

*Étude de l'interaction entre
une particule ponctuelle et un fluide de Burgers*

Nicolas Seguin

LJLL, UPMC-Paris 6

Collège de France, 9 décembre 2011

En collaboration avec **B. Andreianov**, **F. Lagoutière** et **T. Takahashi**

Plan de l'exposé

- 1 Motivations et modèles
- 2 Étapes intermédiaires
- 3 Résultats principaux
- 4 Particule figée
- 5 Particule avec une trajectoire imposée
- 6 Équation différentielle de la particule
- 7 Modèle d'interaction complet

Plan de l'exposé

- 1 Motivations et modèles
- 2 Étapes intermédiaires
- 3 Résultats principaux
- 4 Particule figée
- 5 Particule avec une trajectoire imposée
- 6 Équation différentielle de la particule
- 7 Modèle d'interaction complet

Motivations

Modèles d'interaction fluide-structure ou fluide-particule

En général : Modèles visqueux (Navier-Stokes...) pour le fluide

Que faire dans le cas de grands nombres de Reynolds ?...

Paradoxe de D'Alembert (1749)

Un solide immergé dans une fluide *non visqueux* n'est soumis à aucune force résultante

Par conséquent, les oiseaux (entre autres) ne peuvent pas voler si la viscosité est négligée dans le modèle considéré...

Ici : Modèles *non visqueux* (Euler, Burgers...) pour le fluide
et prise en compte de la viscosité évanouie par une *force de traînée*

La *force de traînée* apparaît comme un terme source contenant la différence entre la vitesse du fluide et la vitesse de la particule

+ Compréhension de l'interaction *onde de choc/particule*

Motivations

Modèles d'interaction fluide-structure ou fluide-particule

En général : Modèles visqueux (Navier-Stokes...) pour le fluide

Que faire dans le cas de grands nombres de Reynolds ?...

Paradoxe de D'Alembert (1749)

Un solide immergé dans une fluide *non visqueux* n'est soumis à aucune force résultante

Par conséquent, les oiseaux (entre autres) ne peuvent pas voler si la viscosité est négligée dans le modèle considéré...

Ici : Modèles *non visqueux* (Euler, Burgers...) pour le fluide et prise en compte de la viscosité évanouie par une *force de traînée*

La *force de traînée* apparaît comme un terme source contenant la différence entre la vitesse du fluide et la vitesse de la particule

+ Compréhension de l'interaction *onde de choc/particule*

Motivations

Modèles d'interaction fluide-structure ou fluide-particule

En général : Modèles visqueux (Navier-Stokes...) pour le fluide

Que faire dans le cas de grands nombres de Reynolds ?...

Paradoxe de D'Alembert (1749)

Un solide immergé dans une fluide *non visqueux* n'est soumis à aucune force résultante

Par conséquent, les oiseaux (entre autres) ne peuvent pas voler si la viscosité est négligée dans le modèle considéré...

Ici : Modèles *non visqueux* (Euler, Burgers...) pour le fluide et prise en compte de la viscosité évanouie par une *force de traînée*

La *force de traînée* apparaît comme un terme source contenant la différence entre la vitesse du fluide et la vitesse de la particule

+ Compréhension de l'interaction *onde de choc/particule*

Modèle basé sur les équations d'Euler

Équations d'Euler pour le fluide
 N particules ponctuelles

(ρ : masse volumique, \mathbf{u} : vitesse)
 (\mathbf{h}_k : position, m_k : masse)

- **Équations d'Euler** partout sauf au niveau des particules ($\mathbf{x} \neq \mathbf{h}_k$)
- **Particules ponctuelles** localisées par des **mesures de Dirac** $\delta_0(\mathbf{x} - \mathbf{h}_k)$
- Mouvement des particules donné par la **deuxième loi de Newton** :
 Accélération = Force de traînée (fonction de $(\mathbf{u} - \mathbf{h}'_k)$)
- **Conservation de la quantité de mouvement totale**

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \rho \mathbf{u} \, d\mathbf{x} + \sum_{k=1}^N m_k \mathbf{h}'_k \right) = 0$$

Modèle basé sur les équations d'Euler

Équations d'Euler pour le fluide
 N particules ponctuelles

(ρ : masse volumique, \mathbf{u} : vitesse)
 (\mathbf{h}_k : position, m_k : masse)

Équations du fluide : $t > 0$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \\ \partial_t (\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + \rho(\rho) \mathbf{I}) = - \sum_k \lambda_k D(\mathbf{u} - \mathbf{h}'(t)) \delta_0(\mathbf{x} - \mathbf{h}_k(t)) \end{cases}$$

Équation de la particule : $t > 0$, $k = 1, \dots, N$

$$m_k \mathbf{h}_k''(t) = \lambda_k D(\mathbf{u}(t, \mathbf{h}(t)) - \mathbf{h}'(t))$$

λ_k : coefficient de traînée, $D(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ ou $\mathbf{v}|\mathbf{v}|$: type de traînée

Modèle basé sur l'équation de Burgers

Cas scalaire 1D [Lagoutière, S., Takahashi '08]

Interaction entre un fluide modélisé par l'équation de Burgers
et une **particule ponctuelle**

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) + \partial_x(u(t, x)^2/2) = \lambda D(h'(t) - u(t, x)) \delta_0(x - h(t)), \\ m h''(t) = \lambda D(u(t, h(t)) - h'(t)). \end{cases}$$

- u vitesse du fluide
- h position de la particule
 $\implies h'$ et h'' sont la vitesse et l'accélération de la particule
- $\lambda > 0$ coefficient de traînée et $m > 0$ masse de la particule
- $D(v)$ représente le type de traînée (fonction paire croissante)
 \rightarrow soit $D(v) = v$ (cas linéaire, laminaire...)
 soit $D(v) = v|v|$ (cas quadratique, turbulent...).

Conservation de la quantité de mouvement totale $\int_{\mathbb{R}} u(t, \cdot) + mh'(t)$

Modèle basé sur l'équation de Burgers

Cas scalaire 1D [Lagoutière, S., Takahashi '08]

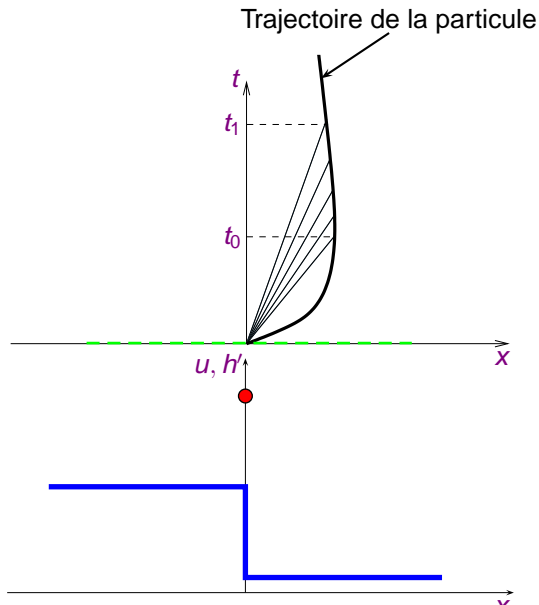
Interaction entre un fluide modélisé par l'équation de Burgers
et une **particule ponctuelle**

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) + \partial_x (u(t, x)^2 / 2) = \lambda D(h'(t) - u(t, x)) \delta_0(x - h(t)), \\ m h''(t) = \lambda D(u(t, h(t)) - h'(t)). \end{cases}$$

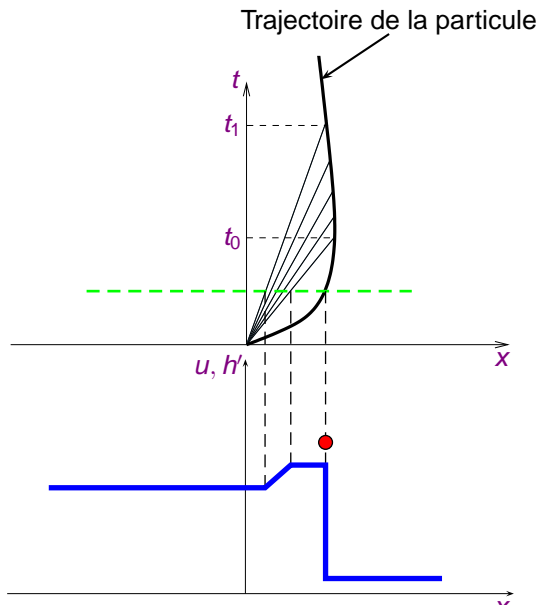
- u vitesse du fluide
- h position de la particule
 $\implies h'$ et h'' sont la vitesse et l'accélération de la particule
- $\lambda > 0$ coefficient de traînée et $m > 0$ masse de la particule
- $D(v)$ représente le type de traînée (fonction paire croissante)
 \rightarrow soit $D(v) = v$ (cas linéaire, laminaire...)
 soit $D(v) = v|v|$ (cas quadratique, turbulent...).

Conservation de la quantité de mouvement totale $\int_{\mathbb{R}} u(t, \cdot) + mh'(t)$

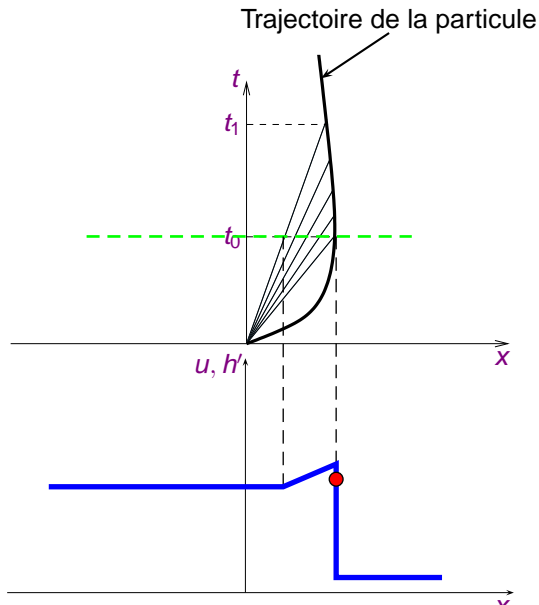
Un exemple de solution avec l'équation de Burgers



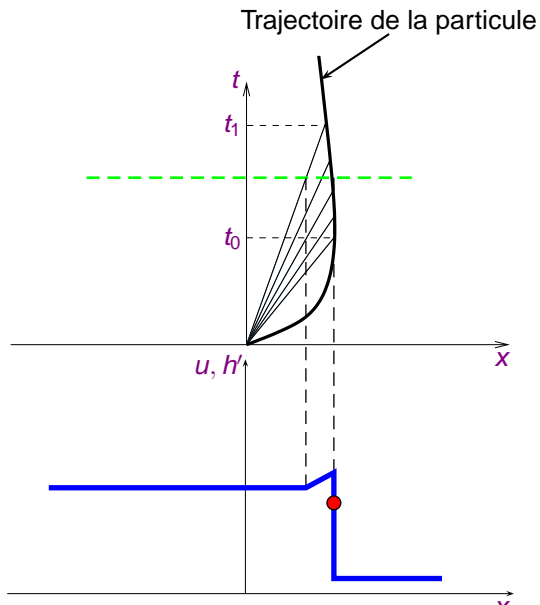
Un exemple de solution avec l'équation de Burgers



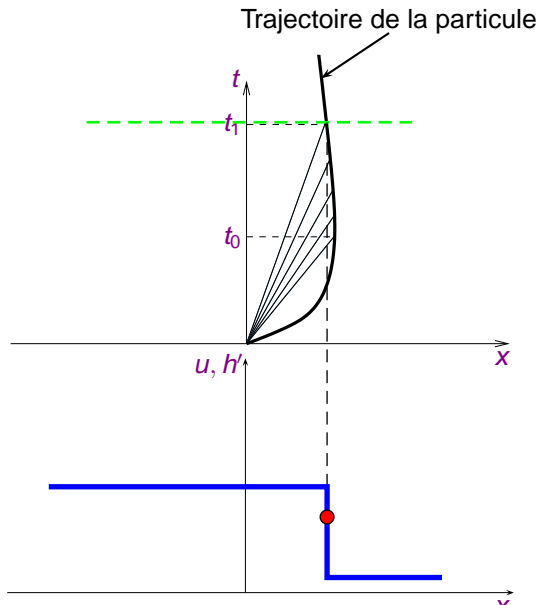
Un exemple de solution avec l'équation de Burgers



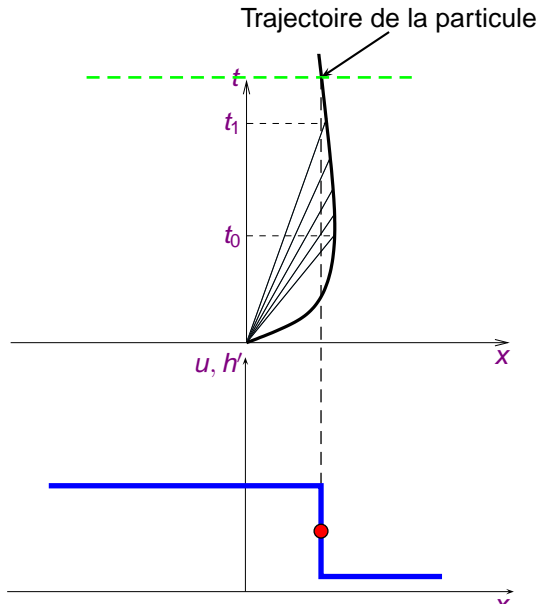
Un exemple de solution avec l'équation de Burgers



Un exemple de solution avec l'équation de Burgers



Un exemple de solution avec l'équation de Burgers



Plan de l'exposé

- 1 Motivations et modèles
- 2 Étapes intermédiaires**
- 3 Résultats principaux
- 4 Particule figée
- 5 Particule avec une trajectoire imposée
- 6 Équation différentielle de la particule
- 7 Modèle d'interaction complet

Étapes intermédiaires pour l'étude du modèle complet

Problème avec une **particule figée** (vitesse constante \equiv nulle)

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) + \partial_x (u^2/2)(t, x) = -\lambda u(t, x) \delta_0(x), & t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

Attention : le terme source n'est pas défini dès lors que u est discontinu en $x = 0$ (et on peut s'y attendre)

Pour **définir le terme source**, on suit les travaux de **LeRoux** :

- $\delta_0 = \partial_x H$ (H : fonction Heaviside)
- $\delta_0 = \partial_x H$ est remplacé par une régularisation $\partial_x H_\varepsilon$, $|x| < \varepsilon$
- on résout le problème régularisé sur $|x| < \varepsilon$
- étude de la limite $\varepsilon \rightarrow 0$

Étude du caractère **bien posé** de ce modèle **résonnant**
+ **estimations** suffisantes pour passer au cas $h = h(t)$ donné

Étapes intermédiaires pour l'étude du modèle complet

Problème avec une **particule figée** (vitesse constante \equiv nulle)

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) + \partial_x (u^2/2)(t, x) = -\lambda u(t, x) \delta_0(x), & t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

Attention : le terme source n'est pas défini dès lors que u est discontinu en $x = 0$ (et on peut s'y attendre)

Pour **définir le terme source**, on suit les travaux de **LeRoux** :

- $\delta_0 = \partial_x H$ (H : fonction Heaviside)
- $\delta_0 = \partial_x H$ est remplacé par une régularisation $\partial_x H_\varepsilon$, $|x| < \varepsilon$
- on résout le problème régularisé sur $|x| < \varepsilon$
- étude de la limite $\varepsilon \rightarrow 0$

Étude du caractère **bien posé** de ce modèle **résonnant**
+ **estimations** suffisantes pour passer au cas $h = h(t)$ donné

Étapes intermédiaires pour l'étude du modèle complet

Problème avec une **particule figée** (vitesse constante \equiv nulle)

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) + \partial_x (u^2/2)(t, x) = -\lambda u(t, x) \delta_0(x), & t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

Attention : le terme source n'est pas défini dès lors que u est discontinu en $x = 0$ (et on peut s'y attendre)

Pour **définir le terme source**, on suit les travaux de **LeRoux** :

- $\delta_0 = \partial_x H$ (H : fonction Heaviside)
- $\delta_0 = \partial_x H$ est remplacé par une régularisation $\partial_x H_\varepsilon$, $|x| < \varepsilon$
- on résout le problème régularisé sur $|x| < \varepsilon$
- étude de la limite $\varepsilon \rightarrow 0$

Étude du caractère **bien posé** de ce modèle **résonnant**
+ **estimations** suffisantes pour passer au cas $h = h(t)$ donné

Étapes intermédiaires pour l'étude du modèle complet

Équation différentielle de la particule

$$mh''(t) = \lambda (u(t, h(t)) - h'(t)).$$

Attention : la fonction u est **discontinue** en $x = h(t)$

Quel sens donner à cette équation ? Carathéodory ? Filippov ? ?...

Utilisation de la **conservation de la QDM totale** $\int_{\mathbb{R}} u(t, \cdot) + mh'(t) !$

L'équation différentielle est écrite sous forme faible, en incluant les valeurs de $u(t, \cdot)$ au voisinage de $x = h(t)$

Une fois ces étapes terminées, on peut

- proposer une **définition** de solution du modèle complet
- en déduire un résultat d'**unicité**
- obtenir par ailleurs des estimations a priori
- montrer l'**existence** par une méthode de splitting en temps
- construire des **méthodes numériques** convergentes

Étapes intermédiaires pour l'étude du modèle complet

Équation différentielle de la particule

$$mh''(t) = \lambda (u(t, h(t)) - h'(t)).$$

Attention : la fonction u est **discontinue** en $x = h(t)$

Quel sens donner à cette équation ? Carathéodory ? Filippov ? ?...

Utilisation de la **conservation de la QDM totale** $\int_{\mathbb{R}} u(t, \cdot) + mh'(t)$!

L'équation différentielle est écrite sous forme faible, en incluant les valeurs de $u(t, \cdot)$ au voisinage de $x = h(t)$

Une fois ces étapes terminées, on peut

- proposer une **définition** de solution du modèle complet
- en déduire un résultat d'**unicité**
- obtenir par ailleurs des estimations a priori
- montrer l'**existence** par une méthode de splitting en temps
- construire des **méthodes numériques** convergentes

Étapes intermédiaires pour l'étude du modèle complet

Équation différentielle de la particule

$$mh''(t) = \lambda (u(t, h(t)) - h'(t)).$$

Attention : la fonction u est **discontinue** en $x = h(t)$

Quel sens donner à cette équation ? Carathéodory ? Filippov ? ?...

Utilisation de la **conservation de la QDM totale** $\int_{\mathbb{R}} u(t, \cdot) + mh'(t)$!

L'équation différentielle est écrite sous forme faible, en incluant les valeurs de $u(t, \cdot)$ au voisinage de $x = h(t)$

Une fois ces étapes terminées, on peut

- proposer une **définition** de solution du modèle complet
- en déduire un résultat d'**unicité**
- obtenir par ailleurs des estimations a priori
- montrer l'**existence** par une méthode de splitting en temps
- construire des **méthodes numériques** convergentes

Plan de l'exposé

- 1 Motivations et modèles
- 2 Étapes intermédiaires
- 3 Résultats principaux**
- 4 Particule figée
- 5 Particule avec une trajectoire imposée
- 6 Équation différentielle de la particule
- 7 Modèle d'interaction complet

Le problème à particule figée est bien posé

Problème à particule figée

équation de Burgers || équation de Burgers
couplage en $x = 0$

Entropies adaptées [Baiti, Jenssen '97] [Audusse, Perthame '05]
revues et généralisées dans [Andreianov, Karlsen, Risebro '11]

- Définitions équivalentes de solutions entropiques
- Unicité et dépendance continue dans L^1_{loc} à la Kruzhkov

De plus

- Estimations a priori L^∞ (classiques) et BV (moins classiques)
- Construction de schémas numériques équilibrés
- Convergence de ces schémas et existence

Généralisation des résultats de Gosse *et al.* (cas non résonnant) et de [Isaacson, Temple '95] (cas résonnant régulier)

Le problème à particule figée est bien posé

Problème à particule figée

équation de Burgers || équation de Burgers
couplage en $x = 0$

Entropies adaptées [Baiti, Jenssen '97] [Audusse, Perthame '05]
revues et généralisées dans [Andreianov, Karlsen, Risebro '11]

- **Définitions équivalentes** de solutions entropiques
- **Unicité et dépendance continue** dans L^1_{loc} à la Kruzhkov

De plus

- **Estimations a priori** L^∞ (classiques) et BV (moins classiques)
- Construction de **schémas numériques équilibrés**
- **Convergence** de ces schémas et **existence**

Généralisation des résultats de *Gosse et al.* (cas non résonnant) et de [Isaacson, Temple '95] (cas résonnant régulier)

Le problème à particule figée est bien posé

Problème à particule figée

équation de Burgers || équation de Burgers
couplage en $x = 0$

Entropies adaptées [Baiti, Jenssen '97] [Audusse, Perthame '05]
revues et généralisées dans [Andreianov, Karlsen, Risebro '11]

- **Définitions équivalentes** de solutions entropiques
- **Unicité et dépendance continue** dans L^1_{loc} à la Kruzhkov

De plus

- **Estimations a priori** L^∞ (classiques) et BV (moins classiques)
- Construction de **schémas numériques équilibrés**
- **Convergence** de ces schémas et **existence**

Généralisation des résultats de *Gosse et al.* (cas non résonnant) et de [Isaacson, Temple '95] (cas résonnant régulier)

Le problème à particule figée est bien posé

Problème à particule figée

équation de Burgers \parallel équation de Burgers
couplage en $x = 0$

Entropies adaptées [Baiti, Jenssen '97] [Audusse, Perthame '05]
revues et généralisées dans [Andreianov, Karlsen, Risebro '11]

- **Définitions équivalentes** de solutions entropiques
- **Unicité et dépendance continue** dans L^1_{loc} à la Kruzhkov

De plus

- **Estimations a priori** L^∞ (classiques) et BV (moins classiques)
- Construction de **schémas numériques équilibrés**
- **Convergence** de ces schémas et **existence**

Généralisation des résultats de *Gosse et al.* (cas non résonnant) et de [Isaacson, Temple '95] (cas résonnant régulier)

Prise en compte de la particule et le problème complet

Dans le cas d'une particule avec une trajectoire imposée :

- Cas vitesse nulle \iff cas vitesse constante
- h approchée par des trajectoires continues et affines par morceaux
- extension directe du cas à vitesse figée
- passage à la limite \rightarrow **existence et unicité**

Pour le problème de Cauchy associé au modèle complet :

- Existence pour $u_0 \in L^\infty$
- Existence, unicité et dépendance continue pour $u_0 \in BV$
- Schéma équilibre + projection de la particule à la Glimm

Prise en compte de la particule et le problème complet

Dans le cas d'une particule avec une trajectoire imposée :

- Cas vitesse nulle \iff cas vitesse constante
- h approchée par des trajectoires continues et affines par morceaux
- extension directe du cas à vitesse figée
- passage à la limite \rightarrow **existence et unicité**

Pour le problème de Cauchy associé au modèle complet :

- **Existence** pour $u_0 \in L^\infty$
- **Existence, unicité et dépendance continue** pour $u_0 \in BV$
- **Schéma équilibre + projection** de la particule à la **Glimm**

Plan de l'exposé

- 1 Motivations et modèles
- 2 Étapes intermédiaires
- 3 Résultats principaux
- 4 Particule figée**
- 5 Particule avec une trajectoire imposée
- 6 Équation différentielle de la particule
- 7 Modèle d'interaction complet

Particule figée, structure du modèle

Modèle :

$$\partial_t u + \partial_x(u^2/2) = -\lambda u \delta_0(x)$$

Modèle avec fonction d'Heaviside :

$$\partial_t u + \partial_x(u^2/2) + \lambda u \partial_x w = 0$$

$$\partial_t w = 0$$

$$w(0, x) = H(x)$$

Matrice de convection :

$$\begin{pmatrix} u & \lambda u \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Système hyperbolique diagonalisable seulement si $u = 0$

Résonance : superposition d'un champ vraiment non linéaire et d'un champ linéairement dégénéré

Système **non conservatif**

Particule figée, structure du modèle

Modèle :

$$\partial_t u + \partial_x (u^2/2) = -\lambda u \delta_0(x)$$

Modèle avec fonction d'Heaviside :

$$\partial_t u + \partial_x (u^2/2) + \lambda u \partial_x w = 0$$

$$\partial_t w = 0$$

$$w(0, x) = H(x)$$

Matrice de convection :

$$\begin{pmatrix} u & \lambda u \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Système hyperbolique diagonalisable seulement si $u = 0$

Résonance : superposition d'un champ vraiment non linéaire et d'un champ linéairement dégénéré

Système **non conservatif**

Particule figée, structure du modèle

Modèle :

$$\partial_t u + \partial_x(u^2/2) = -\lambda u \delta_0(x)$$

Modèle avec fonction d'Heaviside :

$$\partial_t u + \partial_x(u^2/2) + \lambda u \partial_x w = 0$$

$$\partial_t w = 0$$

$$w(0, x) = H(x)$$

Matrice de convection :

$$\begin{pmatrix} u & \lambda u \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Système hyperbolique diagonalisable seulement si $u = 0$

Résonance : superposition d'un champ vraiment non linéaire et d'un champ linéairement dégénéré

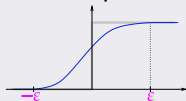
Système **non conservatif**

Particule figée : définition du couplage

Régularisation à la LeRoux de la particule

H est remplacé par $H_\varepsilon \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, fonction **croissante** telle que

$$\forall |x| \geq \varepsilon \quad H_\varepsilon(x) = H(x)$$



Modèle régularisé

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x(u^2/2) + \lambda u \partial_x w = 0 \\ \partial_t w = 0 \\ w(0, x) = H_\varepsilon(x) \end{cases} \implies w(t, x) = H_\varepsilon(x)$$

On cherche des solutions de la forme $U(x) = u(t, x)$

Particule figée : définition du couplage

Trouver tous les $(c_-, c_+) \in \mathbb{R}^2$ tels qu'il existe U vérifiant

$$\begin{cases} (U^2/2)'(x) + \lambda U(x)H'_\varepsilon(x) = 0, & x \in (-\varepsilon, \varepsilon) \\ U(-\varepsilon) = c_- \\ U(\varepsilon) = c_+ \end{cases} \quad (*)$$

au sens **faible entropique** (solutions régulières par morceaux)

- parties régulières : (*) au sens classique
 - Soit $U(x) = 0$
 - Soit $U(x) + \lambda H_\varepsilon(x) = \text{Cst}$
- ondes de choc en x_0 : $(U(x_0^-) + U(x_0^+))/2 = 0$ et $U(x_0^-) > U(x_0^+)$

Notion de **germe** issue de [Andreianov, Karlsen, Risebro '11] :
Le germe \mathcal{G}_λ est l'ensemble des (c_-, c_+)

Particule figée : définition du couplage

Trouver tous les $(c_-, c_+) \in \mathbb{R}^2$ tels qu'il existe U vérifiant

$$\begin{cases} (U^2/2)'(x) + \lambda U(x)H'_\varepsilon(x) = 0, & x \in (-\varepsilon, \varepsilon) \\ U(-\varepsilon) = c_- \\ U(\varepsilon) = c_+ \end{cases} \quad (*)$$

au sens **faible entropique** (solutions régulières par morceaux)

- parties régulières : (*) au sens classique

Soit $U(x) = 0$

Soit $U(x) + \lambda H_\varepsilon(x) = \text{Cst}$

- ondes de choc en x_0 : $(U(x_0^-) + U(x_0^+))/2 = 0$ et $U(x_0^-) > U(x_0^+)$

Notion de **germe** issue de [Andreianov, Karlsen, Risebro '11] :

Le germe \mathcal{G}_λ est l'ensemble des (c_-, c_+)

Particule figée : définition du couplage

Trouver tous les $(c_-, c_+) \in \mathbb{R}^2$ tels qu'il existe U vérifiant

$$\begin{cases} (U^2/2)'(x) + \lambda U(x)H'_\varepsilon(x) = 0, & x \in (-\varepsilon, \varepsilon) \\ U(-\varepsilon) = c_- \\ U(\varepsilon) = c_+ \end{cases} \quad (*)$$

au sens **faible entropique** (solutions régulières par morceaux)

- **parties régulières** : (*) au sens classique
 - Soit $U(x) = 0$
 - Soit $U(x) + \lambda H_\varepsilon(x) = \text{Cst}$
- **ondes de choc** en x_0 : $(U(x_0^-) + U(x_0^+))/2 = 0$ et $U(x_0^-) > U(x_0^+)$

Notion de **germe** issue de [Andreianov, Karlsen, Risebro '11] :
Le germe \mathcal{G}_λ est l'ensemble des (c_-, c_+)

Particule figée : définition du couplage

Trouver tous les $(c_-, c_+) \in \mathbb{R}^2$ tels qu'il existe U vérifiant

$$\begin{cases} (U^2/2)'(x) + \lambda U(x)H'_\varepsilon(x) = 0, & x \in (-\varepsilon, \varepsilon) \\ U(-\varepsilon) = c_- \\ U(\varepsilon) = c_+ \end{cases} \quad (*)$$

au sens **faible entropique** (solutions régulières par morceaux)

- parties régulières : (*) au sens classique
 - Soit $U(x) = 0$
 - Soit $U(x) + \lambda H_\varepsilon(x) = \text{Cst}$
- ondes de choc en x_0 : $(U(x_0^-) + U(x_0^+))/2 = 0$ et $U(x_0^-) > U(x_0^+)$

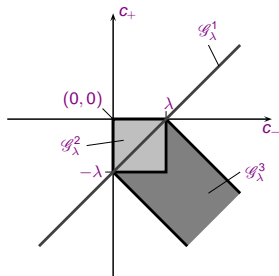
Notion de **germe** issue de [Andreianov, Karlsen, Risebro '11] :

Le germe \mathcal{G}_λ est l'ensemble des (c_-, c_+)

Particule figée : définition du couplage, germe

Germe \mathcal{G}_λ : ensemble des (c_-, c_+) tq il existe U solution faible entropique à

$$\begin{cases} (U^2/2)'(x) + \lambda U(x)H'_\varepsilon(x) = 0 \\ U(-\varepsilon) = c_- \\ U(\varepsilon) = c_+ \end{cases}$$



Définition

Le **germe** $\mathcal{G}_\lambda \subset \mathbb{R}^2$ associé au modèle avec particule figée est l'union

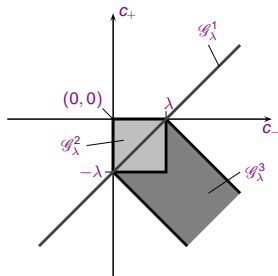
$\mathcal{G}_\lambda = \mathcal{G}_\lambda^1 \cup \mathcal{G}_\lambda^2 \cup \mathcal{G}_\lambda^3$, où

- $\mathcal{G}_\lambda^1 = \{(a, a - \lambda), a \in \mathbb{R}\}$.
- $\mathcal{G}_\lambda^2 = [0, \lambda] \times [-\lambda, 0]$.
- $\mathcal{G}_\lambda^3 = \{(a, b) \in (\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^-) \setminus \mathcal{G}_\lambda^2, -\lambda \leq a + b \leq \lambda\}$.

Particule figée : définition du couplage, germe

Germe \mathcal{G}_λ : ensemble des (c_-, c_+) tq il existe U solution faible entropique à

$$\begin{cases} (U^2/2)'(x) + \lambda U(x)H'_\varepsilon(x) = 0 \\ U(-\varepsilon) = c_- \\ U(\varepsilon) = c_+ \end{cases}$$



Définition

Le **germe** $\mathcal{G}_\lambda \subset \mathbb{R}^2$ associé au **modèle avec particule figée** est l'union

$\mathcal{G}_\lambda = \mathcal{G}_\lambda^1 \cup \mathcal{G}_\lambda^2 \cup \mathcal{G}_\lambda^3$, où

- $\mathcal{G}_\lambda^1 = \{(a, a - \lambda), a \in \mathbb{R}\}$.
- $\mathcal{G}_\lambda^2 = [0, \lambda] \times [-\lambda, 0]$.
- $\mathcal{G}_\lambda^3 = \{(a, b) \in (\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^-) \setminus \mathcal{G}_\lambda^2, -\lambda \leq a + b \leq \lambda\}$.

Particule figée : couplage et définition

Proposition ([Lagoutière, S., Takahashi '08])

Pour tout $H_\varepsilon \in C^1(\mathbb{R})$ tel que $H_\varepsilon(x) = H(x)$ si $|x| > \varepsilon$ et H_ε croissante, il existe une solution U à

$$\begin{cases} (U^2/2)'(x) + \lambda U(x)H'_\varepsilon(x) = 0 \\ U(-\varepsilon) = c_- \\ U(\varepsilon) = c_+ \end{cases}$$

si et seulement si $(c_-, c_+) \in \mathcal{G}_\lambda$.

Définition stable par rapport à la régularisation !

On fait alors l'hypothèse de modélisation suivante :

Les traces $\gamma_- u$ et $\gamma_+ u$ en $\{x = 0\}$ d'une solution u du modèle à particule figée sont **admissibles** si et seulement si $(\gamma_- u, \gamma_+ u) \in \mathcal{G}_\lambda$.

Particule figée : couplage et définition

Proposition ([Lagoutière, S., Takahashi '08])

Pour tout $H_\varepsilon \in C^1(\mathbb{R})$ tel que $H_\varepsilon(x) = H(x)$ si $|x| > \varepsilon$ et H_ε croissante, il existe une solution U à

$$\begin{cases} (U^2/2)'(x) + \lambda U(x)H'_\varepsilon(x) = 0 \\ U(-\varepsilon) = c_- \\ U(\varepsilon) = c_+ \end{cases}$$

si et seulement si $(c_-, c_+) \in \mathcal{G}_\lambda$.

Définition stable par rapport à la régularisation !

On fait alors l'hypothèse de modélisation suivante :

Les traces $\gamma_- u$ et $\gamma_+ u$ en $\{x = 0\}$ d'une solution u du modèle à particule figée sont **admissibles** si et seulement si $(\gamma_- u, \gamma_+ u) \in \mathcal{G}_\lambda$.

Particule figée : couplage et définition

On en déduit que **toute fonction c** telle que

$$c(t, x) = c_- \mathbb{1}_{\{x < 0\}} + c_+ \mathbb{1}_{\{x > 0\}} = \begin{cases} c_- & \text{si } x < 0, \\ c_+ & \text{si } x > 0, \end{cases} \quad (c_-, c_+) \in \mathcal{G}_\lambda$$

est une **solution stationnaire** du modèle à particule figée

Kruzhkov : dissipation par rapport aux solutions stationnaires triviales
 → Entropies de Kruzhkov adaptées $|u - c(x)|$

Définition (Solution entropique)

Soit $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$. Une fonction $u \in L^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ est une **solution entropique du modèle à particule figée** si pour toute fonction c définie ci-dessus (avec $(c_-, c_+) \in \mathcal{G}_\lambda$) on a $\forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$, $\varphi \geq 0$

$$\int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}} [|u - c(x)| \partial_t \varphi + \Phi(u, c(x)) \partial_x \varphi] dx dt + \int_{\mathbb{R}} |u_0 - c(x)| \varphi(0, x) dx \geq 0.$$

Particule figée : couplage et définition

On en déduit que **toute fonction c** telle que

$$c(t, x) = c_- \mathbb{1}_{\{x < 0\}} + c_+ \mathbb{1}_{\{x > 0\}} = \begin{cases} c_- & \text{si } x < 0, \\ c_+ & \text{si } x > 0, \end{cases} \quad (c_-, c_+) \in \mathcal{G}_\lambda$$

est une **solution stationnaire** du modèle à particule figée

Kruzhkov : dissipation par rapport aux solutions stationnaires triviales
 → Entropies de Kruzhkov adaptées $|u - c(x)|$

Définition (Solution entropique)

Soit $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$. Une fonction $u \in L^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ est une **solution entropique du modèle à particule figée** si pour toute fonction c définie ci-dessus (avec $(c_-, c_+) \in \mathcal{G}_\lambda$) on a $\forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}), \varphi \geq 0$

$$\int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}} [|u - c(x)| \partial_t \varphi + \Phi(u, c(x)) \partial_x \varphi] dx dt + \int_{\mathbb{R}} |u_0 - c(x)| \varphi(0, x) dx \geq 0.$$

Particule figée : couplage et définition

On en déduit que toute fonction c telle que

$$c(t, x) = c_- \mathbb{1}_{\{x < 0\}} + c_+ \mathbb{1}_{\{x > 0\}} = \begin{cases} c_- & \text{si } x < 0, \\ c_+ & \text{si } x > 0, \end{cases} \quad (c_-, c_+) \in \mathcal{G}_\lambda$$

est une solution stationnaire du modèle à particule figée

Kruzhkov : dissipation par rapport aux solutions stationnaires triviales
 → Entropies de Kruzhkov adaptées $|u - c(x)|$

Définition (Solution entropique)

Soit $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$. Une fonction $u \in L^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ est une solution entropique du modèle à particule figée si pour toute fonction c définie ci-dessus (avec $(c_-, c_+) \in \mathcal{G}_\lambda$) on a $\forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}), \varphi \geq 0$

$$\int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}} [|u - c(x)| \partial_t \varphi + \Phi(u, c(x)) \partial_x \varphi] dx dt + \int_{\mathbb{R}} |u_0 - c(x)| \varphi(0, x) dx \geq 0.$$

Particule figée : unicité

Théorème (Unicité et contraction L^1 [Andreianov, S. '12])

Soit u_0 et v_0 deux données initiales dans $L^\infty(\mathbb{R})$ et soit u et v les solutions entropiques associées. Alors pour tout $R > 0$,

$$\text{ppt } t > 0 \quad \int_R^R |u - v|(t, x) dx \leq \int_{-R-Lt}^{R+Lt} |u_0 - v_0|(x) dx$$

où $L = \max\{\|u\|_\infty, \|v\|_\infty\}$.

Donc *il existe au plus une solution* au problème à particule figée.

Démo.

- Inégalité de type Kato loin de l'interface (dédoublmt de variable)
- Déf. $\iff u$ solution de Burgers pour $x \neq 0$ et $(\gamma_- u, \gamma_+ u) \in \mathcal{G}_\lambda$
- Propriété de dissipation du germe \mathcal{G}_λ

Particule figée : unicité

Théorème (Unicité et contraction L^1 [Andreianov, S. '12])

Soit u_0 et v_0 deux données initiales dans $L^\infty(\mathbb{R})$ et soit u et v les solutions entropiques associées. Alors pour tout $R > 0$,

$$\text{ppt } t > 0 \quad \int_R^R |u - v|(t, x) dx \leq \int_{-R-Lt}^{R+Lt} |u_0 - v_0|(x) dx$$

où $L = \max\{\|u\|_\infty, \|v\|_\infty\}$.

Donc *il existe au plus une solution* au problème à particule figée.

Démo.

- Inégalité de type Kato loin de l'interface (dédoublmt de variable)
- Déf. $\iff u$ solution de Burgers pour $x \neq 0$ et $(\gamma_-, \gamma_+) \in \mathcal{G}_\lambda$
- Propriété de dissipation du germe \mathcal{G}_λ

Particule figée : unicité

Soit $\Xi: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ défini par

$$\Xi((u_-, u_+), (v_-, v_+)) = \Phi(u_-, v_-) - \Phi(u_+, v_+)$$

où Φ est le flux d'entropie de **Kruzhkov**.

$\Xi((u_-, u_+), (v_-, v_+))$ correspond à la contribution de la particule quand on cherche à comparer (à la **Kruzhkov**) deux solutions...

Proposition (Propriétés du germe)

- (i) (*dissipation*) $\forall (u_-, u_+), (v_-, v_+) \in \mathcal{G}_\lambda, \quad \Xi((u_-, u_+), (v_-, v_+)) \geq 0.$
- (ii) (*maximalité*) **Si** un couple $(u_-, u_+) \in \mathbb{R}^2$ vérifie :

$$\forall (v_-, v_+) \in \mathcal{G}_\lambda^1 \cup \mathcal{G}_\lambda^2 \quad \Xi((u_-, u_+), (v_-, v_+)) \geq 0,$$

alors $(u_-, u_+) \in \mathcal{G}_\lambda.$

Particule figée : unicité

Soit $\Xi: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ défini par

$$\Xi((u_-, u_+), (v_-, v_+)) = \Phi(u_-, v_-) - \Phi(u_+, v_+)$$

où Φ est le flux d'entropie de [Kruzhkov](#).

$\Xi((u_-, u_+), (v_-, v_+))$ correspond à la contribution de la particule quand on cherche à comparer (à la [Kruzhkov](#)) deux solutions...

Proposition (Propriétés du germe)

- (i) (*dissipation*) $\forall (u_-, u_+), (v_-, v_+) \in \mathcal{G}_\lambda, \quad \Xi((u_-, u_+), (v_-, v_+)) \geq 0.$
- (ii) (*maximalité*) **Si un couple** $(u_-, u_+) \in \mathbb{R}^2$ **vérifie :**

$$\forall (v_-, v_+) \in \mathcal{G}_\lambda^1 \cup \mathcal{G}_\lambda^2 \quad \Xi((u_-, u_+), (v_-, v_+)) \geq 0,$$

alors $(u_-, u_+) \in \mathcal{G}_\lambda.$

Approximation numérique : schéma volumes finis

Soit $g(\cdot, \cdot)$ un flux numérique classique

- g localement Lipschitzien
- $g(u, u) = u^2/2$ (consistance)
- $g(\nearrow, \searrow)$ (monotonie)

On modifie $g(\cdot, \cdot)$ à l'interface $x = 0$ pour prendre en compte la particule

$$g_{\lambda}^{-}(a, b) = g(a, b + \lambda) \quad \text{et} \quad g_{\lambda}^{+}(a, b) = g(a - \lambda, b).$$

On utilise la définition de \mathcal{G}_{λ}^1 dans ces deux flux...

Schéma numérique volumes finis [Andreianov, S. '12]

$$\begin{aligned} \forall i \neq 0, 1 & \quad u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (g(u_i^n, u_{i+1}^n) - g(u_{i-1}^n, u_i^n)); \\ i = 0 & \quad u_0^{n+1} = u_0^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (g_{\lambda}^{-}(u_0^n, u_1^n) - g(u_{-1}^n, u_0^n)); \\ i = 1 & \quad u_1^{n+1} = u_1^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (g(u_1^n, u_2^n) - g_{\lambda}^{+}(u_0^n, u_1^n)). \end{aligned}$$

Approximation numérique : schéma volumes finis

Soit $g(\cdot, \cdot)$ un flux numérique classique

- g localement Lipschitzien
- $g(u, u) = u^2/2$ (consistance)
- $g(\nearrow, \searrow)$ (monotonie)

On modifie $g(\cdot, \cdot)$ à l'interface $x = 0$ pour prendre en compte la particule

$$g_{\lambda}^{-}(a, b) = g(a, b + \lambda) \quad \text{et} \quad g_{\lambda}^{+}(a, b) = g(a - \lambda, b).$$

On utilise la définition de \mathcal{G}_{λ}^1 dans ces deux flux...

Schéma numérique volumes finis [Andreianov, S. '12]

$$\begin{aligned} \forall i \neq 0, 1 & \quad u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (g(u_i^n, u_{i+1}^n) - g(u_{i-1}^n, u_i^n)); \\ i = 0 & \quad u_0^{n+1} = u_0^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (g_{\lambda}^{-}(u_0^n, u_1^n) - g(u_{-1}^n, u_0^n)); \\ i = 1 & \quad u_1^{n+1} = u_1^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (g(u_1^n, u_2^n) - g_{\lambda}^{+}(u_0^n, u_1^n)). \end{aligned}$$

Approximation numérique : schéma volumes finis

Soit $g(\cdot, \cdot)$ un flux numérique classique

- g localement Lipschitzien
- $g(u, u) = u^2/2$ (consistance)
- $g(\nearrow, \searrow)$ (monotonie)

On modifie $g(\cdot, \cdot)$ à l'interface $x = 0$ pour prendre en compte la particule

$$g_{\lambda}^{-}(a, b) = g(a, b + \lambda) \quad \text{et} \quad g_{\lambda}^{+}(a, b) = g(a - \lambda, b).$$

On utilise la définition de \mathcal{G}_{λ}^1 dans ces deux flux...

Schéma numérique volumes finis [Andreianov, S. '12]

$$\begin{aligned} \forall i \neq 0, 1 & \quad u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (g(u_i^n, u_{i+1}^n) - g(u_{i-1}^n, u_i^n)); \\ i = 0 : & \quad u_0^{n+1} = u_0^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (g_{\lambda}^{-}(u_0^n, u_1^n) - g(u_{-1}^n, u_0^n)); \\ i = 1 : & \quad u_1^{n+1} = u_1^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (g(u_1^n, u_2^n) - g_{\lambda}^{+}(u_0^n, u_1^n)). \end{aligned}$$

Propriétés du schéma numérique

Sous la condition CFL

$$2M\Delta t \leq \Delta x,$$

(M étant la constante de Lipschitz de g ...), alors si on définit H_i par $u_i^{n+1} = H_i(u_{i-1}^n, u_i^n, u_{i+1}^n)$, on obtient $H_i(\nearrow, \nearrow, \nearrow)$.

Lemme (Estimation L^∞)

Sous la condition CFL, le schéma vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}$, $i \in \mathbb{Z}$

$$\min\left\{\operatorname{ess\,inf}_{\mathbb{R}^-} u_0 - \lambda, \operatorname{ess\,inf}_{\mathbb{R}^+} u_0\right\} \leq u_i^n \leq \max\left\{\operatorname{ess\,sup}_{\mathbb{R}^-} u_0, \operatorname{ess\,sup}_{\mathbb{R}^+} u_0 + \lambda\right\}.$$

Proposition (Le schéma est (partiellement) équilibre)

- Le schéma numérique *préserve exactement* toute solution stationnaire $c(\cdot) = c_- \mathbf{1}_{\{x < 0\}} + c_+ \mathbf{1}_{\{x > 0\}}$ dès lors que $(c_-, c_+) \in \mathcal{G}_\lambda^1$
- Le schéma numérique *converge dans* L_{loc}^1 pour toute solution stationnaire $c(\cdot) = c_- \mathbf{1}_{\{x < 0\}} + c_+ \mathbf{1}_{\{x > 0\}}$ dès lors que $(c_-, c_+) \in \mathcal{G}_\lambda^2$

Propriétés du schéma numérique

Sous la condition CFL

$$2M\Delta t \leq \Delta x,$$

(M étant la constante de Lipschitz de g ...), alors si on définit H_i par $u_i^{n+1} = H_i(u_{i-1}^n, u_i^n, u_{i+1}^n)$, on obtient $H_i(\nearrow, \nearrow, \nearrow)$.

Lemme (Estimation L^∞)

Sous la condition CFL, le schéma vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}$, $i \in \mathbb{Z}$

$$\min\{\operatorname{ess\,inf}_{\mathbb{R}^-} u_0 - \lambda, \operatorname{ess\,inf}_{\mathbb{R}^+} u_0\} \leq u_i^n \leq \max\{\operatorname{ess\,sup}_{\mathbb{R}^-} u_0, \operatorname{ess\,sup}_{\mathbb{R}^+} u_0 + \lambda\}.$$

Proposition (Le schéma est (partiellement) équilibre)

- Le schéma numérique *préserve exactement* toute solution stationnaire $c(\cdot) = c_- \mathbb{1}_{\{x < 0\}} + c_+ \mathbb{1}_{\{x > 0\}}$ dès lors que $(c_-, c_+) \in \mathcal{G}_\lambda^1$
- Le schéma numérique *converge dans* L_{loc}^1 pour toute solution stationnaire $c(\cdot) = c_- \mathbb{1}_{\{x < 0\}} + c_+ \mathbb{1}_{\{x > 0\}}$ dès lors que $(c_-, c_+) \in \mathcal{G}_\lambda^2$

Propriétés du schéma numérique

Sous la condition CFL

$$2M\Delta t \leq \Delta x,$$

(M étant la constante de Lipschitz de g ...), alors si on définit H_i par $u_i^{n+1} = H_i(u_{i-1}^n, u_i^n, u_{i+1}^n)$, on obtient $H_i(\nearrow, \nearrow, \nearrow)$.

Lemme (Estimation L^∞)

Sous la condition CFL, le schéma vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}$, $i \in \mathbb{Z}$

$$\min\left\{\operatorname{ess\,inf}_{\mathbb{R}^-} u_0 - \lambda, \operatorname{ess\,inf}_{\mathbb{R}^+} u_0\right\} \leq u_i^n \leq \max\left\{\operatorname{ess\,sup}_{\mathbb{R}^-} u_0, \operatorname{ess\,sup}_{\mathbb{R}^+} u_0 + \lambda\right\}.$$

Proposition (Le schéma est (partiellement) équilibre)

- Le schéma numérique **préserve exactement** toute solution stationnaire $c(\cdot) = c_- \mathbb{1}_{\{x < 0\}} + c_+ \mathbb{1}_{\{x > 0\}}$ dès lors que $(c_-, c_+) \in \mathcal{G}_\lambda^1$
- Le schéma numérique **converge dans** L_{loc}^1 pour toute solution stationnaire $c(\cdot) = c_- \mathbb{1}_{\{x < 0\}} + c_+ \mathbb{1}_{\{x > 0\}}$ dès lors que $(c_-, c_+) \in \mathcal{G}_\lambda^2$

Convergence ; existence de la solution entropique

Théorème ([Andreianov, S. '12])

Soit $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$. Alors, sous la condition CFL, **le schéma numérique converge** $L^1_{loc}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ vers l'unique solution entropique du modèle à particule figée quand $\Delta x \rightarrow 0$.

On en déduit que **le problème de Cauchy associé au modèle à particule figée est bien posé.**

Démo.

- [Bürger, García, Karlsen, Towers '08]
Bornes $L^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ et $BV(\mathbb{R}^+ \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}))$ + extraction diagonale (+ hypothèse technique sur le flux numérique...)
- Inégalités d'entropie discrètes
Caractère équilibre + maximalité du germe
- Passage à la limite à la Lax-Wendroff

Rq. Idem pour $D(u) = u|u|^\alpha$, $\alpha \in [0, 1]$.

Convergence ; existence de la solution entropique

Théorème ([Andreianov, S. '12])

Soit $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$. Alors, sous la condition CFL, **le schéma numérique converge** $L^1_{loc}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ vers l'unique solution entropique du modèle à particule figée quand $\Delta x \rightarrow 0$.

On en déduit que **le problème de Cauchy associé au modèle à particule figée est bien posé.**

Démo.

- [Bürger, García, Karlsen, Towers '08]
Bornes $L^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ et $BV(\mathbb{R}^+ \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}))$ + extraction diagonale (+ hypothèse technique sur le flux numérique...)
- **Inégalités d'entropie discrètes**
Caractère équilibre + maximalité du germe
- **Passage à la limite** à la Lax-Wendroff

Rq. Idem pour $D(u) = u|u|^\alpha$, $\alpha \in [0, 1]$.

Convergence ; existence de la solution entropique

Théorème ([Andreianov, S. '12])

Soit $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$. Alors, sous la condition CFL, **le schéma numérique converge** $L^1_{loc}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ vers l'unique solution entropique du modèle à particule figée quand $\Delta x \rightarrow 0$.

On en déduit que **le problème de Cauchy associé au modèle à particule figée est bien posé.**

Démo.

- [Bürger, García, Karlsen, Towers '08]
Bornes $L^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ et $BV(\mathbb{R}^+ \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}))$ + extraction diagonale (+ hypothèse technique sur le flux numérique...)
- **Inégalités d'entropie discrètes**
Caractère équilibre + maximalité du germe
- **Passage à la limite** à la Lax-Wendroff

Rq. Idem pour $D(u) = u|u|^\alpha$, $\alpha \in [0, 1]$.

Plan de l'exposé

- 1 Motivations et modèles
- 2 Étapes intermédiaires
- 3 Résultats principaux
- 4 Particule figée
- 5 Particule avec une trajectoire imposée**
- 6 Équation différentielle de la particule
- 7 Modèle d'interaction complet

Extension au cas d'une particule de trajectoire imposée

On considère une particule avec une **trajectoire imposée** $h(t)$ et l'équation

$$\partial_t u + \partial_x (u^2/2) = \lambda (h'(t) - u) \delta_0(x - h(t)). \quad (*)$$

Théorème

Soit $h(\cdot) \in C^1$ une trajectoire imposée, il existe une unique solution entropique au problème de Cauchy associé à $(*)$.

Théorème

Soit u et \hat{u} les solutions entropiques de $(*)$ correspondant à la même donnée initiale u_0 mais à **deux trajectoires différentes**, $h(\cdot)$ et $\hat{h}(\cdot)$.

Si on suppose $\hat{u} \in L^\infty(0, T; BV(\mathbb{R}))$, alors ppt $t \in (0, T)$,

$$\|u(t, \cdot) - \hat{u}(t, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq C(\|u\|_\infty, \|\hat{u}\|_\infty, \|\hat{u}\|_{BV}, \lambda) \int_0^t |h'(s) - \hat{h}'(s)| ds.$$

Extension au cas d'une particule de trajectoire imposée

On considère une particule avec une **trajectoire imposée** $h(t)$ et l'équation

$$\partial_t u + \partial_x (u^2/2) = \lambda (h'(t) - u) \delta_0(x - h(t)). \quad (*)$$

Théorème

Soit $h(\cdot) \in C^1$ une trajectoire imposée, **il existe une unique solution entropique** au problème de Cauchy associé à $(*)$.

Théorème

Soit u et \hat{u} les solutions entropiques de $(*)$ correspondant à la même donnée initiale u_0 mais à **deux trajectoires différentes**, $h(\cdot)$ et $\hat{h}(\cdot)$.

Si on suppose $\hat{u} \in L^\infty(0, T; BV(\mathbb{R}))$, alors ppt $t \in (0, T)$,

$$\|u(t, \cdot) - \hat{u}(t, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq C(\|u\|_\infty, \|\hat{u}\|_\infty, \|\hat{u}\|_{BV}, \lambda) \int_0^t |h'(s) - \hat{h}'(s)| ds.$$

Extension au cas d'une particule de trajectoire imposée

On considère une particule avec une **trajectoire imposée** $h(t)$ et l'équation

$$\partial_t u + \partial_x (u^2/2) = \lambda (h'(t) - u) \delta_0(x - h(t)). \quad (*)$$

Théorème

Soit $h(\cdot) \in \mathcal{C}^1$ une trajectoire imposée, *il existe une unique solution entropique au problème de Cauchy associé à (*)*.

Théorème

Soit u et \hat{u} les solutions entropiques de (*) correspondant à la même donnée initiale u_0 mais à **deux trajectoires différentes**, $h(\cdot)$ et $\hat{h}(\cdot)$.
Si on suppose $\hat{u} \in L^\infty(0, T; BV(\mathbb{R}))$, alors ppt $t \in (0, T)$,

$$\|u(t, \cdot) - \hat{u}(t, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq C(\|u\|_\infty, \|\hat{u}\|_\infty, \|\hat{u}\|_{BV}, \lambda) \int_0^t |h'(s) - \hat{h}'(s)| ds.$$

Extension au cas d'une particule de trajectoire imposée

Démos.

- Le **germe** \mathcal{G}_λ devient $(h'(t), h'(t)) + \mathcal{G}_\lambda$.
- **Unicité**, comme précédemment.
- Pour l'**existence** : $h(\cdot)$ est approché par une famille $(h_n)_n$ de trajectoires continues affines par morceaux.
- Pour la **dépendance en h** : changement de variable $y = x - h(t)$
 Deux EDP avec singularité en $y = 0$ et flux différents $u^2/2 - h'(t)u$
 Kuznetsov, Lucier, Bouchut-Perthame, Karlsen-Risebro...
 (+ germes différents mais dépendance Lipschitz en h')

Proposition (Estimations L^∞ et BV)

$$\max\{\|u\|_\infty, \|h'\|_\infty\} \leq \max\{\|u_0\|_\infty, |h'(0)|\}$$

$$\|u(t, \cdot)\|_{BV(\mathbb{R})} \leq \|u_0\|_{BV(\mathbb{R})} + C(\lambda, \|u_0\|_\infty) + 2 \int_0^t |h''(s)| ds$$

Démo. Wave-front tracking (Dafermos, Holden-Risebro, Bressan et al.)

Extension au cas d'une particule de trajectoire imposée

Démos.

- Le **germe** \mathcal{G}_λ devient $(h'(t), h'(t)) + \mathcal{G}_\lambda$.
- **Unicité**, comme précédemment.
- Pour l'**existence** : $h(\cdot)$ est approché par une famille $(h_n)_n$ de trajectoires continues affines par morceaux.
- Pour la **dépendance en h** : changement de variable $y = x - h(t)$
 Deux EDP avec singularité en $y = 0$ et flux différents $u^2/2 - h'(t)u$
 Kuznetsov, Lucier, Bouchut-Perthame, Karlsen-Risebro...
 (+ germes différents mais dépendance Lipschitz en h')

Proposition (Estimations L^∞ et BV)

$$\max\{\|u\|_\infty, \|h'\|_\infty\} \leq \max\{\|u_0\|_\infty, |h'(0)|\}$$

$$\|u(t, \cdot)\|_{BV(\mathbb{R})} \leq \|u_0\|_{BV(\mathbb{R})} + C(\lambda, \|u_0\|_\infty) + 2 \int_0^t |h''(s)| ds$$

Démo. Wave-front tracking (Dafermos, Holden-Risebro, Bressan et al.)

Extension au cas d'une particule de trajectoire imposée

Démos.

- Le **germe** \mathcal{G}_λ devient $(h'(t), h'(t)) + \mathcal{G}_\lambda$.
- **Unicité**, comme précédemment.
- Pour l'**existence** : $h(\cdot)$ est approché par une famille $(h_n)_n$ de trajectoires continues affines par morceaux.
- Pour la **dépendance en h** : changement de variable $y = x - h(t)$
Deux EDP avec singularité en $y = 0$ et flux différents $u^2/2 - h'(t)u$
Kuznetsov, Lucier, Bouchut-Perthame, Karlsen-Risebro...
(+ germes différents mais dépendance Lipschitz en h')

Proposition (Estimations L^∞ et BV)

$$\max\{\|u\|_\infty, \|h'\|_\infty\} \leq \max\{\|u_0\|_\infty, |h'(0)|\}$$

$$\|u(t, \cdot)\|_{BV(\mathbb{R})} \leq \|u_0\|_{BV(\mathbb{R})} + C(\lambda, \|u_0\|_\infty) + 2 \int_0^t |h''(s)| ds$$

Démo. Wave-front tracking (Dafermos, Holden-Risebro, Bressan et al.)

Plan de l'exposé

- 1 Motivations et modèles
- 2 Étapes intermédiaires
- 3 Résultats principaux
- 4 Particule figée
- 5 Particule avec une trajectoire imposée
- 6 Équation différentielle de la particule**
- 7 Modèle d'interaction complet

Équation différentielle de la particule

On utilise la **conservation de la quantité de mouvement totale**

$$\frac{d}{dt} \left[\int_{\mathbb{R}} u(t, x) dx + mh'(t) \right] = 0$$

Deux caractérisations équivalentes de $h \in W^{2,\infty}([0, T])$

La force de traînée correspond exactement à la **perte de conservation** dans l'équation du fluide :

$$m h''(t) = ((u_-)^2/2 - h'(t)u_-) - ((u_+)^2/2 - h'(t)u_+).$$

On écrit la **conservation de la QDM au sens faible** :

$\forall \xi \in \mathcal{D}([0, T]), \forall \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tq $\psi \equiv 1$ sur $\{x \in \mathbb{R} : \exists t \in [0, T] \text{ tq } h(t) = x\}$,

$$-m \int_0^T h'(t) \xi'(t) dt = mh'(0) \xi(0) + \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \left[u \psi \xi_t + \frac{u^2}{2} \xi \psi_x \right] + \int_{\mathbb{R}} u_0 \psi \xi(0).$$

Équation différentielle de la particule

On utilise la **conservation de la quantité de mouvement totale**

$$\frac{d}{dt} \left[\int_{\mathbb{R}} u(t, x) dx + mh'(t) \right] = 0$$

Deux caractérisations équivalentes de $h \in W^{2,\infty}([0, T])$

La force de traînée correspond exactement à la **perte de conservation** dans l'équation du fluide :

$$m h''(t) = ((u_-)^2/2 - h'(t)u_-) - ((u_+)^2/2 - h'(t)u_+).$$

On écrit la **conservation de la QDM au sens faible** :

$\forall \xi \in \mathcal{D}([0, T]), \forall \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tq $\psi \equiv 1$ sur $\{x \in \mathbb{R} : \exists t \in [0, T] \text{ tq } h(t) = x\}$,

$$-m \int_0^T h'(t) \xi'(t) dt = mh'(0) \xi(0) + \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \left[u \psi \xi_t + \frac{u^2}{2} \xi \psi_x \right] + \int_{\mathbb{R}} u_0 \psi \xi(0).$$

Équation différentielle de la particule

On utilise la **conservation de la quantité de mouvement totale**

$$\frac{d}{dt} \left[\int_{\mathbb{R}} u(t, x) dx + mh'(t) \right] = 0$$

Deux caractérisations équivalentes de $h \in W^{2,\infty}([0, T])$

La force de traînée correspond exactement à la **perte de conservation** dans l'équation du fluide :

$$m h''(t) = ((u_-)^2/2 - h'(t)u_-) - ((u_+)^2/2 - h'(t)u_+).$$

On écrit la **conservation de la QDM au sens faible** :

$\forall \xi \in \mathcal{D}([0, T]), \forall \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tq $\psi \equiv 1$ sur $\{x \in \mathbb{R} : \exists t \in [0, T] \text{ tq } h(t) = x\}$,

$$-m \int_0^T h'(t) \xi'(t) dt = mh'(0) \xi(0) + \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \left[u \psi \xi_t + \frac{u^2}{2} \xi \psi_x \right] + \int_{\mathbb{R}} u_0 \psi \xi(0).$$

Particule : dépendance par rapport au fluide

On peut déduire facilement de la formulation « faible »

$$m(h'(t) - h'(0)) = \int_{\mathbb{R}} u(t, \cdot) \psi(x) dx + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} (u(t, x)^2 / 2) \psi'(x) dx + \int_{\mathbb{R}} u_0(x) \psi(x) \xi(0) dx$$

Comparaison de deux trajectoires

Soit $u, \hat{u} \in \mathbf{L}^\infty([0, T] \times \mathbb{R})$ tels que $(u - \hat{u}) \in \mathbf{L}^\infty([0, T]; L^1(\mathbb{R}))$.

Alors les solutions associées $h, \hat{h} \in W^{2,\infty}([0, T])$ de l'équation de la particule vérifient ppt $t \in [0, T]$

$$m |h'(t) - \hat{h}'(t)| \leq C \left[\|u(t, \cdot) - \hat{u}(t, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R})} + \int_0^t \|u(s, \cdot) - \hat{u}(s, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R})} ds \right].$$

Particule : dépendance par rapport au fluide

On peut déduire facilement de la formulation « faible »

$$m(h'(t) - h'(0)) = \int_{\mathbb{R}} u(t, \cdot) \psi(x) dx + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} (u(t, x)^2 / 2) \psi'(x) dx + \int_{\mathbb{R}} u_0(x) \psi(x) \xi(0) dx$$

Comparaison de deux trajectoires

Soit $u, \hat{u} \in \mathbf{L}^\infty([0, T] \times \mathbb{R})$ tels que $(u - \hat{u}) \in \mathbf{L}^\infty([0, T]; L^1(\mathbb{R}))$.

Alors les solutions associées $h, \hat{h} \in W^{2,\infty}([0, T])$ de l'équation de la particule vérifient ppt $t \in [0, T]$

$$m |h'(t) - \hat{h}'(t)| \leq C \left[\|u(t, \cdot) - \hat{u}(t, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R})} + \int_0^t \|u(s, \cdot) - \hat{u}(s, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R})} ds \right].$$

Plan de l'exposé

- 1 Motivations et modèles
- 2 Étapes intermédiaires
- 3 Résultats principaux
- 4 Particule figée
- 5 Particule avec une trajectoire imposée
- 6 Équation différentielle de la particule
- 7 Modèle d'interaction complet**

Problème complet, caractère bien posé

Théorème ([Andreianov, Lagoutière, S., Takahashi])

Pour toute donnée $u_0 \in BV$ et $h(0), h'(0)$,
il existe une unique solution entropique au problème complet.

- **Unicité** : dépendances continues + Gronwall
- **Existence** ($u \in BV$) : splitting en temps
 $t^n \rightarrow t^{n+1/2}$: h fixé, calcul de u
 $t^{n+1/2} \rightarrow t^{n+1}$: u fixé, calcul de h
- Résolution du **problème de Riemann** dans [Lagoutière, S., Takahashi '08]
- **Schéma numérique** : même splitting en temps + schéma équilibre
 SOIT maillage mobile pour suivre la particule
 SOIT projection de la particule sur les interfaces du maillage à la Glimm

Problème complet, caractère bien posé

Théorème ([Andreianov, Lagoutière, S., Takahashi])

Pour toute donnée $u_0 \in BV$ et $h(0), h'(0)$,
il existe une unique solution entropique au problème complet.

- **Unicité** : dépendances continues + Gronwall
- **Existence** ($u \in BV$) : splitting en temps
 - $t^n \rightarrow t^{n+1/2}$: h fixé, calcul de u
 - $t^{n+1/2} \rightarrow t^{n+1}$: u fixé, calcul de h
- Résolution du **problème de Riemann** dans [Lagoutière, S., Takahashi '08]
- **Schéma numérique** : même splitting en temps + schéma équilibre
 - SOIT maillage mobile pour suivre la particule
 - SOIT projection de la particule sur les interfaces du maillage à la Glimm

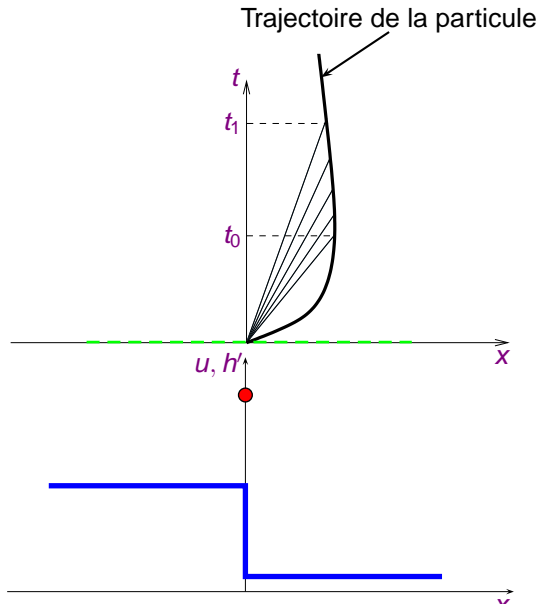
Problème complet, caractère bien posé

Théorème ([Andreianov, Lagoutière, S., Takahashi])

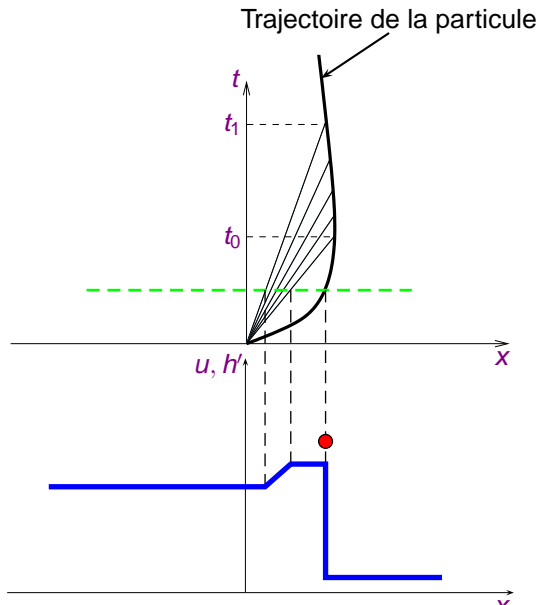
Pour toute donnée $u_0 \in BV$ et $h(0), h'(0)$,
il existe une unique solution entropique au problème complet.

- **Unicité** : dépendances continues + Gronwall
- **Existence** ($u \in BV$) : splitting en temps
 - $t^n \rightarrow t^{n+1/2}$: h fixé, calcul de u
 - $t^{n+1/2} \rightarrow t^{n+1}$: u fixé, calcul de h
- Résolution du **problème de Riemann** dans [Lagoutière, S., Takahashi '08]
- **Schéma numérique** : même splitting en temps + schéma équilibre
 SOIT maillage mobile pour suivre la particule
 SOIT projection de la particule sur les interfaces du maillage à la **Glimm**

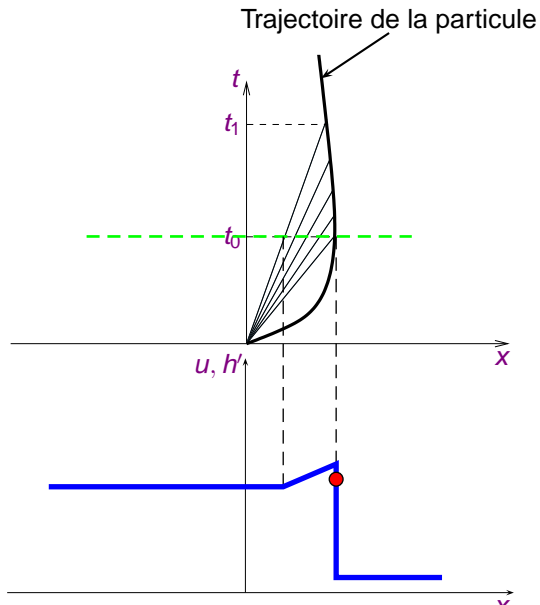
Problème complet, problème de Riemann



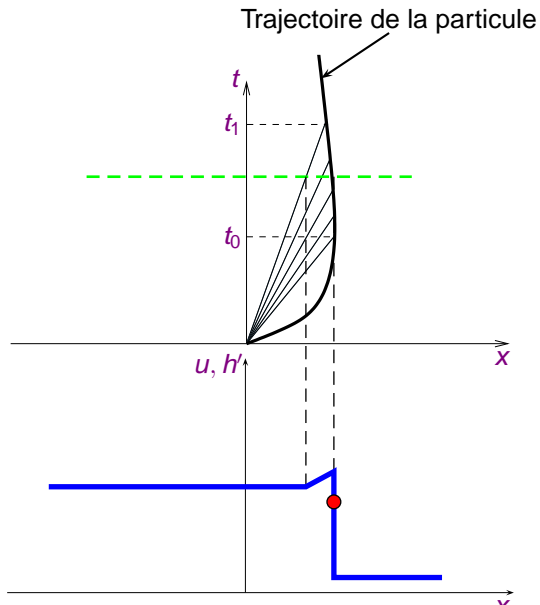
Problème complet, problème de Riemann



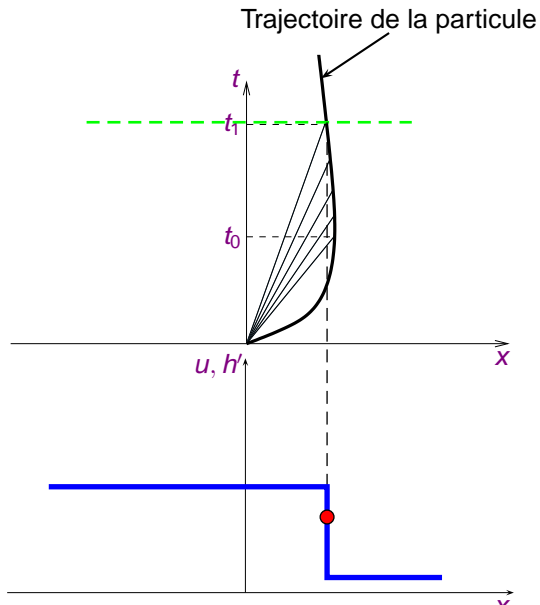
Problème complet, problème de Riemann



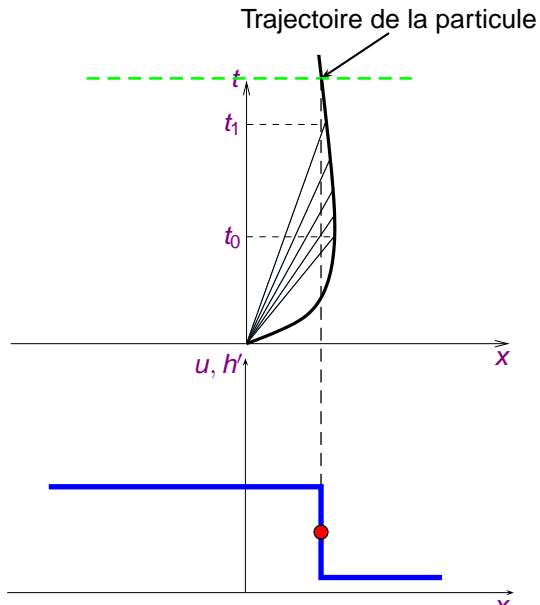
Problème complet, problème de Riemann



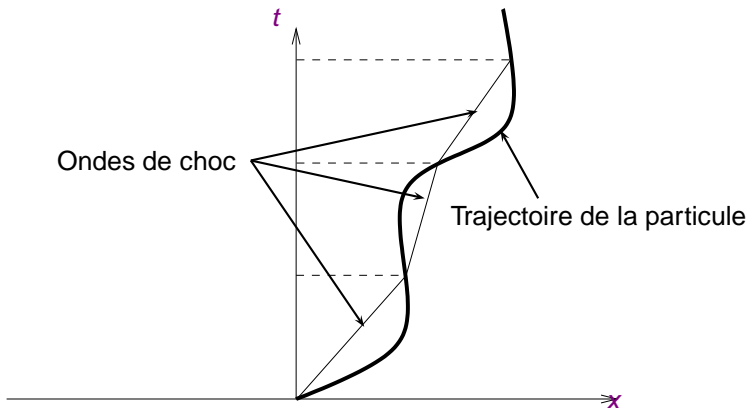
Problème complet, problème de Riemann



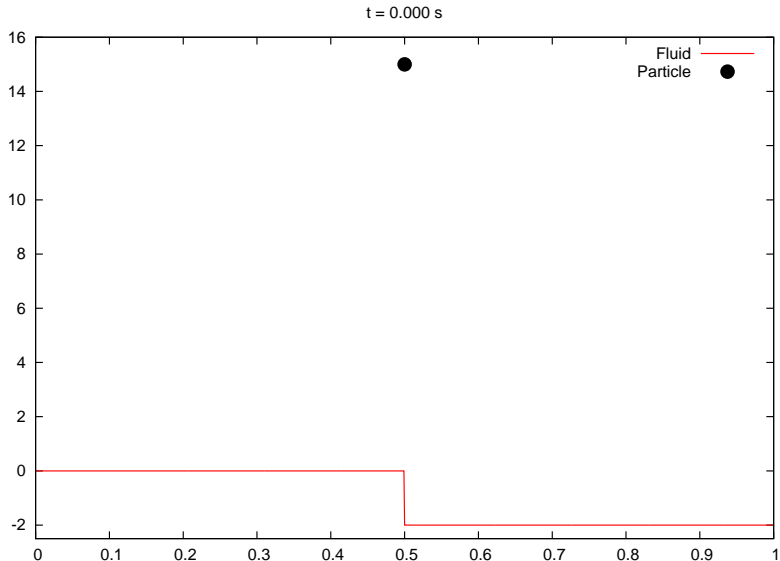
Problème complet, problème de Riemann



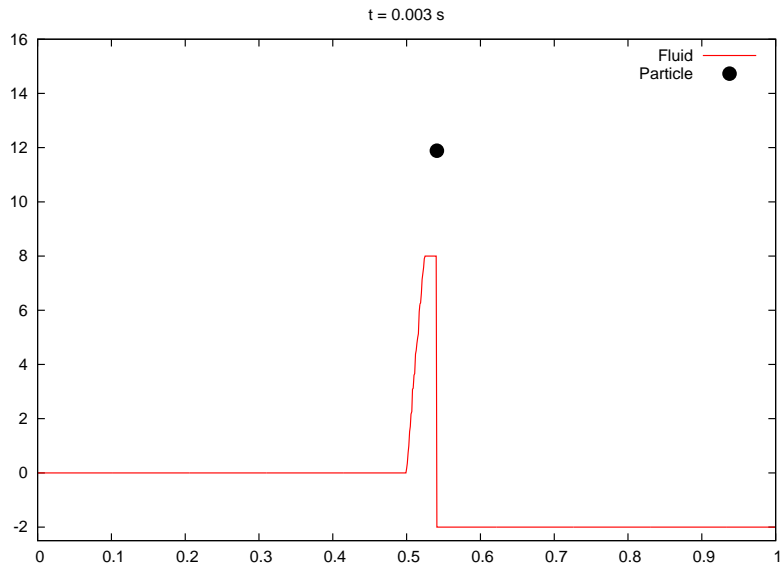
Problème complet, problème de Riemann



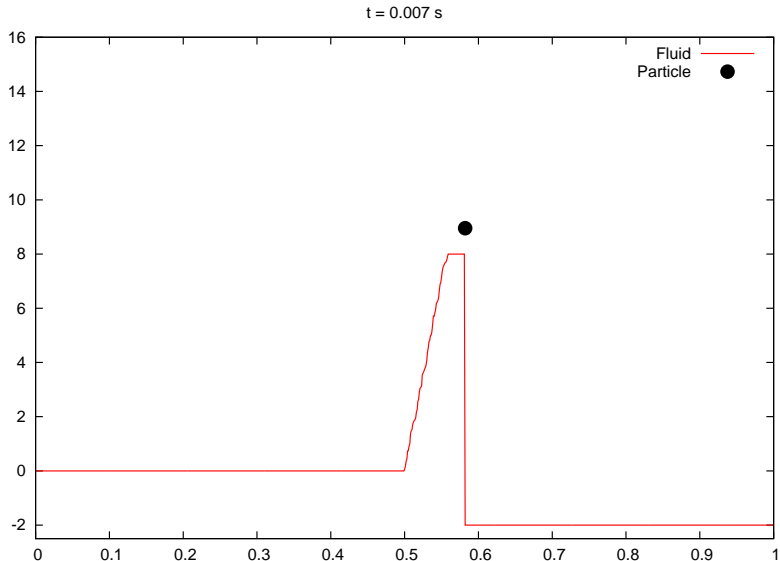
Résultats numériques (avec projection de la particule)



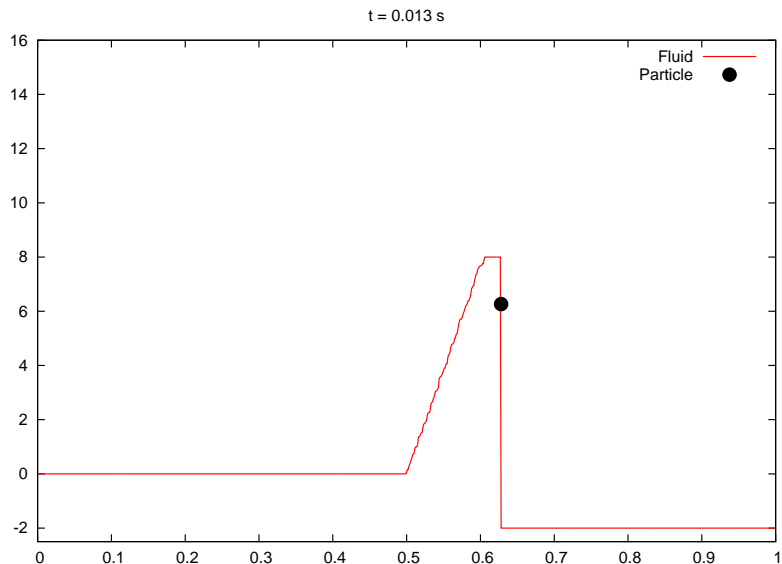
Résultats numériques (avec projection de la particule)



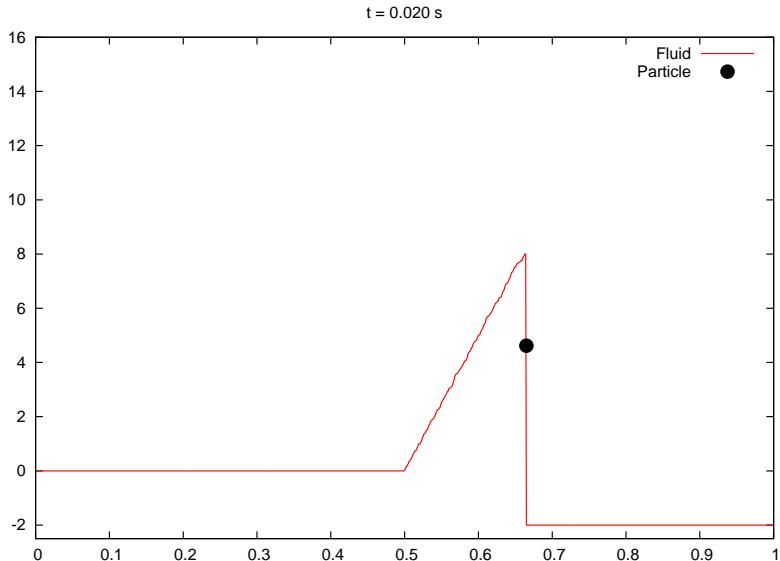
Résultats numériques (avec projection de la particule)



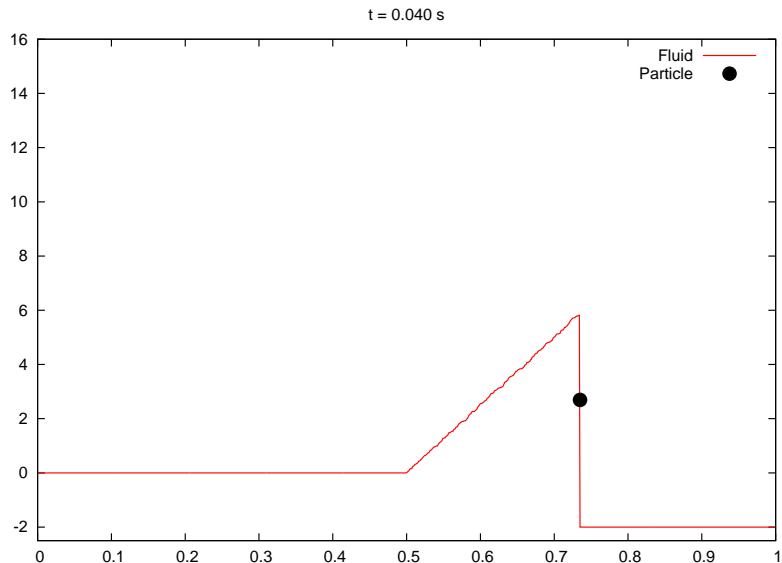
Résultats numériques (avec projection de la particule)



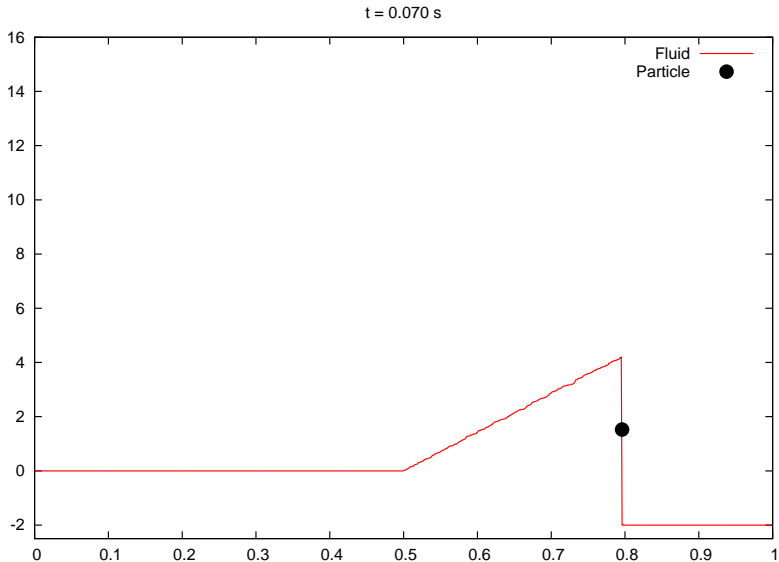
Résultats numériques (avec projection de la particule)



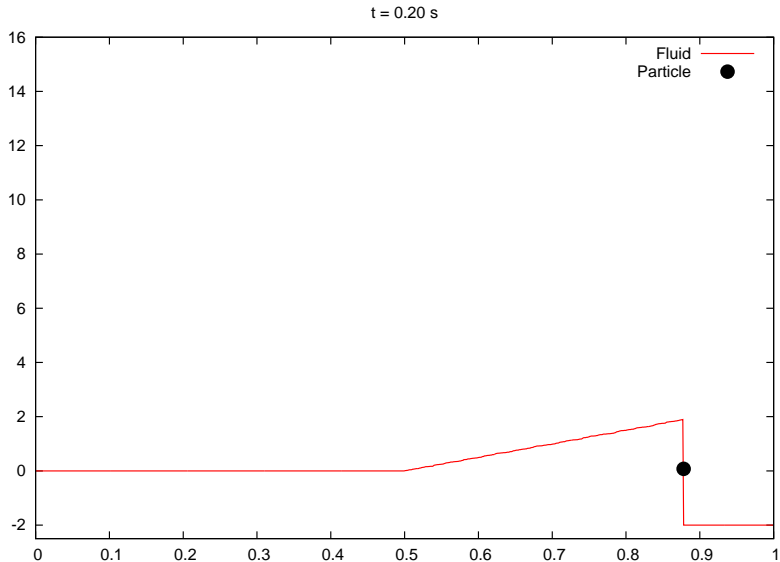
Résultats numériques (avec projection de la particule)



Résultats numériques (avec projection de la particule)

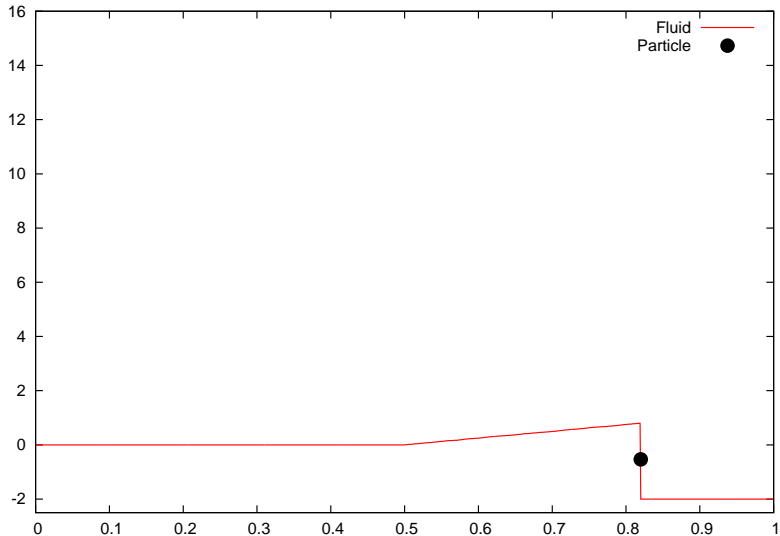


Résultats numériques (avec projection de la particule)

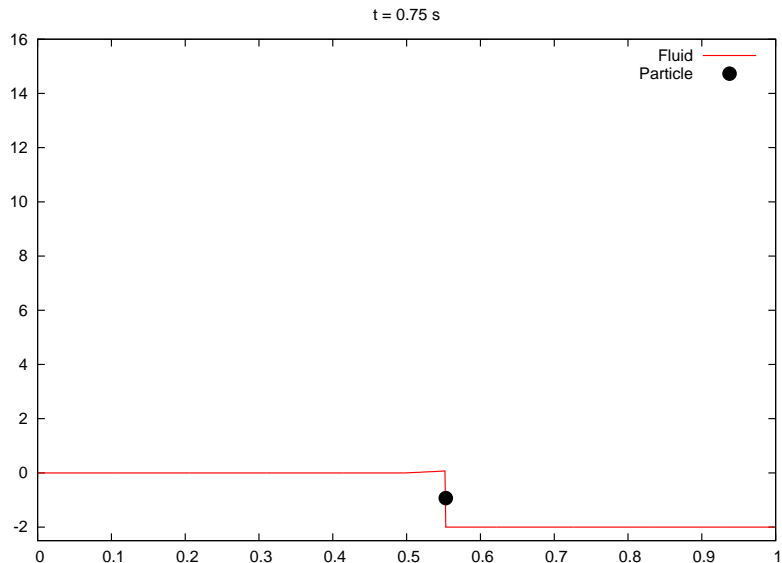


Résultats numériques (avec projection de la particule)

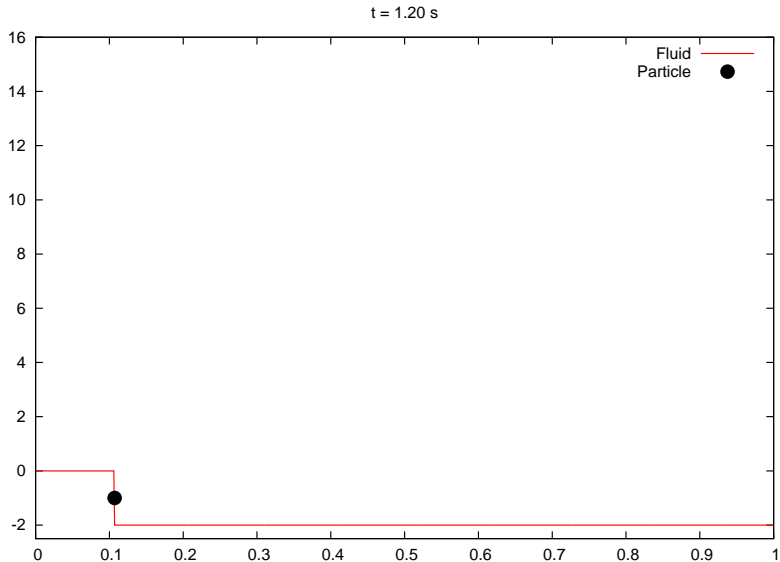
t = 0.40 s



Résultats numériques (avec projection de la particule)



Résultats numériques (avec projection de la particule)



Drafting-kissing-tumbling numérique

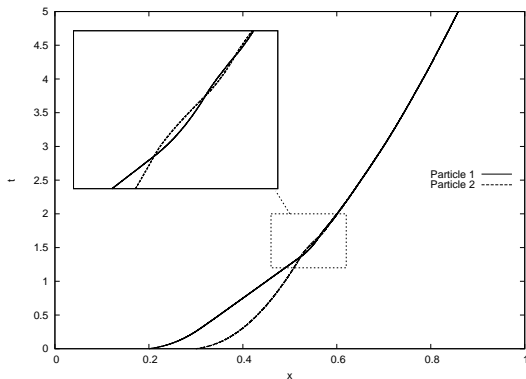


FIGURE: Trajectoires de deux particules sans collision

Conclusion

- Cas de l'équation de Burgers avec une particule ponctuelle presque totalement traité (+ premiers résultats sur une EDP avec terme source singulier)
- Cas avec plusieurs particules...
- Cas des équations d'Euler
- « Amas » de particules (liens avec les modèles cinétiques notamment...)

Conclusion

- Cas de l'équation de Burgers avec une particule ponctuelle presque totalement traité (+ premiers résultats sur une EDP avec terme source singulier)
- Cas avec plusieurs particules...
- Cas des équations d'Euler
- « Amas » de particules (liens avec les modèles cinétiques notamment...)