).

- En utilisant la continuité en temps de X et γ à valeurs analytiques, on voit que la taille du voisinage de $\gamma(t)$ où l'on peut prolonger la solution est localement minorée donc minorée.

- Cela permet à l'aide du théorème de Runge d'obtenir des approximations définies sur tout $\overline{\Omega}$, et qui satisfont

$$\nabla\tilde{\psi}(t,\cdot).n = 0 \text{ sur } \partial\Omega \setminus \Sigma.$$

- On obtient alors la fonction θ recherchée sous la forme :

$$\theta(t,x) = \sum_{k=1}^{n} \rho_i(t)\tilde{\psi}(t_i,\cdot),$$

avec ρ_i une certaine partition de l'unité.

Partie 2, suite

- Deuxième étape : lorsque seul le champ de vecteurs est analytique réel : $\gamma_0 \in C^\infty(\mathbb{S}^1; \mathbb{R}^2)$ et $X \in C^0([0,1]; C^\omega(\overline{\Omega}))$.

- On utilise qu'on peut approcher γ_0 (et γ_1) extérieurement par une courbe analytique réelle. Cela provient d'un résultat général de H. Whitney, ou plus simplement dans notre cas :

- On considère C_0 le complémentaire de $\mathrm{Int}(\gamma_0)$ dans la sphère de Riemann. Par théorème de l'application conforme, il existe φ une transformation conforme de C_0 dans $\overline{B}_{\mathbb{C}}(0,1)$.

- Alors par régularité jusqu'au bord de l'application conforme (théorème de Kellogg-Warschawski), la courbe $\varphi(S(0,1-\nu))$ est une approximation convenable.

Partie 2, suite

- Ensuite, on applique le procédé précédent aux approximations γ_0^ν et γ_1^ν de γ_0 et γ_1 obtenues à ν près. On obtient une fonction θ^ν.

- Le point central est de montrer que, sur $\Phi^{\nabla\theta^\nu}(t, \gamma_0)$, on a des estimées uniformes sur $\nabla\theta^\nu$ lorsque $\nu \to 0^+$.

- Cela provient de la construction et du fait que les constantes des estimées elliptiques sont bornées indépendamment de ν.

- On conclut alors par lemme de Gronwall.

Partie 2, suite

- Troisième étape : lorsque les données sont seulement C^∞ : $\gamma_0 \in C^\infty(\mathbb{S}^1; \mathbb{R}^2)$ et $X \in C^0([0,1]; C^\infty(\overline{\Omega}))$.

- On utilise le théorème d'approximation analytique de Whitney : X peut être arbitrairement approché pour la topologie $C^0([0,1]; C^\infty(\overline{\Omega}))$ par $X^\nu \in C^0([0,1]; C^\omega(\overline{\Omega}))$.

- On conclut alors en utilisant l'étape précédente et le lemme de Gronwall.

Obtenir les résultats à partir de la proposition principale

- On suppose la proposition principale établie. Montrons le résultat lorsque $u_0 \in C^\infty$ est non nul.

- On utilise la forme tourbillon de l'équation :

$$\begin{gathered}\partial_t \omega + (u.\nabla)\omega = 0 \text{ dans } [0, T] \times \Omega, \\ \operatorname{div} u = 0 \text{ dans } [0, T] \times \Omega, \\ \operatorname{rot} u = \omega \text{ dans } [0, T] \times \Omega.\end{gathered}$$

- C'est un couplage équation de transport/équation elliptique : on note que $u = \nabla^\perp \psi$ où ψ satisfait

$$\Delta \psi = \omega \text{ dans } [0, T] \times \Omega.$$

Connaissant la proposition principale, suite

- Si on avait $\|u_0\|_{C^{k+1,\alpha}} \ll 1$, alors des arguments standard de perturbation de flot montreraient qu'en utilisant comme contrôle au bord le même que celui de $\nabla\theta$, on aurait

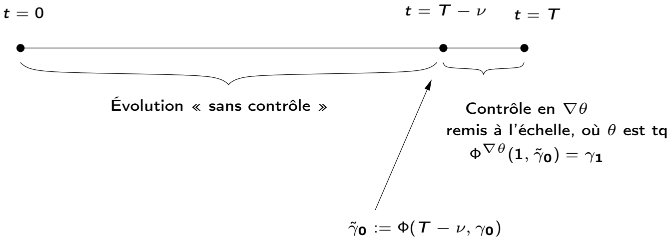
$$\begin{aligned} \|\Phi^u(T,\gamma_0) - \gamma_1\|_{C^k} &\leq \|\Phi^u(T,\gamma_0) - \Phi^{\nabla\theta}(T,\gamma_0)\|_{C^k} \\ &+ \|\Phi^{\nabla\theta}(T,\gamma_0) - \gamma_1\|_{C^k} \\ &\lesssim \|u_0\|_{C^{k+1,\alpha}} + \varepsilon. \end{aligned}$$

- L'idée est alors d'essayer de se ramener à cette situation en utilisant l'invariance par changement d'échelle en temps de l'équation : pour $\lambda > 0$,

$$\begin{aligned} &u(t,x) \text{ est une solution de l'équation définie dans } [0,T]\times\Omega \\ &\Longleftrightarrow u^\lambda(t,x) := \lambda u(\lambda t, x) \text{ est une solution de l'équation} \\ &\qquad\qquad \text{définie dans } [0, T/\lambda]\times\Omega. \end{aligned}$$

Connaissant la proposition principale, suite

- On découpe alors l'intervalle de temps de la manière suivante : pour ν petit :



- Dans un premier temps, on ne « fait rien » (en fait, il faut prendre en compte $u_0.n$)

- Vers la fin de l'intervalle de temps, on agit très rapidement et très fort : avec (essentiellement) le même contrôle que $\frac{1}{\nu}\nabla\theta(t - T + \nu, \cdot)$.

Connaissant la proposition principale, suite

- Soit u la solution obtenue.
- Si on change encore l'échelle en temps pour voir sur un temps 1 ce qui se passe dans le dernier intervalle de temps $[T-\nu, T]$, l'évolution est celle de l'équation d'Euler, avec :
  - Comme condition au bord la même que celle de $\nabla\theta$
  - Comme condition initiale $\nu u(T-\nu,\cdot)$.
- $\Rightarrow$ on récupère de la petitesse de la donnée initiale !
- On montre alors que pour la solution construite sur tout $[0, T]$:

$$\|\Phi^u(T,\gamma_0)-\gamma_1\|_{C^k} \lesssim \nu+\varepsilon.$$

Dans le cas poche de tourbillon

- La construction est similaire, mais on ne peut plus utiliser

$$\|\nu u(T-\nu,\cdot)\|_{C^{k+1,\alpha}} \lesssim \nu,$$

  dans la mesure où u est juste Lipschitz !

- On utilise alors des arguments dûs à :
  - N. Depauw : poches de tourbillon dans un domaine
  - Bertozzi-Constantin : approche du problème des poches de tourbillon par l'équation intégro-différentielle satisfaite par le bord de celles-ci :

$$\frac{d}{dt}\gamma(t,s) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|x-\gamma(\sigma)|\,\tau(\sigma)\,d\sigma$$
$$+ \text{ ici des termes dûs au bord et au contrôle.}$$

Problèmes ouverts

- La dimension trois. Plusieurs problèmes apparaissent :
  - Comment déformer un domaine en un autre ?
  - Comment empêcher une éventuelle explosion des solutions de l'équation ?
- Domaines non simplement connexes. Que peut-on dire si le domaine fluide à déplacer n'est plus l'intérieur d'une courbe de Jordan ?
- Numérique. Peut-on trouver un algorithme efficace de calcul du contrôle ?

Problèmes ouverts

- L'équation de Navier-Stokes. Peut-on obtenir un résultat similaire pour l'équation de Navier-Stokes incompressible ?

$$\begin{cases} \partial_t u + (u.\nabla)u - \Delta u + \nabla p = 0 \text{ dans } [0,T] \times \Omega, \\ \text{div } u = 0 \text{ dans } [0,T] \times \Omega. \end{cases}$$

  Avec par exemple les conditions au bord de glissement de Navier (cf. Coron, Chapouly) ?

- Stabilisation. Peut-on trouver un contrôle sous forme d'un retour d'état :

$$\text{contrôle(t)} = f(\gamma(t), u(t)),$$

  et stabilisant une zone de fluide à un endroit fixé ?