

Représentations du champ dans l'espace des phases: la fonction Q et la fonction W de Wigner

Nous avons vu qu'il était commode de représenter un champ cohérent par un cercle dans le plan de phase, dont la projection sur une direction de phase quelconque indique l'ensemble des valeurs les plus probables lorsque l'on mesure la quadrature associée à cette phase. Nous avons également tenté d'introduire une représentation analogue pour un état de Fock et pour un chat de phase. Ces représentations sont cependant très qualitatives. Nous allons dans cette leçon essayer de rendre la description du champ plus rigoureuse en introduisant deux fonctions réelles dans le plan de phase, la fonction Q et la fonction W de Wigner. Ces quantités sont définies de façon tout à fait générale, sans être limitées à la description d'états particuliers du champ. Nous en analyserons certaines des propriétés et insisterons plus particulièrement sur les représentations qu'elles donnent d'un état « chat de Schrödinger » .

Nous montrerons également que la fonction W est la généralisation quantique de la distribution de probabilité classique dans l'espace des phases. Contrairement à son analogue classique, W peut prendre des valeurs négatives, dont l'existence constitue en quelque sorte une signature du caractère non-classique d'un système. Nous présenterons enfin une méthode « tomographique » de mesure de la fonction de Wigner.

La fonction Q

Etant donné un état $|\Psi\rangle$ quelconque du champ, il est naturel de le «comparer» à un état cohérent $|\alpha\rangle$ en calculant le produit scalaire $\langle\alpha|\Psi\rangle$ qui décrit le recouvrement de cet état avec l'état cohérent. Le carré, convenablement normé, du module de ce produit scalaire est une fonction Q des deux variables $\alpha_1 = \text{Re}(\alpha)$ et $\alpha_2 = \text{Im}(\alpha)$ définies dans l'espace des phases:

$$Q(\alpha) = Q(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{1}{\pi} \langle\alpha|\Psi\rangle \langle\Psi|\alpha\rangle \quad (5-1)$$

et de façon plus générale, lorsque le champ est décrit par son opérateur densité:

$$Q(\alpha) = \frac{1}{\pi} \langle\alpha|\rho|\alpha\rangle = \frac{1}{\pi} \text{Tr}[\rho|\alpha\rangle \langle\alpha|] \quad (5-2)$$

Le facteur $1/\pi$ est choisi de façon à normer à l'unité l'intégrale de Q dans le plan de phase:

$$\int d^2\alpha Q(\alpha) = \iint d\alpha_1 d\alpha_2 Q(\alpha_1, \alpha_2) = 1 \quad (5-3)$$

(conséquence de la relation de fermeture sur les $|\alpha\rangle$)

Q(α) est une fonction ≥ 0 , qui se détermine en «balayant» l'espace des phases par un état cohérent et en associant à chacune de ses «positions» la valeur moyenne dans cet état de l'opérateur densité du champ divisée par π

Autre définition de Q: transformée de Fourier de la valeur moyenne dans l'état du champ de l'opérateur ~~$\exp(-\lambda^*a) \exp(\lambda a^+)$~~ :

$$\begin{aligned} C_{an}^{(\rho)}(\lambda) &= \iint d^2\alpha Q^{(\rho)}(\alpha) e^{\lambda\alpha^* - \lambda^*\alpha} \\ &= \frac{1}{\pi} \text{Tr} \iint d^2\alpha \rho |\alpha\rangle \langle\alpha| e^{\lambda\alpha^* - \lambda^*\alpha} \\ &= \frac{1}{\pi} \text{Tr} \iint d^2\alpha \rho e^{-\lambda^*a} |\alpha\rangle \langle\alpha| e^{\lambda a^+} \\ &= \text{Tr} \rho e^{-\lambda^*a} e^{\lambda a^+} = \left\langle \underbrace{e^{-\lambda^*a} e^{\lambda a^+}}_{\text{Opérateurs dans l'ordre anti-normal (an)}} \right\rangle_{\rho} \quad (5-4) \end{aligned}$$

et par transformée inverse (normalisation vérifiée par substitution dans première ligne de (5-4)):

$$Q^{(\rho)}(\alpha) = \frac{1}{\pi^2} \iint d^2\lambda C_{an}^{(\rho)}(\lambda) e^{\lambda^*\alpha - \lambda\alpha^*} \quad (5-5)$$

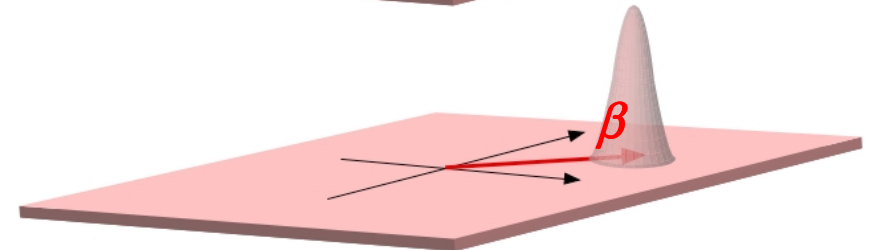
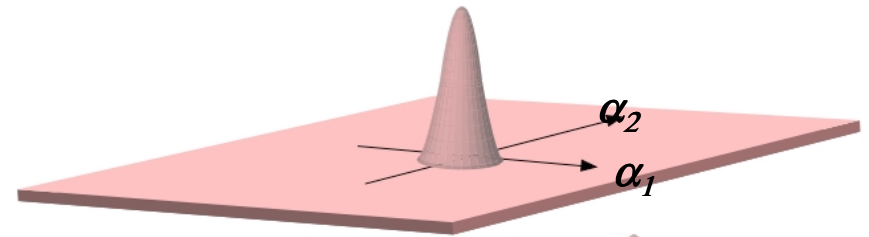
Fonctions Q de quelques champs particuliers

États cohérents

$$Q^{(vide)}(\alpha) = \frac{1}{\pi} e^{-|\alpha|^2} \quad ; \quad Q^{|\beta\rangle}(\alpha) = \frac{1}{\pi} e^{-|\alpha-\beta|^2} \quad (5-6a,b)$$

Gaussienne d'une variable à deux dimensions, centrée à l'origine

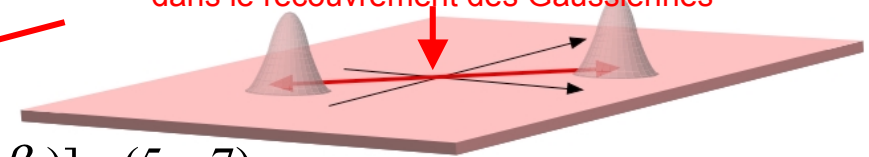
Gaussienne d'une variable à deux dimensions, centrée au point β



Superposition cohérente de $|\beta\rangle$ et $|-\beta\rangle$

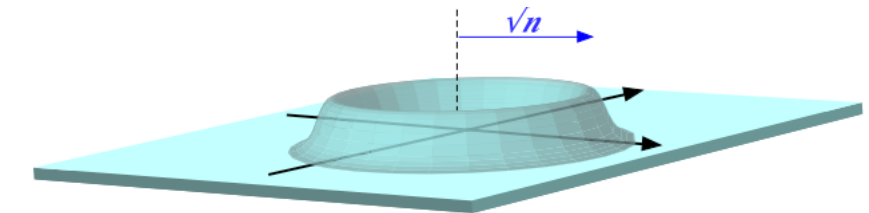
$$Q^{(|\beta\rangle+|-\beta\rangle)}(\alpha) = \frac{1}{2\pi(1+e^{-2|\beta|^2})} [e^{-|\alpha-\beta|^2} + e^{-|\alpha+\beta|^2} + 2e^{-(|\alpha|^2+|\beta|^2)} \cos 2(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)] \quad (5-7)$$

Terme d'interférence exponentiellement petit dans le recouvrement des Gaussiennes



Etats de Fock:

$$Q^{(|n\rangle)}(\alpha) = \frac{1}{\pi} \langle \alpha | n \rangle \langle n | \alpha \rangle = \frac{e^{-|\alpha|^2}}{\pi} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \quad (5-8)$$



Q donne une représentation quantitative d'un état dans l'espace des phases, décrivant ce qu'on attend pour un état cohérent (distribution Gaussienne isotrope). Mais **Q rend mal compte des effets non-classiques d'interférences associés aux superpositions d'états cohérents** ou aux états de Fock. En fait, on a «pratiquement» la même fonction Q pour un chat ou un mélange statistique (**la cohérence n'apparaît que dans un terme de recouvrement très petit au voisinage de $|\alpha|=0$**).

De la fonction Q à la fonction de Wigner W

Pour obtenir une représentation du champ plus sensible que la fonction Q aux cohérences quantiques, on est amené à introduire une nouvelle fonction de α donnée par la transformée de Fourier non plus de $C_{an}^{(\rho)}(\lambda)$, mais de la fonction caractéristique «symétrique» $C_s^{(\rho)}(\lambda)$ définie par:

$$C_s^{(\rho)}(\lambda) = Tr \rho e^{\lambda a^+ - \lambda^* a} = e^{|\lambda|^2/2} C_{an}^{(\rho)}(\lambda) \quad (5-9)$$

(la relation entre $C_s(\lambda)$ et $C_{an}(\lambda)$ s'établit simplement à partir du théorème de Glauber)

ce qui revient à remplacer Q par:

$$W^{(\rho)}(\alpha) = \frac{1}{\pi^2} \iint d^2 \lambda C_s^{(\rho)}(\lambda) e^{\lambda^* \alpha - \lambda \alpha^*} \quad (5-10)$$

La fonction caractéristique symétrique $C_s(\lambda)$ a une interprétation physique simple. Pour un champ dans un cas pur $|\Psi\rangle$, elle devient:

$$C_s^{(|\Psi\rangle)}(\lambda) = \langle \Psi | e^{\lambda a^+ - \lambda^* a} | \Psi \rangle = \langle \Psi | D(\lambda) | \Psi \rangle \quad (5-11)$$

C'est le produit scalaire de l'état par son déplacé du complexe $\lambda = \lambda_1 + i \lambda_2$ dans le plan de phase. $C_s(\lambda)$ apparaît donc comme la fonction d'auto-corrélation du champ dans le plan de phase.

Dans le cas d'un chat de phase $|\beta\rangle + |-\beta\rangle$, la fonction Q est exponentiellement petite au voisinage de $|\alpha|=0$ où les effets d'interférence se manifestent. Cela signifie que l'intégrale sur λ de $C_{an}(\lambda)$ (égale à $Q(0)$) est très petite. Remplacer $C_{an}(\lambda)$ par $C_s(\lambda)$ revient d'après (5-9) à multiplier la fonction caractéristique par une fonction exponentiellement croissante avec $|\lambda|$. On s'attend donc à ce que l'intégrale de $C_s(\lambda)$ sur λ , égale à $W(0)$, soit beaucoup plus grande que celle de $C_{an}(\lambda)$ et que W soit ainsi plus sensible que Q aux cohérences quantiques du «chat» (voir plus loin).

Propriétés importantes de la fonction $W(\alpha)$:

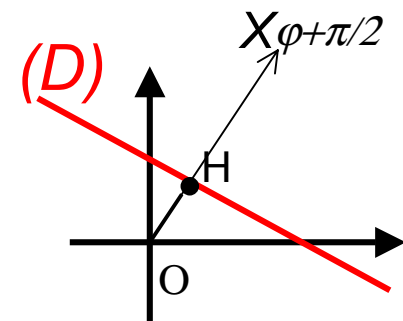
De la relation évidente de conjugaison $C_s(-\lambda) = C_s^*(\lambda)$ on déduit que $W(\alpha)$ est réelle. De la relation $C_s(0) = 1$ on déduit que l'intégrale de $W(\alpha)$ vaut 1:

$$\iint d^2\alpha W(\alpha) = 1 \quad ; \quad \text{Im}(W(\alpha)) = 0 \quad (5-12)$$

$W(\alpha)$ partage les propriétés précédentes avec $Q(\alpha)$. La propriété suivante est nouvelle et donne à W un avantage certain sur Q pour représenter les états du champ: Lorsqu'on intègre W sur la variable α_2 pour une valeur de α_1 , on obtient la probabilité $P_0(\alpha_1)$ de trouver α_1 dans une mesure de la quadrature X_0 . Inversement, si on intègre W sur α_1 pour α_2 fixé, on trouve la probabilité $P_{\pi/2}(\alpha_2)$ de la mesure de la quadrature $X_{\pi/2}$.

Cette propriété se généralise à un couple de directions conjuguées φ et $\varphi + \pi/2$ du plan de phase:

Soit une droite quelconque (D) du plan de phase de direction φ et H la projection de l'origine du plan sur cette droite. La probabilité de trouver la valeur $x = OH$ lorsque l'on mesure la quadrature $X_{\varphi + \pi/2}$ du champ dans la direction conjuguée de celle de (D) est égale à l'intégrale de W le long de (D). Cette propriété est vérifiée en mécanique statistique classique par la loi de probabilité $P(x,p)$ d'une particule. W apparaît ainsi comme l'extension naturelle à la physique quantique du concept de densité de probabilité classique de l'espace des phases.



Démonstration de la propriété d'intégration partielle sur W:

On établit successivement les équations suivantes:

$$W^{(\rho)}(\alpha) = \frac{1}{\pi^2} \iint d^2 \lambda \operatorname{Tr} \left[\rho e^{-\lambda^* (a-\alpha) + \lambda (a^+ - \alpha^*)} \right] \quad (5-13)$$

$$\int d\alpha_2 W^{(\rho)}(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{1}{\pi^2} \iiint d\lambda_1 d\lambda_2 d\alpha_2 e^{2i\lambda_1 \alpha_2 - 2i\lambda_2 \alpha_1} \operatorname{Tr} \left[\rho e^{-(\lambda_1 - i\lambda_2)a + (\lambda_1 + i\lambda_2)a^+} \right] \quad (5-14)$$

$$\int d\alpha_2 e^{2i\lambda_1 \alpha_2} = \pi \delta(\lambda_1) \quad (5-15)$$

$$\int d\alpha_2 W^{(\rho)}(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{1}{\pi} \int d\lambda_2 e^{-2i\lambda_2 \alpha_1} \operatorname{Tr} \left[\rho e^{i\lambda_2 (a + a^+)} \right] = \frac{1}{\pi} \int d\lambda_2 \operatorname{Tr} \left[\rho e^{2i\lambda_2 (X_0 - \alpha_1)} \right] \quad (5-16)$$

$$\operatorname{Tr} \left[\rho e^{2i\lambda_2 (X_0 - \alpha_1)} \right] = \int dx e^{2i\lambda_2 (x - \alpha_1)} \langle x | \rho | x \rangle \quad (5-17)$$

$$\int d\lambda_2 e^{2i\lambda_2 (x - \alpha_1)} = \pi \delta(x - \alpha_1) \quad (5-18)$$

$$\int d\alpha_2 W^{(\rho)}(\alpha_1, \alpha_2) = \langle x = \alpha_1 | \rho | x = \alpha_1 \rangle \quad (5-19)$$

On obtient bien le résultat annoncé: $\langle x = \alpha_1 | \rho | x = \alpha_1 \rangle = P_0(\alpha_1)$ est la densité de probabilité de la mesure de la quadrature de phase $\varphi = 0$ et on l'obtient en intégrant W sur la quadrature conjuguée $\varphi = \pi/2$ (intégration le long de l'axe imaginaire de variable α_2).

Remarquons que la probabilité $P_\varphi(\alpha_1)$ peut s'annuler (effets d'interférence vus à la leçon précédente). Il en résulte que l'intégrale de W le long de certaines droites du plan de phase de direction $\varphi + \pi/2$ est nulle, ce qui montre l'existence de valeurs négatives de W . Nous en verrons des exemples plus loin.

Changement de variables conjuguées dans la fonction de Wigner

Pour exprimer W , on peut choisir une base correspondant à n'importe quelle paire de quadratures conjuguées. Le changement de base s'exprime à l'aide de l'opérateur de rotation dans le plan de phase:

$$U(\varphi) = e^{-i\varphi a^\dagger a} \quad (5-20)$$

dont l'action sur les opérateurs du champ s'écrit:

$$U^\dagger(\varphi) a U(\varphi) = a e^{-i\varphi} \quad (5-21)$$

$$X_\varphi = U^\dagger(\varphi) X_0 U(\varphi) = X_0 \cos \varphi + X_{\pi/2} \sin \varphi;$$

$$X_{\varphi+\pi/2} = U^\dagger(\varphi) X_{\pi/2} U(\varphi) = -X_0 \sin \varphi + X_{\pi/2} \cos \varphi \quad (5-22)$$

Le changement de coordonnées dans la fonction W s'écrit alors:

$$\alpha_{1\varphi} = \alpha_1 \cos \varphi + \alpha_2 \sin \varphi \quad ; \quad \alpha_{2\varphi} = -\alpha_1 \sin \varphi + \alpha_2 \cos \varphi$$

et inversement:

$$\alpha_1 = \alpha_{1\varphi} \cos \varphi - \alpha_{2\varphi} \sin \varphi \quad ; \quad \alpha_2 = \alpha_{1\varphi} \sin \varphi + \alpha_{2\varphi} \cos \varphi \quad (5-23)$$

La fonction W exprimée en fonction des nouvelles variables devient :

$$W(\alpha_1 \cos \varphi - \alpha_2 \sin \varphi, \alpha_1 \sin \varphi + \alpha_2 \cos \varphi)$$

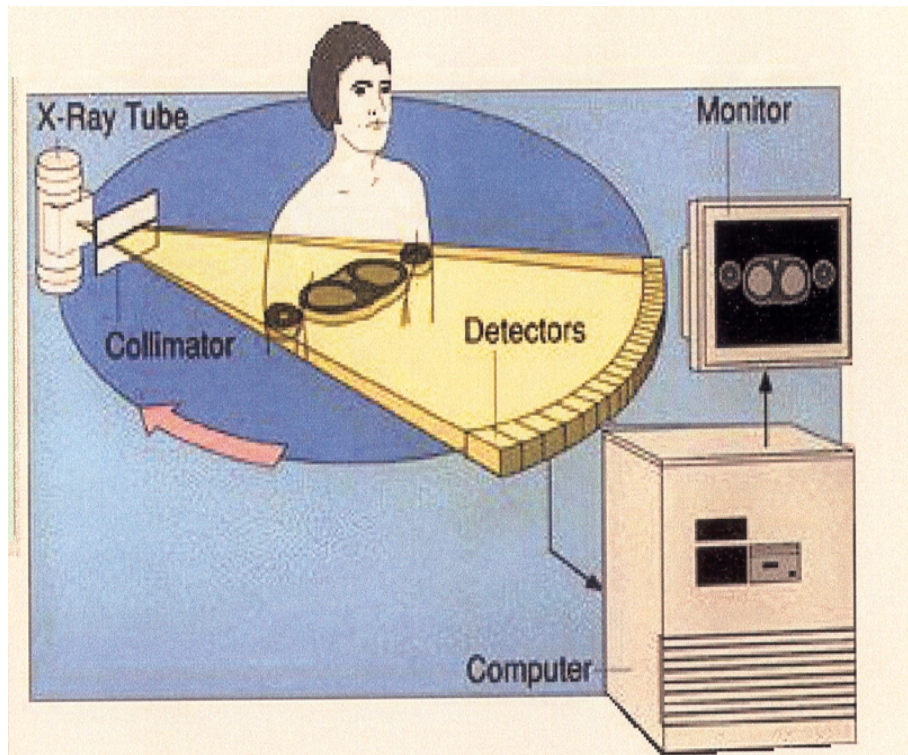
La relation d'intégration partielle donne alors:

$$\int d\alpha_2 W^{(\rho)}(\alpha_1 \cos \varphi - \alpha_2 \sin \varphi, \alpha_1 \sin \varphi + \alpha_2 \cos \varphi) = P_\varphi(\alpha_1) = {}_0 \langle x = \alpha_1 | U^\dagger(\varphi) \rho U(\varphi) | x = \alpha_1 \rangle_0 \quad (5-24)$$

où P_φ est la distribution de la quadrature X_φ . La dernière relation exprime le fait que P_φ est identique à la distribution de la quadrature $\varphi = 0$ dans l'état du champ obtenu en lui appliquant la rotation unitaire inverse $U^\dagger(\varphi)$. On peut considérer l'équation (5-24) comme une définition fondamentale de W . Si l'on se donne un champ quantique d'opérateur densité quelconque ρ , les lois de probabilité de ses distributions de quadrature sont exprimées par le second membre de cette équation et il existe une fonction W et une seule dont les intégrales partielles sur la quadrature $\varphi+\pi/2$ sont identiques, quel que soit φ , aux distributions de la quadrature quantique φ .

Fonction de Wigner obtenue par tomographie

La mesure de la distribution de probabilité $P_\varphi(\alpha)$ équivaut à l'intégration de W dans une direction de quadrature orthogonale $\varphi+\pi/2$. La donnée des $P_\varphi(\alpha)$ pour tous les φ et α revient à intégrer W le long de toutes les droites du plan de phase. Or il existe une transformation, dite de Radon, qui permet, si l'on connaît toutes ces intégrales pour une fonction de deux variables dans un plan de déterminer entièrement cette fonction.



Dans le cas où la fonction est une densité de matière absorbant les rayons X, son intégrale le long d'une droite du plan est simplement obtenue en mesurant l'absorption du rayonnement entre une source et un détecteur ponctuels définissant cette droite. La transformation de Radon permet alors, connaissant les absorptions pour toutes les droites du plan, de remonter à la densité à 2, puis à 3 dimensions. C'est le principe de la tomographie par rayons X en médecine (scanner).

Nous avons vu à la leçon 3 comment on peut mesurer par battement homodyne les distributions des quadratures du champ. On peut ainsi remonter, par « tomographie optique », à W et donc à ρ .

Fonctions de Wigner de quelques états du champ

Vide et états cohérents:

$$\begin{aligned}
 W^{|\beta\rangle}(\alpha) &= \frac{1}{\pi^2} \iint d^2\lambda \langle \beta | e^{\lambda(a^+ - \alpha^*) - \lambda^*(a - \alpha)} | \beta \rangle = \frac{1}{\pi^2} \iint d^2\lambda e^{-\frac{|\lambda|^2}{2}} (\langle \beta | e^{\lambda(a^+ - \alpha^*)}) (e^{-\lambda^*(a - \alpha)} | \beta \rangle) \\
 &= \frac{1}{\pi^2} \iint d^2\lambda e^{-\frac{|\lambda|^2}{2}} e^{\lambda(\beta^* - \alpha^*) - \lambda^*(\beta - \alpha)} = \frac{1}{\pi^2} \underbrace{\int d\lambda_1 e^{-\frac{|\lambda_1|^2}{2}} e^{2i\lambda_1(\alpha_2 - \beta_2)}}_{\text{Transformée de Fourier de Gaussienne}} \times \underbrace{\int d\lambda_2 e^{-\frac{|\lambda_2|^2}{2}} e^{-2i\lambda_2(\alpha_1 - \beta_1)}}_{\text{Transformée de Fourier de Gaussienne}} = \frac{2}{\pi} e^{-2|\beta - \alpha|^2} \quad (5-25)
 \end{aligned}$$

Chat de phase (β réel):

$$W^{(|\beta\rangle + |-\beta\rangle)}(\alpha) = \frac{1}{2\pi^2(1 + e^{-2\beta^2})} \left[\underbrace{\iint d^2\lambda e^{(\alpha\lambda^* - \alpha^*\lambda)} (\langle \beta | D(\lambda) | \beta \rangle + \langle -\beta | D(\lambda) | -\beta \rangle)}_{\text{Termes « incohérents » (somme des } W \text{ des deux états } |\beta\rangle \text{ et } |-\beta\rangle)} + \underbrace{\langle \beta | D(\lambda) | -\beta \rangle + \langle -\beta | D(\lambda) | \beta \rangle}_{\text{Termes d'interférence cohérents } (W_{\text{interférence}})} \right] \quad (5-26)$$

$$W^{(\text{cohérence})}(\alpha) = \frac{1}{2\pi^2(1 + e^{-2\beta^2})} \left[\iint d\lambda_1 d\lambda_2 e^{2i(\alpha_2\lambda_1 - \alpha_1\lambda_2)} \langle -\beta | D(\lambda) | \beta \rangle + \text{terme } \beta \rightarrow -\beta \right] \quad (5-27)$$

On exprime alors l'élément de matrice $\langle -\beta | D(\lambda) | \beta \rangle$ (on suppose β réel pour alléger le calcul):

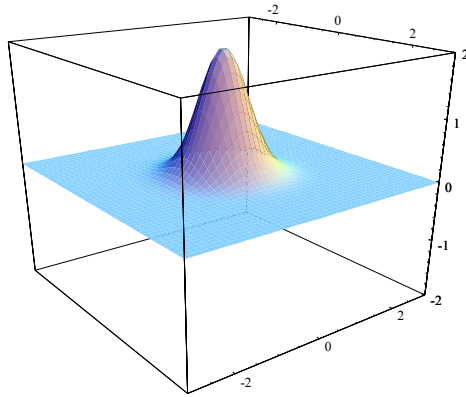
$$\langle -\beta | D(\lambda) | \beta \rangle = e^{i\beta\lambda_2} \langle -\beta | \beta + \lambda \rangle = \exp[-2\beta(\beta + \lambda_1) - \lambda_1^2/2 - \lambda_2^2/2] \quad (5-28)$$

et à partir de (5-27) et (5-28) on fait apparaître des intégrales Gaussiennes en λ_1 et λ_2 , à partir desquelles l'expression de W s'obtient aisément (voir page suivante):

$$\begin{aligned}
 \iint d\lambda_1 d\lambda_2 e^{2i(\alpha_2\lambda_1 - \alpha_1\lambda_2)} \langle -\beta | D(\lambda) | \beta \rangle &= \int d\lambda_1 \exp[-\frac{1}{2}(\lambda_1 + 2(\beta - i\alpha_2))^2 - 2\alpha_2^2 - 4i\beta\alpha_2] \\
 &\times \int d\lambda_2 \exp[-\frac{1}{2}(\lambda_2 + 2i\alpha_1)^2 - 2\alpha_1^2] = 2\pi e^{-2|\alpha|^2} e^{-4i\beta\alpha_2} \quad (5-29)
 \end{aligned}$$

Représentation graphique de fonctions de Wigner d'états cohérents et de leurs superpositions

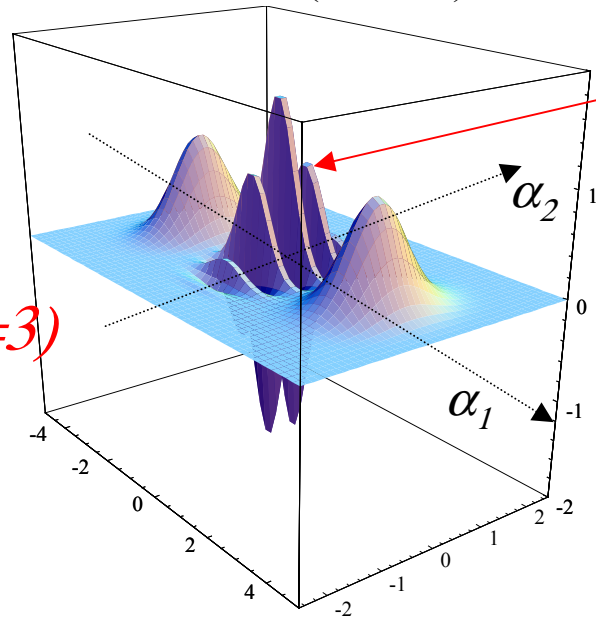
Vide



Chat de phase $|\beta\rangle+|-\beta\rangle$

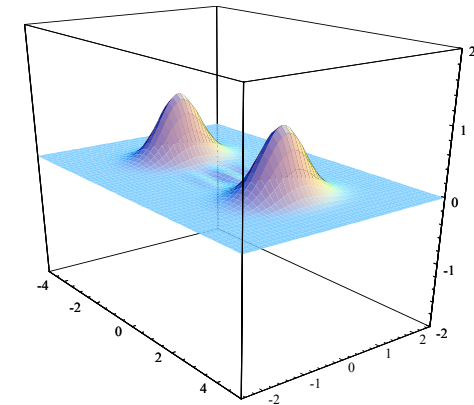
$$W^{(|\beta\rangle+|-\beta\rangle)}(\alpha) = \frac{1}{\pi(1+e^{-2\beta^2})} \left[e^{-2|\alpha-\beta|^2} + e^{-2|\alpha+\beta|^2} + 2e^{-2|\alpha|^2} \cos 4\beta\alpha_2 \right] \quad (5-30)$$

(cas $\beta=3$)



(β réel dans cette expression)

Mélange statistique de $|\beta\rangle$ et $|-\beta\rangle$



Le terme d'interférence autour de $|\alpha|=0$ a des parties négatives. L'intégrale le long de directions parallèles à l'axe α_1 correspondant à α_2 fixé s'annule pour certaines valeurs de α_2 : «franges noires» de $P_{\pi/2}(\alpha)$ (voir leçons précédentes)

Fonction de Wigner, parité du chat de phase et décohérence

$$W(|\beta\rangle \pm |-\beta\rangle)(\alpha) = \frac{1}{\pi(1 + e^{-2\beta^2})} \left[e^{-2|\alpha-\beta|^2} + e^{-2|\alpha+\beta|^2} \pm 2e^{-2|\alpha|^2} \cos 4(\beta_1\alpha_2 - \beta_2\alpha_1) \right] \quad (5-31)$$

Formule générale (β complexe)

Le signe du terme d'interférence de la fonction de Wigner dépend de la parité du « chat de phase » :

Chat $|\beta\rangle + |-\beta\rangle$ (nombre pair de photons) \rightarrow interférence en $+\cos 4(\beta_1\alpha_2 - \beta_2\alpha_1)$

Chat $|\beta\rangle - |-\beta\rangle$ (nombre impair de photons) \rightarrow interférence en $-\cos 4(\beta_1\alpha_2 - \beta_2\alpha_1)$

Nous avons vu qu'un « chat » devient « incohérent » dès qu'en moyenne un photon est perdu dans l'« environnement ». Nous pouvons maintenant comprendre ce résultat de la façon suivante. L'annihilation d'un photon revient à faire agir sur l'état du champ l'opérateur a . Or, d'après la propriété fondamentale des états cohérents :

$$a(|\beta\rangle \pm |-\beta\rangle) = \beta(|\beta\rangle \mp |-\beta\rangle) \quad (5-32)$$

Le processus de perte d'un photon transforme ainsi un chat « pair » en chat « impair » et inversement ce qu'on aurait pu prédire a priori. Le terme de cohérence dans W change donc de signe. En fait nous ne pouvons pas savoir avec certitude quand un photon est perdu puisque nous ne regardons pas l'environnement. Nous ne pouvons que connaître la probabilité pour qu'un photon ait été émis. Dès que cette probabilité est égale à 50%, l'information que nous avons sur le champ est qu'il se trouve dans une superposition à poids égaux d'un chat pair et d'un chat impair : le terme d'interférence entre les deux parties du chat s'annule. Nous retrouvons les conclusions établies aux leçons précédentes sur la fragilité de ces états. La présente analyse nous montre cependant que si on était capable d'observer l'environnement et de détecter les photons qui s'y perdent un à un, on « verrait » que le chat évolue par saut entre chat « pair » et « impair », en restant dans une superposition cohérente, dont la phase varie au cours d'un processus stochastique. Dire que la cohérence est perdue revient simplement à renoncer à suivre l'évolution de l'environnement.

Fonctions de Wigner des états de Fock

On montre sans difficulté:

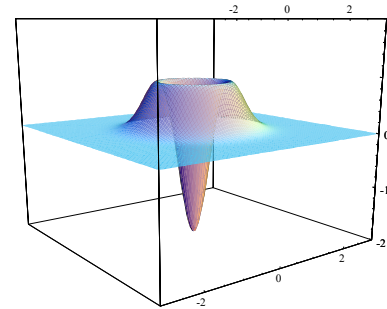
$$W^{(|n\rangle)}(\alpha) = \frac{2}{\pi} (-1)^n e^{-2|\alpha|^2} L_n(4|\alpha|^2) \quad (5-33) \quad W^{(|n\rangle)}(0) \text{ du signe de } (-1)^n$$

où $L_n(x)$ est le polynôme de Laguerre de rang n :

$$L_n(x) = \sum_{m=0}^n \frac{(-x)^m}{(m!)^2} \frac{n!}{(n-m)!} \quad (5-34)$$

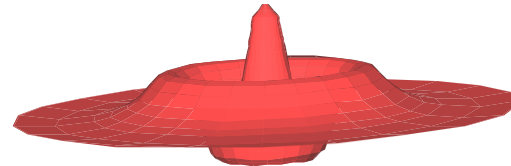
Cas $n=1$:

$$W^{(|1\rangle)}(\alpha) = -\frac{2}{\pi} e^{-2|\alpha|^2} (1 - 4|\alpha|^2) \quad (5-35)$$



Cas $n=2$:

$$W^{(|2\rangle)}(\alpha) = \frac{2}{\pi} e^{-2|\alpha|^2} (1 - 8|\alpha|^2 + 8|\alpha|^4) \quad (5-36)$$



La fonction W des états de Fock a un aspect d'onde circulaire dans le plan de phase, avec des maxima positifs et des minima négatifs: l'intégrale dans une direction de quadrature peut s'annuler, ce qui exprime l'existence de «franges sombres» dans la quadrature conjuguée (nœuds de la fonction d'onde des états propres de l'oscillateur harmonique). Ces effets d'interférence quantique ne sont pas visibles sur Q .

W exprimée en fonction de x_{oh} et p_{oh} (oscillateur mécanique)

Revenons aux quadratures notées x et p au lieu de α_1 et α_2 , de façon à exprimer W sous une forme familière à la mécanique statistique:

$$x = \alpha_1; p = \alpha_2 \rightarrow e^{\lambda^* \alpha - \lambda \alpha^*} = e^{-2i\lambda_2 x + 2i\lambda_1 p}; \quad e^{\lambda a^+ - \lambda^* a} = e^{2i(\lambda_2 X - \lambda_1 P)} = e^{2i\lambda_2 X} e^{-2i\lambda_1 P} e^{-i\lambda_1 \lambda_2} \quad (5-37)$$

On en déduit l'expression de la fonction caractéristique C_s :

$$C_s^{(\rho)}(\lambda) = e^{-i\lambda_1 \lambda_2} \int dx \langle x | e^{2i\lambda_2 X} e^{-2i\lambda_1 P} \rho | x \rangle = e^{-i\lambda_1 \lambda_2} \int dx e^{2i\lambda_2 x} \langle x - \lambda_1 | \rho | x \rangle \quad (5-38)$$

puis par transformation de Fourier l'expression de W :

$$W^{(\rho)}(x, p) = \pi^{-2} \iint d\lambda_1 d\lambda_2 e^{-i\lambda_1 \lambda_2} e^{-2i\lambda_2 x + 2i\lambda_1 p} \int dx' e^{2i\lambda_2 x'} \langle x' - \lambda_1 | \rho | x' \rangle \quad (5-39)$$

L'intégration sur λ_2 donne:
$$\int d\lambda_2 e^{-2i\lambda_2 (x - x' + \lambda_1/2)} = \pi \delta(x - x' + \lambda_1/2) \quad (5-40)$$

D'où:
$$W^{(\rho)}(x, p) = \pi^{-1} \int d\lambda_1 e^{2i\lambda_1 p} \langle x - \lambda_1/2 | \rho | x + \lambda_1/2 \rangle \quad (5-41)$$

On revient enfin aux variables habituelles de l'oscillateur (attention aux facteurs 2 et $\sqrt{2}$ et à la normalisation des états propres quand on fait une affinité sur les opérateurs):

$$x_{oh} = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} x; \quad p_{oh} = \sqrt{2m\hbar\omega} p \quad (dx_{oh} dp_{oh} = 2 dx dp); \quad \xi = -\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \lambda_1 \quad (5-42)$$

et on obtient finalement:

$$W^{(\rho)}(x_{oh}, p_{oh}) = \frac{1}{\pi\hbar} \int d\xi e^{-2i\xi p_{oh}/\hbar} \langle x_{oh} + \xi | \rho | x_{oh} - \xi \rangle \quad (5-43)$$

$$\langle x_{oh} + \xi | \rho | x_{oh} - \xi \rangle = \int dp W^{(\rho)}(x_{oh}, p_{oh}) e^{2ip_{oh}\xi/\hbar} \quad (5-44)$$

Forme habituelle de W en mécanique statistique (Wigner)

$W(x_{oh}, p_{oh})$ et $\langle x_{oh} + \xi | \rho | x_{oh} - \xi \rangle$ sont T.F. mutuelles. W spécifie complètement ρ

Conclusion: caractère non-classique de W

La fonction de Wigner est une distribution réelle dans l'espace des phases qui permet de calculer, par la propriété d'intégration partielle, toutes les distributions des quadratures du champ. Inversement, si l'on mesure ces distributions, on peut reconstruire par transformée de Radon la fonction de Wigner, dont la connaissance est équivalente à celle de l'opérateur densité du champ. Une telle procédure exige que l'on dispose d'un grand nombre de copies du même champ et que l'on réalise sur ces copies des mesures de quadratures correspondant à toutes les phases φ . Il existe d'autres méthodes pour mesurer W , qui seront décrites plus loin dans des séminaires.

L'existence d'interférences quantiques se manifeste par l'annulation de la probabilité pour certaines valeurs de quadratures, ce qui implique l'existence de zones où W est négative. On dit que W est une distribution de quasi-probabilité. C'est en effet la quantité la plus semblable possible à une distribution classique de probabilité dans l'espace des phases. Une distribution de probabilité classique est cependant toujours positive. C'est l'existence de ces « probabilités négatives » qui signale le caractère profondément non-classique de certains états du champ (comme les états de type « chat » ou les états de Fock).

Les fonctions de Wigner à partie négative d'états de Fock à un photon ont été mesurées sur des champs libres ou piégés dans une cavité. La fonction de Wigner d'un état de Fock de vibration d'un ion piégé a aussi été mesurée. La fonction de Wigner d'un état de type chat reste à observer.