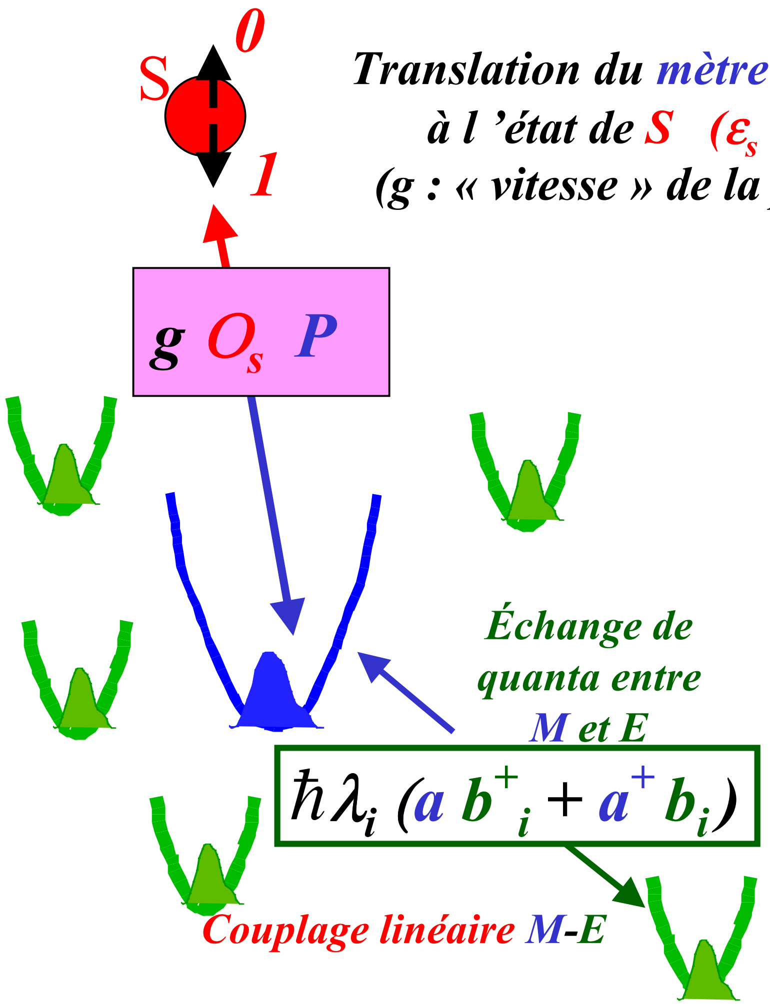
Mesure d'un qubit par un oscillateur couplé à un environnement E (rappel du problème)



Translation du mètre conditionnée à l'état de S (ε_s = 0 ou 1)
(g : « vitesse » de la pré-mesure)

Nous ne décrivons pas ici la réalisation pratique de cet hamiltonien de couplage (voir cours ultérieurs)

Nous supposons g assez grand pour que l'intrication S-M soit « instantanée » par rapport à l'évolution de l'oscillateur M.

La pré-mesure prépare l'état

$$[\, c_0\, |s_0\rangle\, |0\rangle_M + c_1\, |s_1\rangle\, |\alpha\rangle_M\,] \otimes |0\rangle_E$$

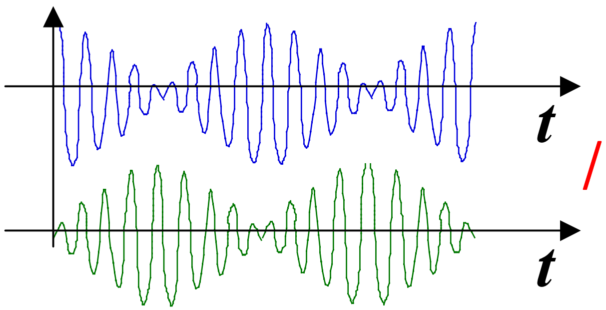
On se propose de décrire l'évolution ultérieure du système (couplage de M aux oscillateurs de l'environnement). Le couplage avec l'environnement induit la décohérence.

Première approche de la décohérence: modélisation de l'environnement par un oscillateur initialement dans l'état fondamental

(On simplifie à l 'extrême le problème en ne considérant qu'un oscillateur dans E)

Si (M) « mesure » (S) préparé dans l 'état $|s_0>$, il reste dans son état fondamental: $\rightarrow$ pas de couplage ni d'intrication M-E : $|\Psi>_{S,M,E} = |s_0>|0>_M|0>_E$

Si (M) « mesure » (S) préparé dans l 'état $|s_1>$, il est translaté dans un état cohérent: $\rightarrow$ (M) et (E) se couplent en restant dans des états cohérents et en échangeant leurs amplitudes périodiquement <u>sans intrication</u> (Comportement classique. Voir leçon n°3).



$$|s_1>|\alpha e^{-i\omega t}\cos(\lambda t)>_M|-i\,\alpha e^{-i\omega t}\sin(\lambda t)>_E$$

Si (M) « mesure» (S) préparé dans une superposition des états $|s_0>$ et $|s_1>$, le couplage (M) - (E) conduit à une <u>intrication</u> avec l 'environnement:

$$c_0|s_0>|0>_M|0>_E + c_1|s_1>|\alpha e^{-i\omega t}\cos(\lambda t)>_M|-i\alpha e^{-i\omega t}\sin(\lambda t)>_E$$

La cohérence entre les deux états de S + M est alors <u>réduite</u> par le facteur:

$$\eta = {}_E<0|-i\,\alpha e^{-i\omega t}\sin(\lambda t)>_E = \exp\left[-(|\alpha|^2/2)\sin^2(\lambda t)\right]$$

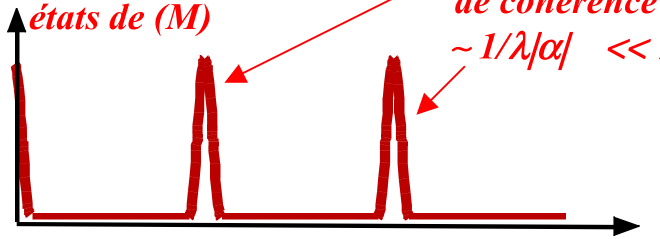
Discussion physique de la « décohérence » par un oscillateur E unique

Pour $\lambda t \ll 1$, $\eta \sim \exp(-|\alpha|^2 \lambda^2 t^2/2)$. La cohérence entre les états de (S+M) décroît en un temps $t_{déco} \sim 1/\lambda|\alpha|$ correspondant à l'apparition d'environ un quantum de vibration dans (E). $t_{déco}$ est <u>beaucoup plus court</u> que le temps $1/\lambda$ d'échange d'énergie entre M et E.

<u>Interprétation en terme de complémentarité</u>: au bout du temps $t_{déco}$, l'observation (réelle ou virtuelle) de (E) nous permettrait de déterminer le « chemin » suivi par (M): si (E) est resté dans $|0>_E$, (M) ne transfère pas d'énergie à (E) et est nécessairement dans l'état $|0>_M$. Si (E) contient en moyenne un quantum, (M) est nécessairement dans l'état $|\alpha e^{-i\omega t}>_M$. (E) joue ainsi le rôle d'un <u>détecteur « which-path »</u>. L'émission d'un quantum dans (E) est le minimum d'échange d'énergie requis pour fournir une information non ambiguë sur le « chemin suivi par S+M » (condition $\eta = {}_E< 0\,|-i\alpha e^{-i\omega t}\sin(\lambda t) >_E \sim 0$).

Ce modèle simple présente plusieurs aspects essentiels de la décohérence: disparition de la cohérence entre états différents du mètre <u>beaucoup plus rapide</u> que l'évolution de son énergie, décohérence d'autant plus rapide que $|\alpha|$ est plus grand, donc (M) plus « classique »….

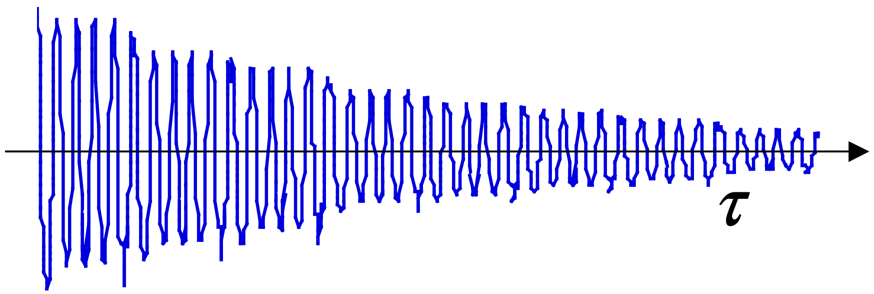
…<u>mais défaut majeur</u>: la «décohérence» qu'il décrit est réversible: tous les temps $t = k\pi/\lambda$, la cohérence «revit» (E revient dans $|0>_E$). Un modèle plus réaliste doit introduire l'irréversibilité dans l'évolution de (M) $\rightarrow$ couplage à un continuum d'oscillateurs E.



Oscillateur couplé à un ensemble d 'oscillateurs (rappel sur la théorie de la relaxation):

***(E)* est constitué par un « bain » d 'oscillateurs (i) distribués continûment (fréquences ω_i, couplages λ_i avec *M*). Tous les oscillateurs sont à $t = 0$ dans leur état fondamental.**

***(M)* dans un état cohérent se couple à *(E)* en restant cohérent, sans s'intriquer. Son amplitude décroît de façon exponentielle. C'est encore un comportement classique, analogue à celui observé dans le cas du couplage entre deux oscillateurs. Cette propriété, qui se démontre à partir de l '<u>équation pilote</u> de l'opérateur densité du système, sera admise ici (démonstration rappelée plus loin dans le cours).**



$$| \alpha \, e^{-i\omega t} e^{-\gamma t/2} >$$

$\gamma = \omega / Q$ ***Q: coefficient de surtension.***

$T_r = 1/\gamma = Q/\omega$ ***: temps de relaxation de l'énergie de M***

(dépend de la distribution des λ_i, ω_i…)

Mesure de S par M en présence de l 'environnement E

Etat initial: $[c_0|s_0> + c_1|s_1>]\ |0>_M |0>_E$ **avec** $|0>_E = \Pi_i\ |0>_i$

1. Pré-mesure (durée t_1):

$$[c_0|s_0>|0>_M + c_1|s_1>|\alpha>_M]\ |0>_E \quad \text{avec} \quad \alpha = g\, t_1\ / 2\Delta x$$

Nombre moyen de quanta dans le mètre: $N = |\alpha|^2 = g^2\, t_1{}^2 / 4\Delta x^2 >> 1$

(il faut que les fluctuations du mètre soient négligeables: appareil « classique »)

La vitesse g de la pré-mesure doit être assez grande pour satisfaire N >> 1 avec $t_1 << 1/\omega$ (pas d 'évolution propre pendant la pré-mesure).

A l 'instant t_1, on suppose que l 'environnement n 'a pas eu le temps de se coupler (voir condition plus loin). Le système S+ M est décrit par l 'opérateur densité:

$$\rho_{S+M} = |c_0|^2\ |s_0>< s_0\ | \otimes |0>_M\ {}_M< 0\ | + \ |c_1|^2\ |s_1>< s_1\ | \otimes |\alpha>_M\ {}_M< \alpha\ |$$

(Termes décrits par la théorie de la mesure)

$$+\ \ c_0 c_1{}^*\ |s_0>< s_1\ | \otimes |0>_M\ {}_M< \alpha\ | + c_1 c_0{}^*\ |\ s_1>< s_0\ | \otimes |\alpha>_M\ {}_M< 0\ |$$

(«cohérence » entre états différents du mètre et intrication S-M)

2. Couplage de l 'appareil M avec son environnement E

Nous allons voir que si N est assez grand, l 'environnement évolue très vite dans deux états orthogonaux, suivant que M est dans $|0>_M$ ou $|\alpha>_M$. Il en résulte une intrication M-E qui détruit les cohérences de la matrice densité S + M.

Tant que l 'amortissement de M est négligeable ($t << T_r$) , on peut écrire l 'état de S+M+E sous la forme:

$$c_0|s_0>|0>_M|0>_E+c_1|s_1>|\alpha\, e^{-i\omega t}>_M\ |\beta>_E$$

Les oscillateurs de E ne sont pas couplés à M dans l 'état fondamental

Les oscillateurs de E sont perturbés par M lorsqu 'il est lui-même excité

Dès que ${}_E<0|\beta>_E << 1$, les cohérences entre $|s_0>|0>_M$ et $|s_1>|\alpha\, e^{-i\omega t}>_M$ sont détruites et on retrouve une matrice densité de S+M conforme aux postulats de la mesure:

$$\rho_{S+M} = |c_0|^2 |s_0><s_0| \otimes |0>_{M\ M}<0| + |c_1|^2 |s_1><s_1| \otimes |\alpha\, e^{-i\omega t}>_{M\ M}<\alpha\, e^{-i\omega t}|$$

$$+(c_0 c_1^* |s_0><s_1| \otimes |0>_{M\ M}<\alpha\, e^{-i\omega t}|\ {}_E<\beta|0>_E + \text{terme hermitique conjugué})$$

Tend très vite vers 0

L 'environnement E sert de « détecteur de chemin » pour M et détruit la cohérence entre ses états (complémentarité)...

Dynamique de la décohérence (pendant un temps $t_2 \ll T_r = Q/\omega$)

Chaque oscillateur (i) de E résonnant avec M se « remplit » linéairement et prend à l 'instant t_2 une amplitude $\beta_i = -i\alpha\, e^{-i\omega t_2}\, \lambda_i t_2$.

La cohérence S+M est donc réduite par le facteur $_E\langle\beta|0\rangle_E = \Pi_i \langle\beta_i|0_i\rangle = \exp(-\Sigma_i|\beta_i|^2/2)$

Or $\Sigma_i|\beta_i|^2$ représente le <u>nombre total de quanta de vibration perdus par M</u> à l 'instant t_2. Nous avons vu que le couplage à l 'environnement conduit à un amortissement exponentiel de l 'énergie de M avec la constante de temps T_r :

Résultat de l 'équation pilote valable pour $1/\omega \ll t_2 \ll Q/\omega$

$$\Sigma_i|\beta_i|^2 = N(1-e^{-t_2/T_r}) \sim N t_2/T_r$$

Terme linéaire en t_2 car chaque $|\beta_i|^2$ est en $t_2^{\,2}$ et le nombre d 'oscillateurs quasi-résonnants varie en $1/t_2$ (« règle d 'or de Fermi »)

$$\longrightarrow \quad _E\langle\beta|0\rangle_E = \exp(-N\, t_2/2T_r)$$

La cohérence S-M disparaît au bout d 'un temps $t_{déco}$ de l 'ordre de $2T_r/N$, très court devant le temps d 'amortissement de l'oscillateur M (car $N \gg 1$) .

$$\boxed{t_{déco} = 2T_r/N}$$

On peut choisir les paramètres pour satisfaire les inégalités nécessaires à la consistance du calcul: $t_1 \ll 1/\omega \ll t_{déco} \ll T_r$ (La décohérence doit se produire après l 'intrication et avant que M ait relaxé). Par exemple:

$Q = 10^7$; g $t_1 = 100\,\Delta x$ et $t_1 = T_r/10^8 = 1/(10\,\omega) \rightarrow N = 2500$ et $t_{déco} = T_r/1250$

Décohérence, complémentarité et mesure quantique

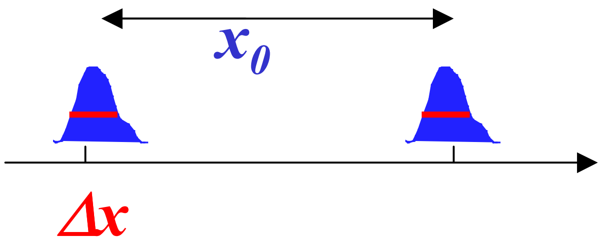
La décohérence est liée à une « fuite » d 'information dans l 'environnement qui permettrait (en principe) de déterminer le chemin suivi par le système dans tout processus d 'interférence quantique impliquant une cohérence entre les états de M (relation avec la complémentarité).

Dans le modèle simple traité ici, il suffit qu'un quantum passe dans l 'environnement pour que l 'on puisse déterminer si M est dans l' état excité $|\alpha\ e^{-i\omega t}>_M$ ou dans l 'état $|0>_M$. Le temps d 'amortissement des N quanta étant T_r , il faut un temps T_r / N pour que le premier quantum soit dissipé. Si au bout d 'un temps de l 'ordre de quelques T_r/ N, on détecte (réellement ou virtuellement) un quantum dans E, on sait que le système est dans $|\alpha e^{-i\omega t}>_M$ et si on ne détecte rien, on sait qu 'il est dans $|0>_M$ (l 'absence de quantum est aussi une information). Ainsi, l 'intrication très rapide de M avec l 'environnement E est responsable de la décohérence, même si l 'information passée dans E n'est pas « lue ».

La décohérence contribue à expliquer la deuxième phase de la mesure quantique selon von Neumann (disparition des cohérences entre états différents du mètre). Elle ne « résout » pas le problème du choix ultime d'une valeur propre (caractère irréductiblement probabiliste de la physique quantique). Le choix de la base de mesure dépend de la nature du couplage à l 'environnement qui « stabilise » certains états (ici les états cohérents, en général les états propres de la position du « mètre ») et détruit leurs superpositions...

Peut-on contrôler la décohérence, rétablir les interférences et les intrications détruites (analogie avec la gomme quantique)?. Problème essentiel en traitement quantique de l 'information….

Qu'avons nous appris sur la décohérence?



Une superposition quantique impliquant deux états cohérents séparés par une distance « macroscopique » perd sa cohérence en un temps beaucoup plus court que le temps caractéristique d 'amortissement de son énergie

$$t_{déco} = \frac{2T_r}{N} = \frac{2T_r}{|\alpha|^2} = 8T_r\left(\frac{\Delta x}{x_0}\right)^2 = 8\frac{T_r}{d^2}$$

$$d = \frac{x_0}{\Delta x}$$

« distance » des états, mesure du caractère macroscopique de la superposition

$d >> 1 \rightarrow$ ***Superposition macroscopique*** $\rightarrow t_{déco} << T_r$

Résultat général, largement indépendant du modèle: pour une particule en mouvement brownien $d = x_0 / \lambda_{DeBroglie}$: « localisation » quasi instantanée de la particule induite par son interaction avec l 'environnement.

Références complémentaires: Zurek, Physics Today, Octobre 1991, Raimond, Brune et Haroche, Phys.Rev.Lett. 79, 1964 (1997).

L' intrication : des notions fondamentales aux « applications »

Après avoir défini l 'intrication de deux systèmes physiques A et B, nous avons analysé un certain nombre de situations et d 'effets physiques fondamentaux dans lesquels l 'intrication apparaît comme une notion essentielle:

non-localité, interférences quantiques et complémentarité, mesure quantique et décohérence.

Nous allons dans la suite envisager l 'intrication comme une « ressource » pour le traitement de l 'information en considérant des systèmes quantiques à deux niveaux comme des qubits codant de l 'information sous forme binaire (0 ou 1). Nous parlerons de

cryptographie, téléportation, codage dense, calcul quantique....

Avant d 'aborder cet aspect « pratique » de l 'intrication, il nous faut préciser comment on quantifie le degré d 'intrication dans un système bipartite décrit par l 'état $|\Psi>_{AB}$***. Le nombre de Schmidt ne fournit en effet qu 'une « mesure » très vague: dans le cas de deux qubits, il ne peut prendre que la valeur 1 (pas d 'intrication) ou 2 (intrication).***

Nous introduirons ici la mesure de l 'intrication par l 'entropie de von Neumann. La notion d 'entropie comme mesure du désordre ou de la quantité d 'information dans un système est employée aussi bien par les physiciens que par les informaticiens, avec des sens voisins. Son introduction à ce stade du cours constitue une transition naturelle vers la partie consacrée à la « physique de l 'information quantique » .