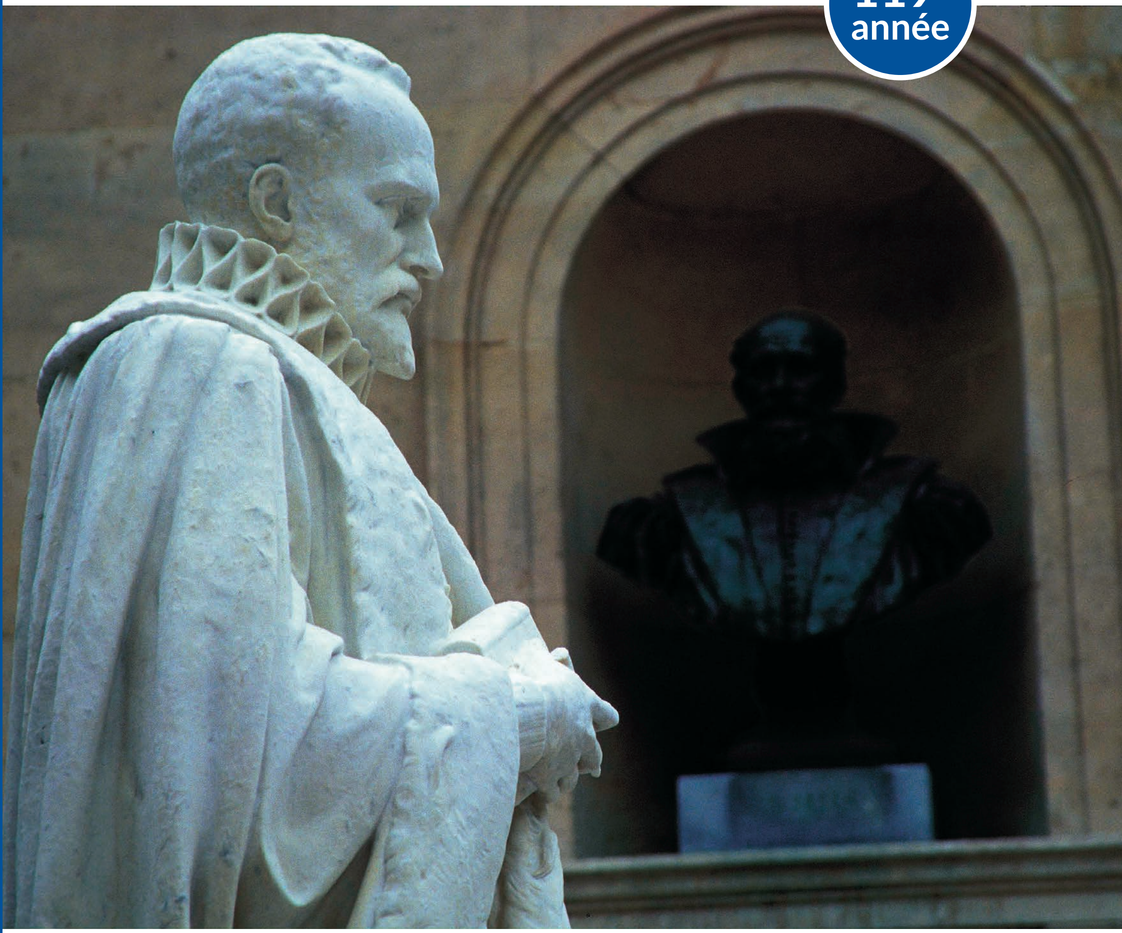
ANNUAIRE du COLLÈGE DE FRANCE 2018 - 2019

Résumé des cours et travaux

119e année



COLLÈGE DE FRANCE
1530

Équations aux dérivées partielles et applications

Pierre-Louis Lions

Membre de l'Institut (Académie des sciences),
professeur au Collège de France

Mots-clés : équations de HJB, théorie des jeux, équations aux dérivées partielles

La série de cours et séminaires « HJB, MFG et les autres » est disponible, en audio et/ou en vidéo, sur le site internet du Collège de France (https://www.college-de-france.fr/site/pierre-louis-lions/course-2018-2019.htm).

Enseignement

Cours – HJB, MFG et les autres

Le cours a eu lieu du 9 novembre 2018 au 18 janvier 2019.

Introduction

Le cours de cette année a porté sur diverses questions relatives aux équations de type Hamilton-Jacobi-Bellman, aux systèmes provenant de la théorie des jeux à champ moyen (MFG en abrégé) et aux équations de type Hamilton-Jacobi stochastique. Les questions mathématiques introduites et étudiées dans le cours ont pour origine des modèles mathématiques en contrôle stochastique et en théorie des jeux à champ moyen utilisés dans des domaines variés (réseaux de télécommunication, économie, science des matériaux...).

Décrivons plus précisément deux exemples des équations étudiées dans le cours. Tout d'abord, la théorie des MFG (entre autres applications) conduit à des équations du type suivant :

P.-L. Lions, « Équations aux dérivées partielles et applications », *Annuaire du Collège de France 2018-2019. Résumé des cours et travaux*, 119e année, Paris, Collège de France, 2022, p. 35-40, https://doi.org/10.4000/annuaire-cdf.16760.

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \varepsilon \Delta u + H(u, \nabla u) = f \quad \forall x \in \mathbb{R}^d, \forall t > 0 \tag{1}$$

où u, f sont des fonctions de $\mathbb{R}^d \times [0, \infty[$ dans $\mathbb{R}$, f est donnée régulière $\varepsilon \geq 0$, H est une fonction régulière donnée de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$, ∇u désigne le gradient de u en x et ∇u, le Laplacien de u en x. Deux exemples importants ont été totalement résolus dans le cours à savoir : i) le cas où $\varepsilon = 0$ et H « croît à l'infini de manière non linéaire » $(H(x,p)/|p| \to +\infty$ si $|p| \to \infty \ldots)$, et ii) le cas où $\varepsilon > 0$ et $H(z, p)$ est linéaire en p pour tout z. Observons que, dans le cas ii), la situation où $\varepsilon = 0$ a été traitée dans les cours des années précédentes. D'autre part, dans le cas i), les équations sont plus « faciles » si $\varepsilon > 0$…

La deuxième classe d'équations étudiée dans le cours concerne les équations de Hamilton-Jacobi stochastiques du type :

$$\frac{\partial u}{\partial 1} = H(\nabla u)\dot{\zeta} \tag{2}$$

pour $x \in \mathbb{R}^d$, $t > 0$. À nouveau, l'inconnue u est à valeurs dans $\mathbb{R}$. La fonction H (appelée Hamiltonien) de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ est supposée (pour simplifier, des cas plus généraux ont été traités dans le cours) convexe, régulière et de dérivée seconde bornée et minorée : $\exists \alpha, \beta > 0$ tels que $\forall p \in \mathbb{R}^d$

$$\alpha t \geq H''(p) \geq \beta I \tag{3}$$

où I est la matrice identité, et les inégalités sont entendues au sens des matrices symétriques. Enfin, toutes les fonctions sont supposées, pour simplifier, être périodiques dans $\mathbb{R}^d$ (de période fixée). La fonction ζ est une fonction continue de $[0, \infty]$ dans $\mathbb{R}$ (normalisée par $\zeta(0) = 0$) et un exemple typique est donné par les trajectoires du mouvement brownien (p.s.) auquel cas $\dot{\zeta}$ est le fameux « bruit blanc ». Lorsque $\zeta \equiv t$, l'équation (2) se réduit aux équations de Hamilton-Jacobi classiques bien comprises grâce à la théorie des solutions de viscosité. Le cas général (ζ continue) relève du projet de recherches (de longue haleine !) mené depuis plusieurs années en collaboration avec Panagiotis E. Souganidis sur les solutions de viscosité stochastiques.

Dans la suite de ce résumé, nous allons indiquer quelques résultats démontrés dans le cours, portant notamment, d'une part, sur des effets régularisants lorsque $\zeta \equiv t$ et sur la question de la régularité intermittente des solutions, et, d'autre part, sur le comportement en temps long des solutions. Dans tout ce qui suit, u_0 est une fonction donnée continue (périodique) sur $\mathbb{R}^d$ et l'équation (3) est complétée par la condition initiale

$$u|_{t_0} = u_0 \ \text{ sur } \ \mathbb{R}^d \tag{4}$$

Effets régularisants et applications

Dans cette section, nous considérons tout d'abord le cas classique où $\zeta(t) \equiv t$ ou $\zeta(t) \equiv -t$. Si $\zeta(t) \equiv t$ (respectivement $-t$), il est bien connu que pour tout $t > 0$, la solution $u(t)$ est bornée semi-convexe (resp. semi-concave) et donc en particulier lipschitzienne vérifie une borne du type

$$D^2u \geq -\frac{c}{t} \tag{5}$$

(resp.

$$D^2u \leq \frac{c}{t}) \tag{6}$$

où C désigne une constante positive indépendante de u_0.

Le résultat qui suit montre qu'il est possible d'obtenir un résultat plus précis. Pour ce faire, on introduit la quantité notée W

$$W = H''(\nabla u)^{1/2} \cdot D^2u \cdot H''(\nabla u)^{1/2} \tag{7}$$

où les racines carrées sont prises au sens des matrices symétriques positives ou nulles. Nous écrivons $W \leq CI$ (resp. $W \geq -CI$) pour dire que, pour tout $|\zeta| = 1, -(W\zeta,\zeta) \geq -C$ (resp. $\leq C$) au sens des solutions de viscosité.

Théorème 1 : *On suppose que $\zeta \equiv t$ (respectivement $\equiv -t$). Alors*

i) on a

$$W \geq -\frac{1}{t}I \quad \text{(respectivement } \leq \frac{1}{t}I) \tag{8}$$

ii) si, de plus, pour $C_0 \geq 0$

$$W_0 \geq -C_0 I \quad \text{(respectivement } \leq C_0 I) \text{ où } W_0 = H''(\nabla u_0)^{1/2}\, D^2U_0\, H''(\nabla u_0)^{1/2} \tag{9}$$

alors

$$W \geq -\frac{C_0}{1+C_0t}I \quad \text{(respectivement } \leq \frac{C_0}{1+C_0t}I) \tag{10}$$

Il est également connu, depuis une observation initialement due à Jean-Michel Lasry et l'auteur, que si $\zeta \equiv t$ et (par exemple) u_0 est semi-concave ($D^2u_0 \leq C_0I$), alors u le reste sur un intervalle $[0, t_0[$ où t_0 ne dépend que de C_0 et de H (en fait $D^2u \leq C_0\beta \,/\, (\alpha - tC_0\alpha\beta)$ si $t < t_0 = (C_0\alpha\beta)^{-1}$) et donc u est la classe $C^{1,1}$ sur $]0, t_0]$. Un résultat plus précis, utilisant la fonction auxiliaire W, est possible sous certaines conditions optimales.

Théorème 2 : *On suppose que $\zeta \equiv t$ (respectivement $\zeta \equiv -t$) et que u_0 vérifie pour $C_0 \geq 0$*

$$W_0 \leq C_0 I \quad \text{(respectivement } W \geq -C_0 I) \tag{11}$$

Alors on a

$$W \leq \frac{C_0}{1-C_0t}I \quad \text{(respectivement } W \geq \frac{-C_0}{1-C_0t})I \tag{12}$$

si $d = 1$, ou si H est quadratique, ou si $u_0 \in C^1$.
Enfin si $d > 2$ (12) *est vrai pour tout u_0 vérifiant* (11) *si et seulement si H est quadratique.*

Rappelons qu'un travail récent de Paul Gassiat et Benjamin Gess dans le cas où $H = \frac{1}{2}|p|^2$(ou H quadratique...) montre que ces bornes, avec une procédure de simplification trajectorielle introduite par P.E. Souganidis et l'auteur, impliquent la fonction suivante pour une solution u de (2) :

$$-(\zeta(t) - \min_{0 \leq s \leq t} \zeta(s))^{-1}\, I \leq D^2 u \leq (\max_{0 \leq s \leq t} \zeta(s) - \zeta(t))^{-1}\, I \tag{13}$$

En particulier, u est de classe $C^{1,1}$ pour tous les temps t où ζ est strictement compris entre $\min\limits_{0 \leq s \leq t} \zeta(s)$ et $\max\limits_{0 \leq s \leq t} \zeta(s)$. Et ceci est le cas pour presque tout t, presque sûrement lorsque ζ est un mouvement brownien. On déduit des théorèmes 1 et 2 ci-dessus que ce résultat est vrai pour tout Hamiltonien H si $d = 1$, en remplaçant bien sûr D^2u par W, mais que cette extension n'est valable si $d \geq 2$ que dans le cas où H est quadratique, et dans ce cas uniquement !

Comportement en temps long

Nous considérons une solution de (2) où $\zeta \in C([0, \infty[, \mathbb{R})$ et où H est convexe, continue et vérifie $H(0) = 0$.

Théorème 3 : *On suppose que*

$$H(p) > H(0) = 0 \ , \ \forall p \neq 0 \tag{14}$$

et que $\lim\limits_{t \to +\infty} \zeta(t) = +\infty$ *ou que* $\lim\limits_{t \to +\infty} \zeta(t) = -\infty$.
Alors, u converge, uniformément en x, vers une constante.

On en déduit aisément, grâce aux propriétés bien connues du mouvement brownien, que dans le cas précisément où ζ est un mouvement brownien, le théorème s'applique (p.s.). Dans ce cas, presque sûrement u converge uniformément en x, vers une variable aléatoire réelle (« constante aléatoire ») u^{∞}. Hormis quelques cas particuliers, peu d'informations sont connues sur cette variable aléatoire qui, en général, n'est pas triviale (*i.e.* constante).

Séminaire de mathématiques appliquées

Le séminaire a eu lieu du 9 novembre 2018 au 21 juin 2019 :

• 9 novembre 2018 : Pierre-Louis Lions (Collège de France), « Une vision mathématique du “Deep Learning” » ;

• 16 novembre 2018 : Ping Zhang (Academy of Mathematics and Systems Science, Beijing), « Striated Regularity of 2-D Inhomogeneous Incompressible Navier-Stokes System with Variable Viscosity » ;

• 23 novembre 2018 : Pierre-Louis Lions (Collège de France), « Mini-cours d'Annalisa Buffa (à Jussieu !) » ;

• 30 novembre 2018 : Martin Vohralik (Inria, Paris), « Estimations d'erreur a priori et a posteriori localisées sous régularité minimale » ;

• 7 décembre 2018 : Aurélien Alfonsi (Cermics, ENPC, Marne-la-Vallée), « Approximation de mesures de probabilité dans l'ordre convexe par projections pour la distance de Wasserstein » ;

• 14 décembre 2018 : Anne-Laure Dalibard (Laboratoire J.-L. Lions, UPMC), « Réflexion quasi-critique d'ondes internes dans un fluide stratifié » ;
• 11 janvier 2019 : Ayman Moussa (Laboratoire J.-L. Lions, UPMC), « Systèmes à diffusion croisée : solutions faibles et dérivation » ;
• 18 janvier 2019 : Frédéric Marbach (ENS, Rennes), « Contrôle de fluides visqueux et couches limites » ;
• 25 janvier 2019 : Jean-François Babadjian (université Paris-Sud), « Conditions aux limites dissipatives et solutions entropiques en plasticité parfaite » ;
• 8 février 2019 : Isabelle Tristani (DMA, ENS, CNRS), « De Boltzmann à Navier-Stokes : convergence de solutions fortes dans le cas mal préparé »
• 15 février 2019 : Anne-Sophie de Suzzoni (CMLS, École Polytechnique), « L'équation de Dirac sur des variétés à symétrie sphérique » ;
• 15 mars 2019 : Cécile Huneau (CMLS, École Polytechnique), « Limite haute-fréquence pour les équations d'Einstein » ;
• 22 mars 2019 : Pierre Cardaliaguet (Ceremade, université Paris-Dauphine), « Jeux à champ moyen avec un joueur majeur » ;
• 29 mars 2019 : Jean Dolbeault (Ceremade, université Paris-Dauphine), « Champs magnétiques, interpolation et symétrie » ;
• 5 avril 2019 : Pierre-André Zitt (LAMA, université Paris-Est, Marne-la-Vallée), « Processus auto-répulsifs et métadynamique » ;
• 12 avril 2019 : Eitan Tadmor (CSCAMM, University of Maryland), « Emergent Behavior in Self-Organized Dynamics » ;
• 19 avril 2019 : Benjamin Gess (MPI MIS, Leipzig et University of Bielefeld), « Optimal Regularity for the Porous Medium Equation » ;
• 10 mai 2019 : Arnaud Guyader (LPSM, UPMC-Sorbonne Université), « Simulation et estimation d'événements rares » ;
• 17 mai 2019 : Jaime San Martin (CMM, Universidad de Chile), « Powers of Green Potentials » ;
• 7 juin 2019 : Stéphane Mischler (Ceremade, université Paris-Dauphine), « Autour de la théorie de Harris-Meyn-Tweedie sur les semi-groupes de Markov » ;
• 14 juin 2019 : Raphaël Danchin (LAMA, université Paris-Est, Créteil Val-de-Marne), « Solutions à densité peu régulière et avec vide pour des modèles de la mécanique des fluides » ;
• 21 juin 2019 : Paul Gassiat (Ceremade, université Paris-Dauphine), « Formules asymptotiques pour les modèles à volatilité stochastique rugueuse ».

Recherche

Missions, invitations, conférences

• 27 juin 2018 : conférence au congrès en l'honneur des 70 ans de Jean-Michel Lasry, université Paris-Dauphine, Paris ;
• 10 septembre 2018 : conférence au congrès en l'honneur des 60 ans de Sylvie Méléard, IHP, Paris ;
• 2-11 octobre 2018 : série de trois exposés à l'université de Chicago, Chicago, USA ;
• 12 novembre 2018 : conférence au congrès « IAS conference celebrating France-Hong Kong scientific cooperation », City University of Hong Kong, Hong Kong ;

• 18 décembre 2018 : conférence au Colloque « Mean Field Games », université Paris Diderot, Paris ;
• 20-23 janvier 2019 : conférence au « Global Young Scientists Summit » (conférence, atelier, rencontre avec des lycéens de nombreux pays...), Singapour ;
• 29 janvier-7 février 2019 : série de trois exposés à l'université de Chicago, Chicago, USA ;
• 12 mars-21 mars 2019 : série de trois exposés à l'université de Chicago, Chicago, USA ;
• 16 mars 2019 : conférence au Congrès en l'honneur des 70 ans de Andy Majda, Courant Institute, New York, USA ;
• 25 mars 2019 : conférence au Congrès en l'honneur des 60 ans de Jean-Yves Chemin, IHP, Paris ;
• 24 mai 2019 : conférence au Congrès « Regards croisés sur les sciences des organisations et de la décision », université Paris-Dauphine, Paris ;
• 5 juin 2019 : conférence inaugurale du trimestre intensif INDAM, université de Naples, Naples, Italie ;
• 1er juillet 2019 : conférence au « Huawei Vision Forum », Versailles ;
• 8 juillet 2019 : conférence aux journées FDD Fime, EDF R&D, Palaiseau ;
• 9 juillet 2019 : conférence au Colloque « Quelques mathématiques autour d'Alessio Figalli », École Polytechnique, Palaiseau.

Publications

LIONS P.-L. (en collab. avec J.-M. LASRY), « Mean-field games with a major player », *Comptes Rendus Mathématique*, vol. 356, nº 8, 2018, p. 886-890, https://doi.org/10.1016/j.crma.2018.06.001.

LIONS P.-L. (en collab. avec P.E. SOUGANIDIS), « Scalar conservation laws: Initial and boundary value problems revisited and saturated solutions », *Comptes Rendus Mathématique*, vol. 356, nºs 11-12, 2018, p. 1167-1178, https://doi.org/10.1016/j.crma.2018.09.010.

LIONS P.-L. (en collab. avec P. GASSIAT, B. GESS et P.E. SOUGANIDIS), « Speed of propagation for stochastic Hamilton-Jacobi equations with multiplicative rough time dependence and convex Hamiltonians », *Probability Theory and Related Fields*, vol. 176, 2020, p. 421-448, https://doi.org/10.1007/s00440-019-00921-5 [hal-01936387 ; arXiv: 1805.08477].

LIONS P.-L. (en collab. avec P.E. SOUGANIDIS), « The asymptotics of stochastically perturbed reaction-diffusion equations and front propagation », *Comptes Rendus Mathématique*, vol. 358, nº 8, 2020, p. 931-938, https://doi.org/10.5802/crmath.117 [arXiv: 1909.05673].

LIONS P.-L. (en collab. avec P.E. SOUGANIDIS), « Homogenization of the backward-forward system in Mean Field Games in periodic environments », *European Mathematical Society*, vol. 31, nº 4, p. 733-755, https://doi.org/10.4171/RLM/912 [arXiv: 1909.01250].

LIONS P.-L. (en collab. avec P.E. SOUGANIDIS), « New regularity results and long time behavior of pathwise (stochastic) Hamilton-Jacobi equations », *Research in the Mathematical Sciences*, vol. 7, 17, 2020, https://doi.org/10.1007/s40687-020-00214-7.

LIONS P.-L. (en collab. avec C. LE BRIS), *Parabolic Equations with Irregular Data and Related Issues: Applications to Stochastic Differential Equations*, Berlin/Boston, De Gruyter, coll. « De Gruyter Series in Applied and Numerical Mathematics », vol. 4, https://doi.org/10.1515/9783110635508.

LIONS P.-L. (en collab. avec P. CARDALIAGUET, F. DELARUE et J-M. LASRY), *The Master Equation and the Convergence Problem in Mean Field Games*, Princeton/Oxford, Princeton University Press, coll. « Annals of Mathematics Studies », vol. 201, 2019.