

Fondements cognitifs de l'arithmétique élémentaire

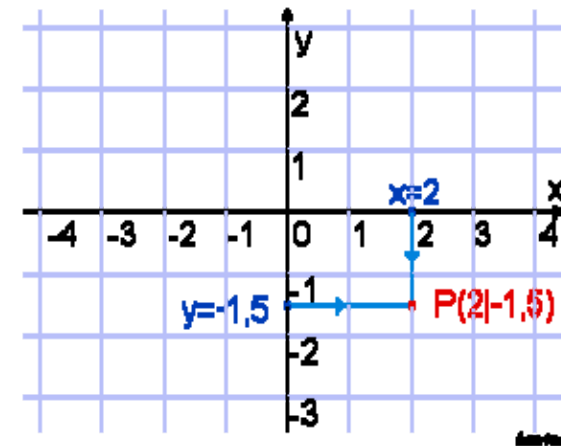
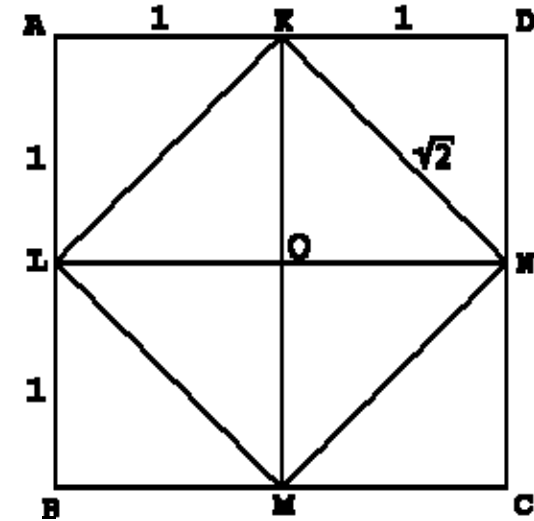
Stanislas Dehaene
Chaire de Psychologie Cognitive Expérimentale

Sixième Cours

Représentation spatiale des nombres
et
Synesthésie numérique

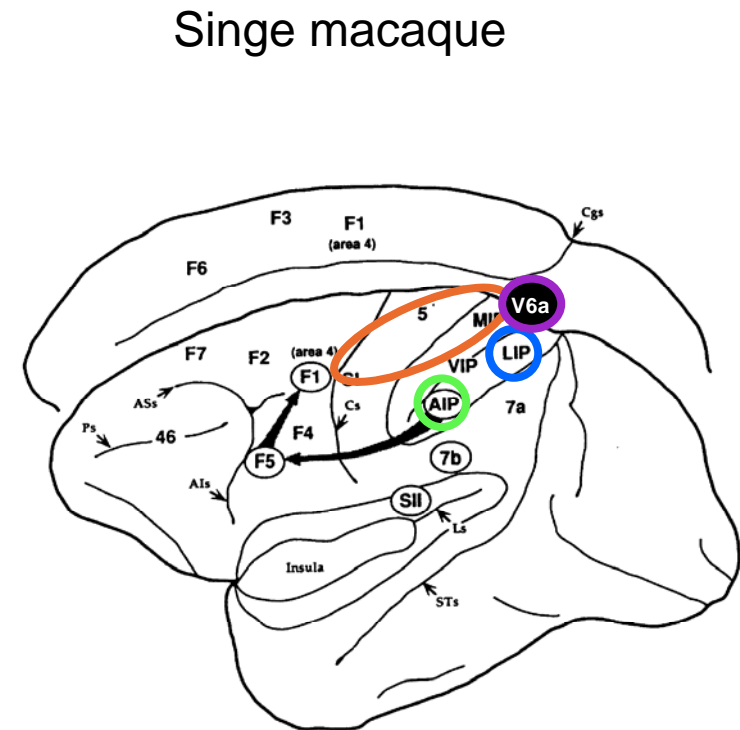
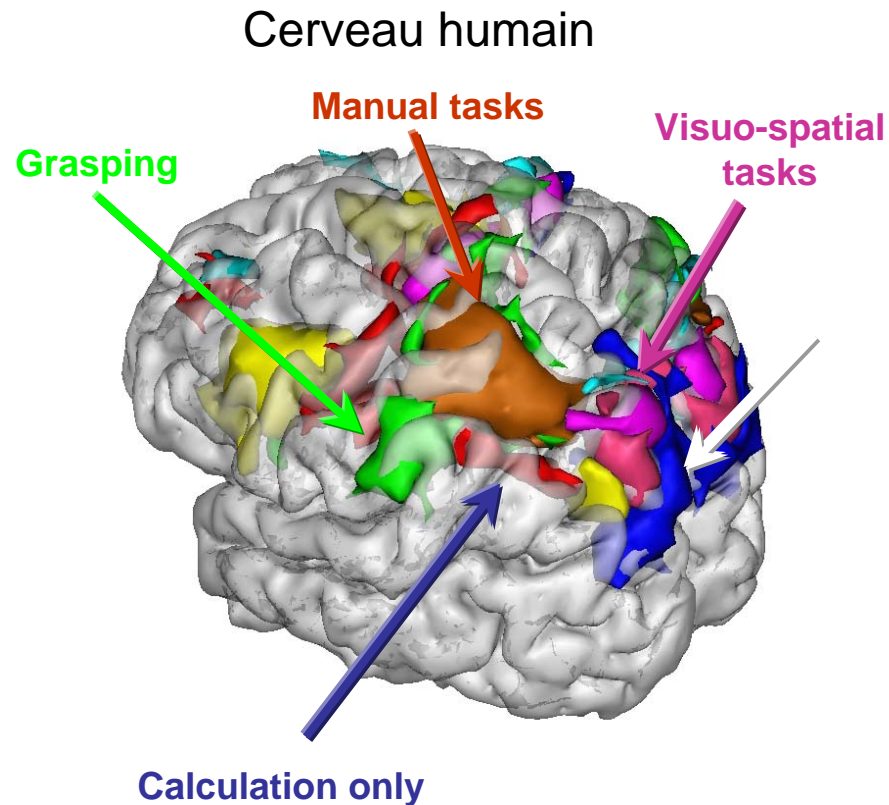
La métaphore nombre-espace joue un rôle essentiel en mathématiques

- Le concept de mesure
- L'idée Pythagoricienne que les longueurs *sont* des nombres
- Hippiase de Métaponte (ca. 500 B.C.)
 - Première démonstration que le côté et la diagonale du carré ne sont pas commensurables (leur rapport n'est ni un entier, ni une fraction rationnelle)
 - Concept de « nombre irrationnel », puis de continuum et de « nombre réel »
- René Descartes (1596-1650)
 - Invention des coordonnées Cartésiennes
 - Géométrie algébrique: démonstration de théorèmes de géométrie à l'aide des outils de l'algèbre et de l'arithmétique
- Plan complexe
- Etc...



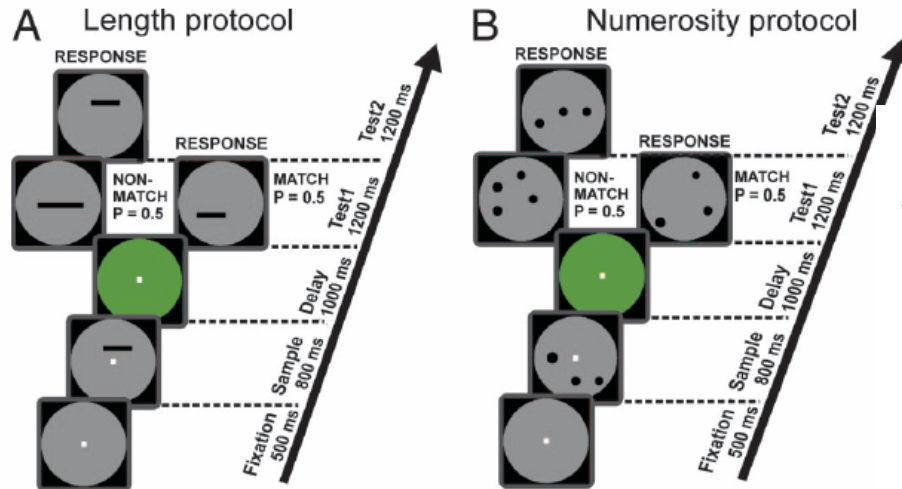
Cours 2. Rôle de la région intrapariétale dans le calcul mental

L'activation évoquée par l'arithmétique mentale est entourée d'un vaste ensemble de régions pariétales spécialisées pour différentes transformations visuo-spatiales.

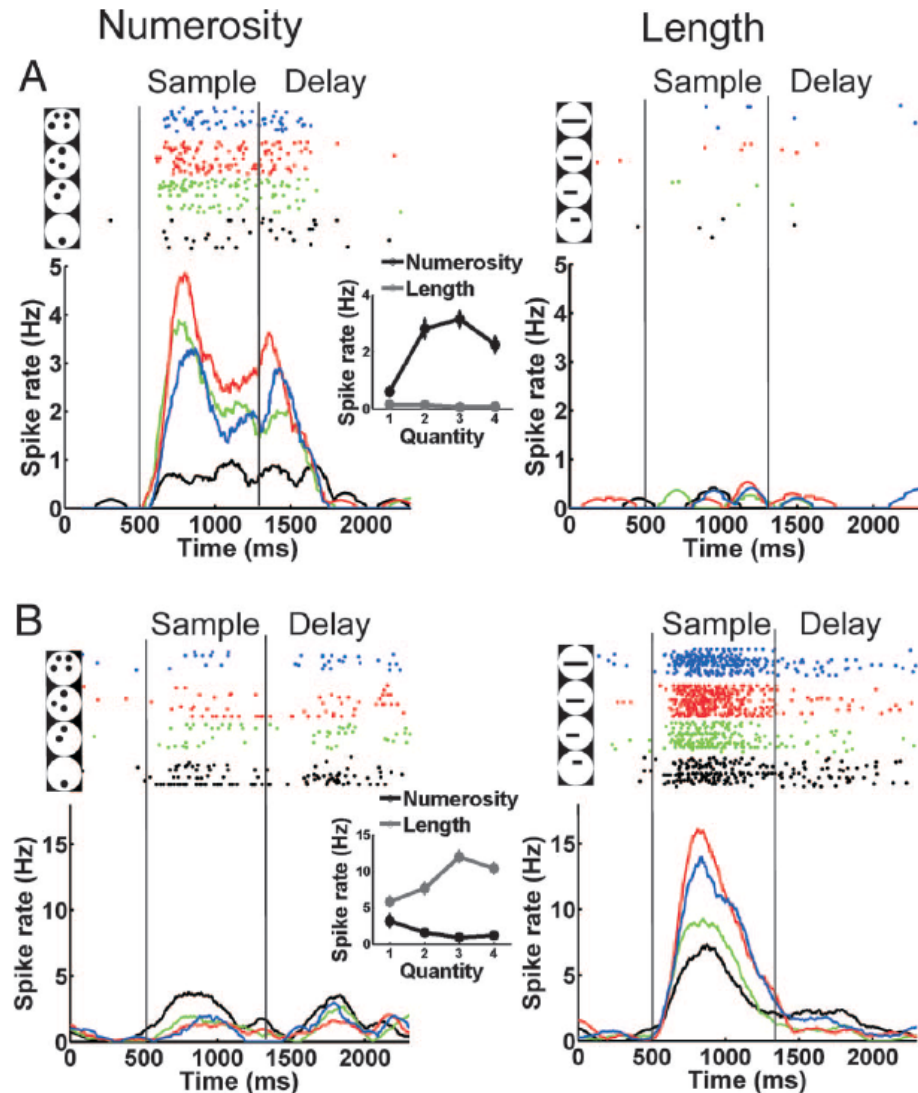


Cours 3. Les nombres et les longueurs sont codés par des neurones très proches dans le cortex pariétal

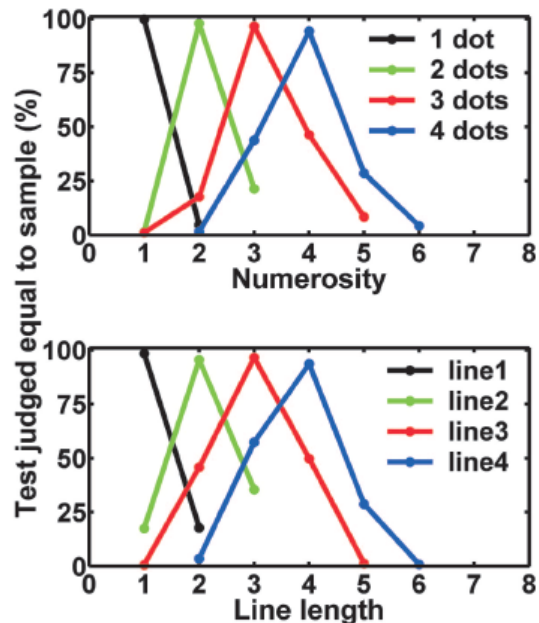
Tudusciuc, O., & Nieder, A. (2007). Neuronal population coding of continuous and discrete quantity in the primate posterior parietal cortex. *Proc Natl Acad Sci U S A*, 104(36), 14513-14518.



Des neurones distincts codent pour le nombre et la longueur



Comportement



Plan du cours

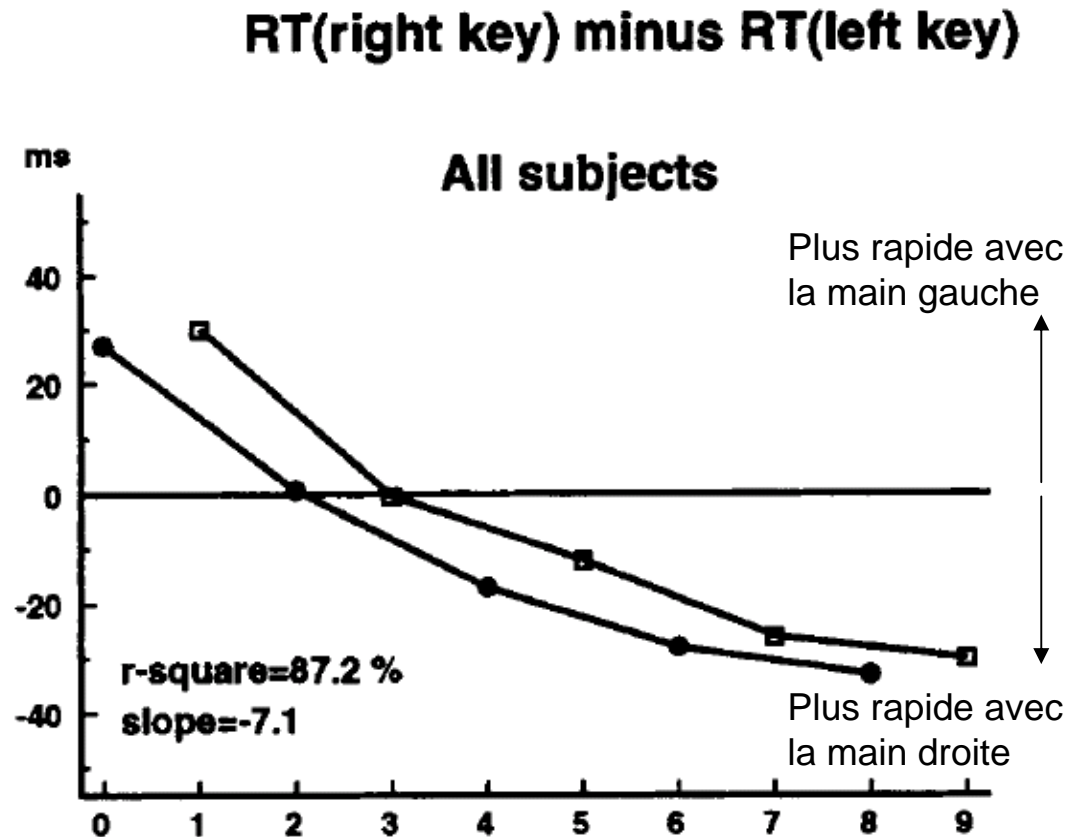
- Association automatique entre nombre et espace: l'effet SNARC
- Interactions entre nombre et attention visuo-spatiale
- Biais spatiaux au cours du calcul
- Synesthésie numérique
- Modifications du lien entre nombre et espace au cours du développement.

L'effet « SNARC »

(Spatial Numerical Association of Response Codes)

(Dehaene, Bossini & Giraux 1993)

- Jugement de parité sur des chiffres de 0 à 9
- Dans certains blocs, la réponse « pair » est à main droite et la réponse « impair » à main gauche, dans d'autres blocs c'est le contraire.
- En conséquence, on obtient pour chaque nombre un temps de réaction à main droite et un temps de réaction à main gauche.
- Découverte fortuite: quelle que soit leur parité, on répond plus vite aux petits nombres avec la main gauche et aux grands nombres avec la main droite.

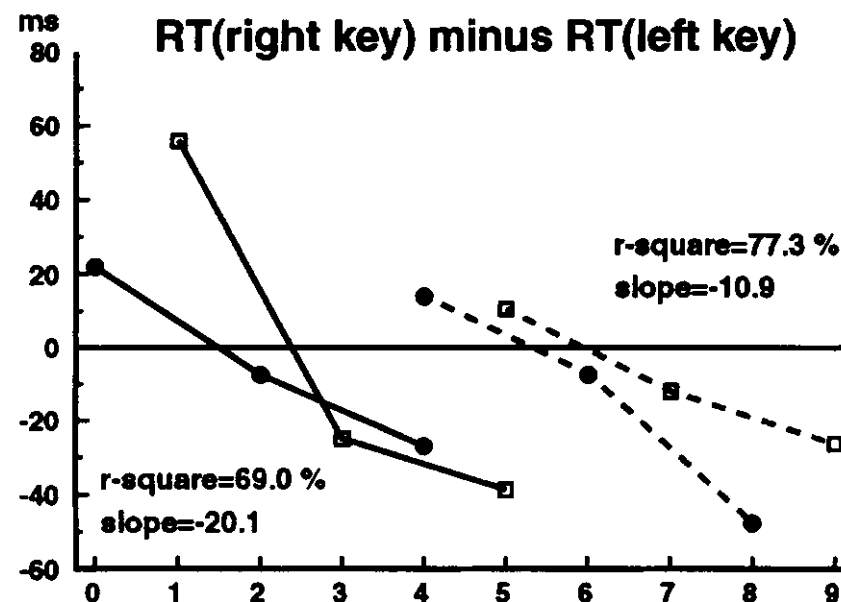


Quelques résultats expérimentaux sur l'effet SNARC

Chez l'enfant, l'effet apparaît *vers le CE2* (3rd grade) (Berch et al., 1999), à peu près au même moment où apparaissent les premiers effets de l'automatisation du lien entre chiffres et quantités (Girelli, JECP 2000).

Les *lettres* et autres séquences ordinales ne suscitent pas d'association automatique avec l'espace (Dehaene, Bossini & Giraux 1993; Fischer, 2003; Zorzi, 2006; Casarotti, 2007), à de rares exceptions près (Gevers et al., 2003)

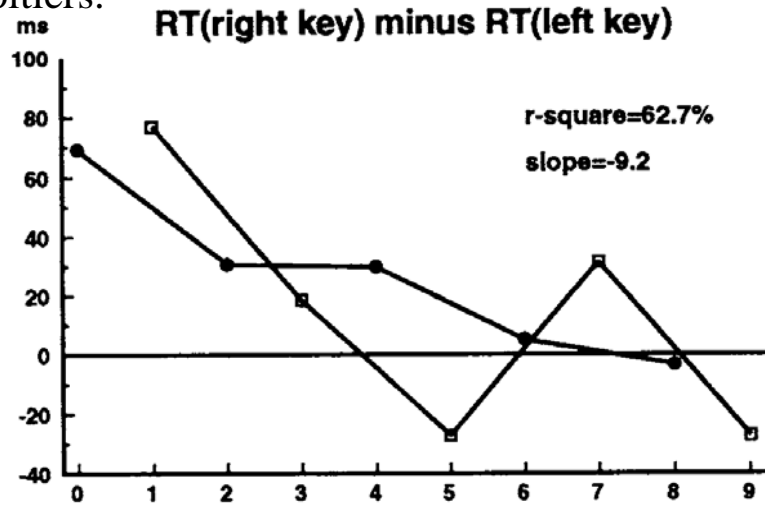
C'est la taille *relative* des nombres qui compte (par rapport à l'intervalle testé), pas la taille absolue (Dehaene, Bossini & Giraux 1993)



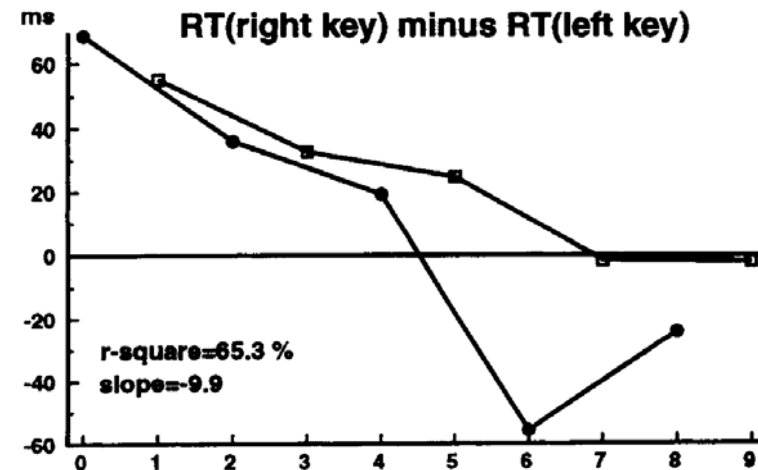
Les déterminants de la direction de l'effet SNARC

(Dehaene, Bossini & Giraux 1993)

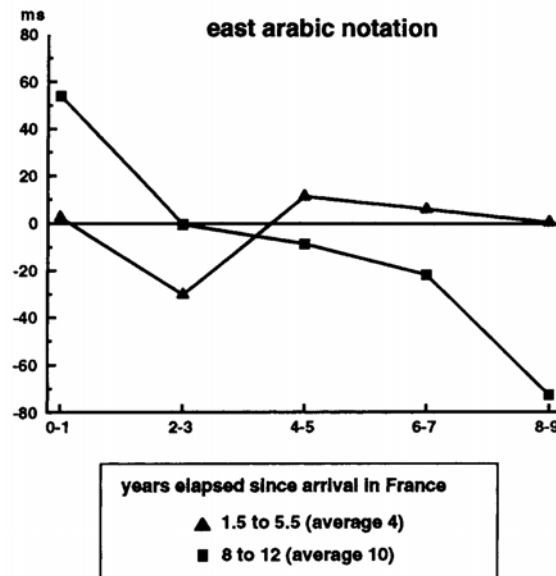
L'effet est identique chez les gauchers et chez les droitiers.



Il ne change pas quand on croise les mains (c'est l'espace qui compte, pas la main de réponse)



L'effet a tendance à s'inverser chez des sujets qui lisent de droite à gauche.



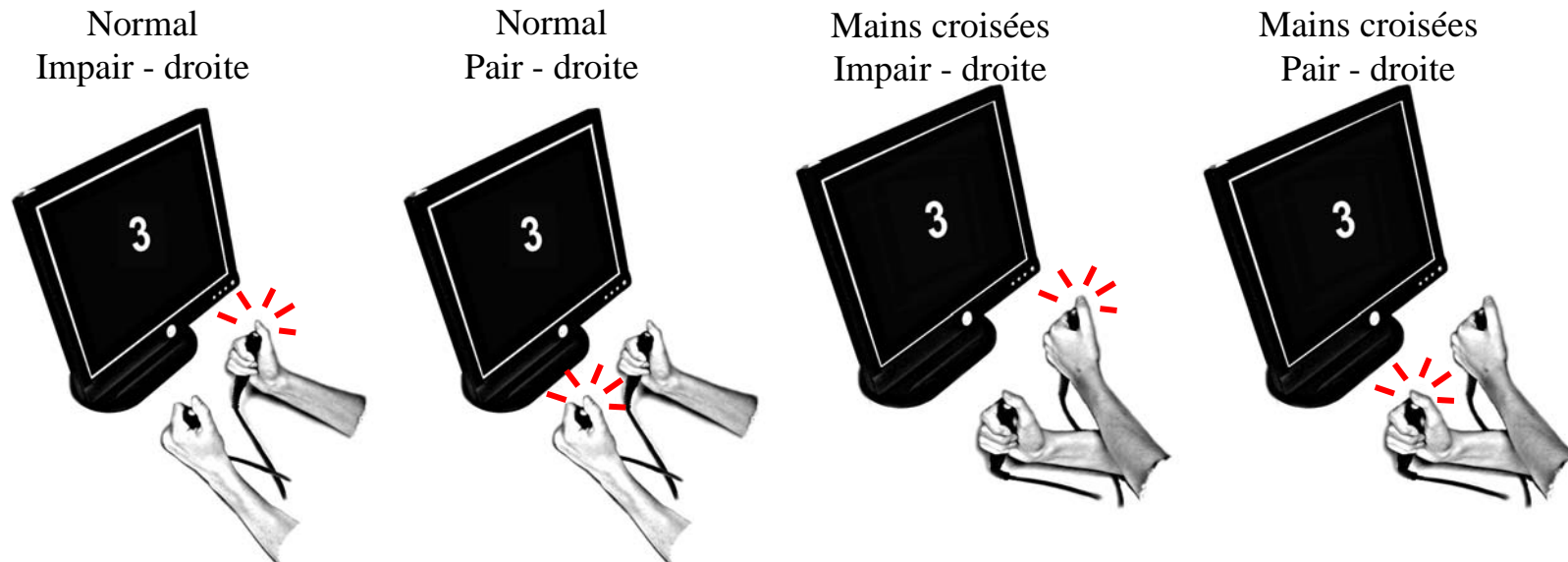
L'inversion de l'effet chez les lecteurs de droite à gauche est confirmée par les études de Zebian (2005) et de Fischer et coll. (soumis).

Cependant, le sens de la lecture n'est probablement qu'un des aspects d'un biais culturel plus vaste qui impose une direction préférentielle au sens du temps, du nombre, et de l'espace.

Exploration des bases cérébrales de l'effet SNARC

- Objectif: étudier les activations causées par les nombres dans les régions cérébrales qui codent pour l'espace
- 3 tâches en IRM fonctionnelle

1. Jugement de parité



Trois facteurs croisés:

Main (gauche ou droite); Moitié de l'espace (gauche ou droite); Taille du nombre (grand ou petit)

2. Saccades oculaires

Facteur: Direction des saccades (gauche ou droite)

3. Tâche d'arithmétique

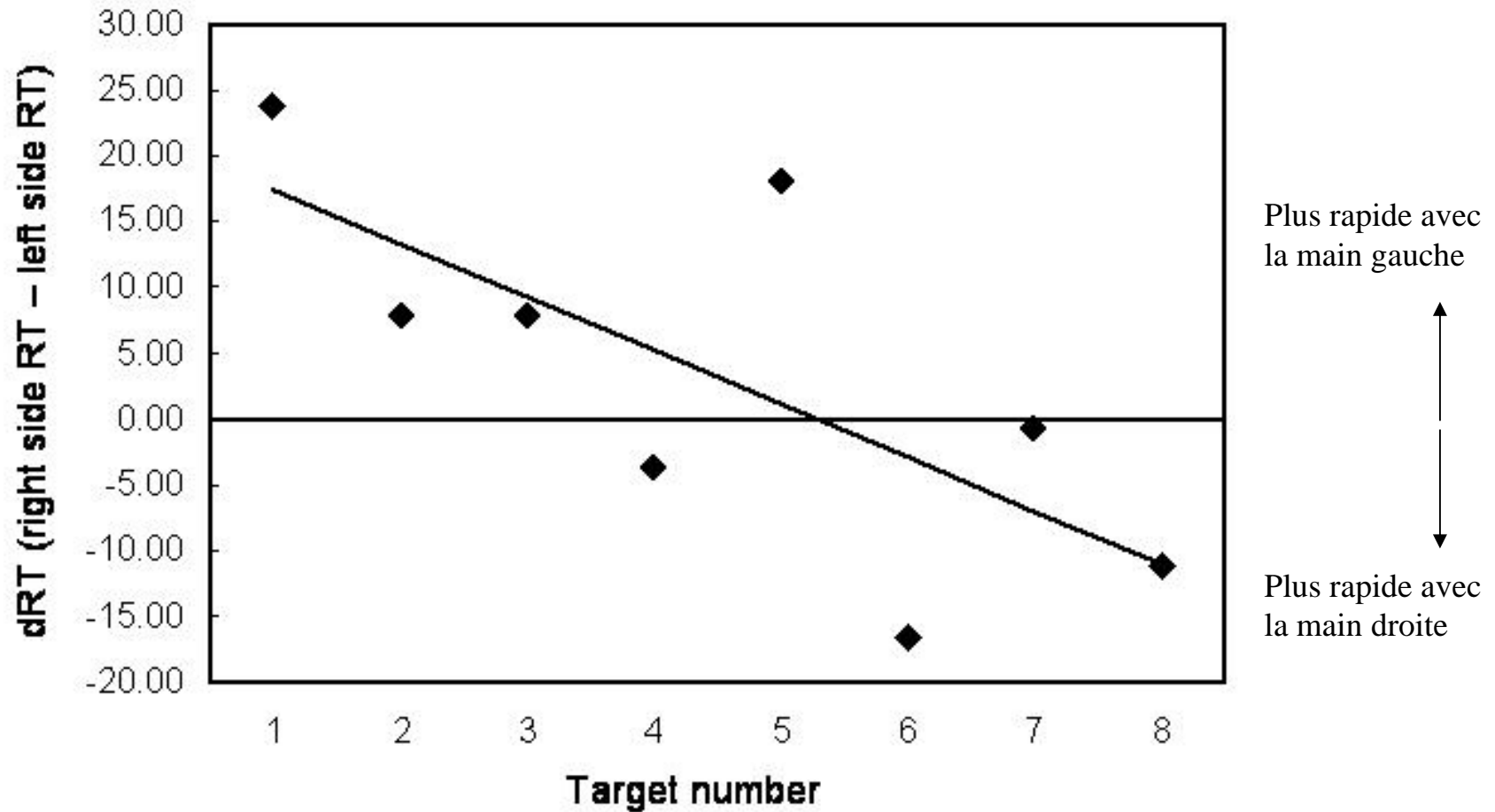
Activation évoquée par des soustractions par rapport à des phrases non-numériques

Hubbard, Pinel & Dehaene, article soumis

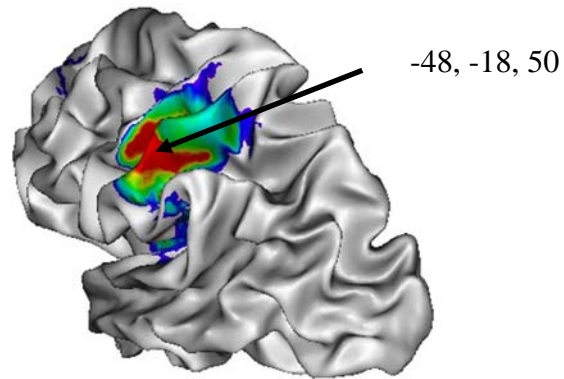
Données comportementales recueillies dans l'IRM

Réplication de l'effet SNARC

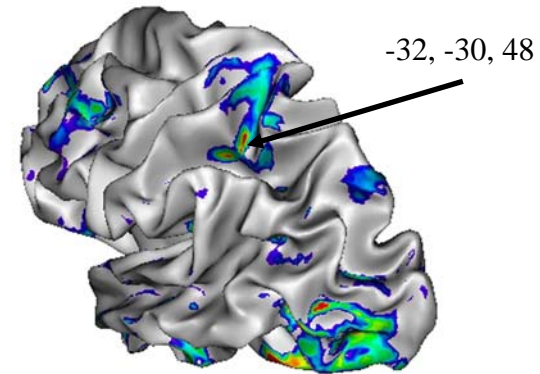
Association avec le côté de l'espace et non la main de réponse



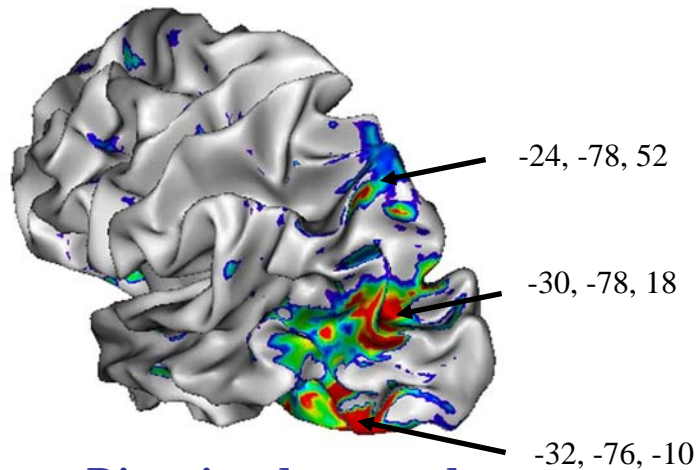
Quatre régions d'intérêt dans le lobe pariétal



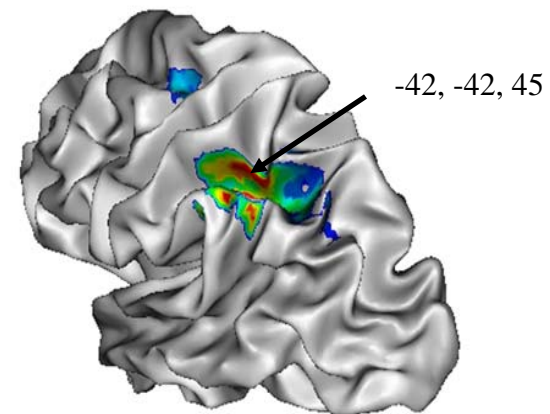
**Main de réponse
droite > gauche**



**Moitié de l'espace
droite > gauche**



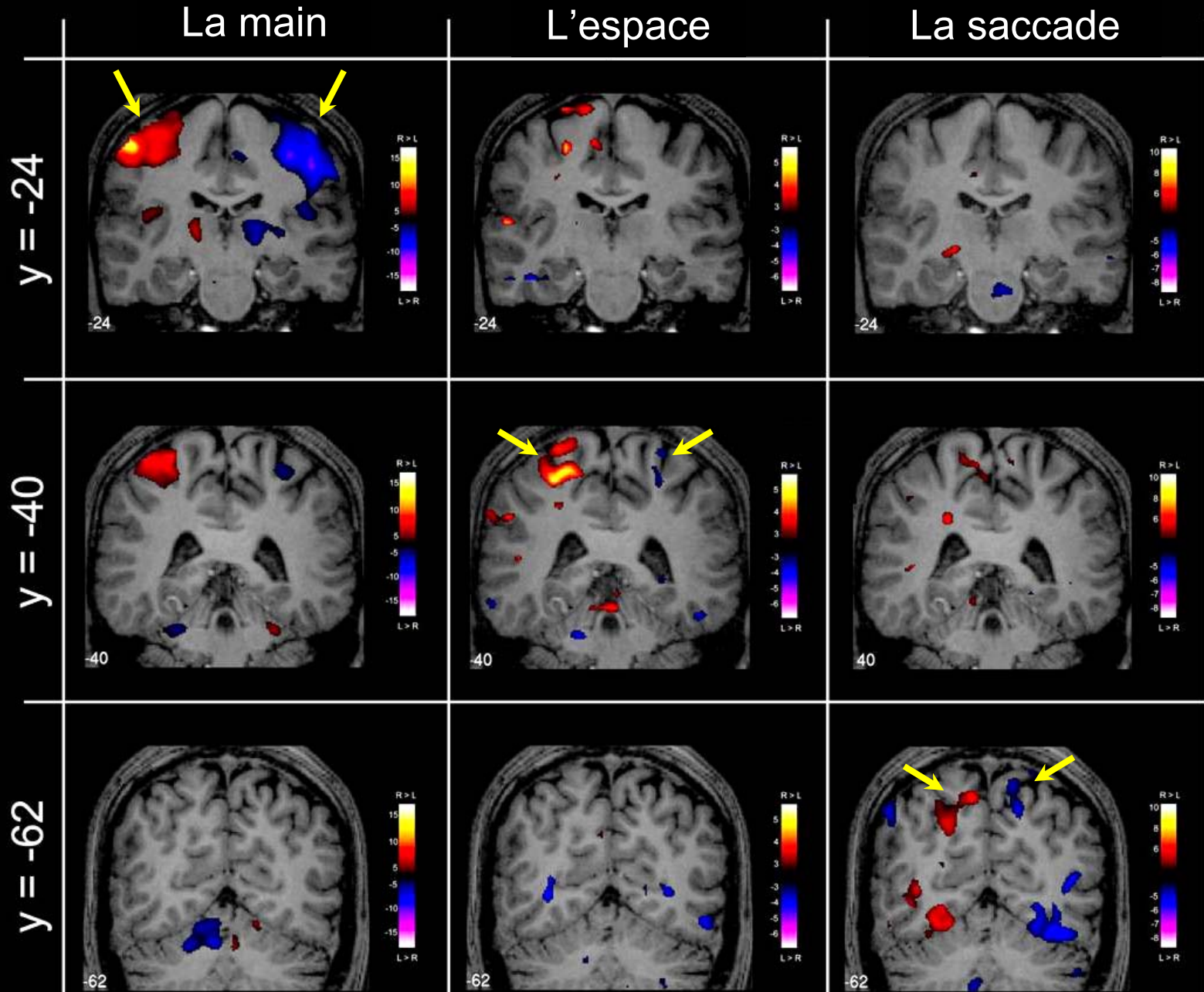
**Direction des saccades
droite > gauche**



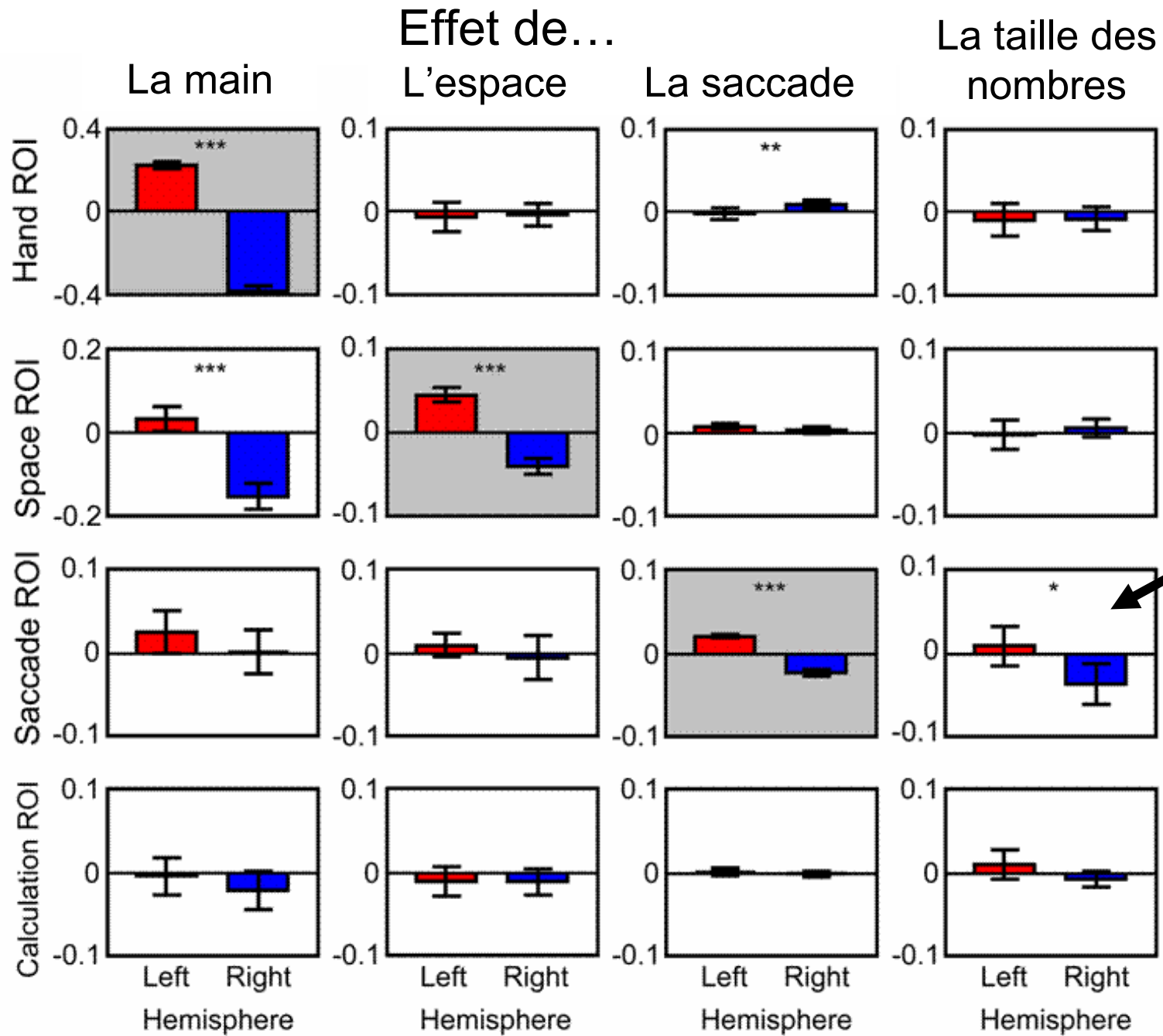
**Arithmétique
Soustractions (A+V) – Phrases**

Contrastes selon le côté de...

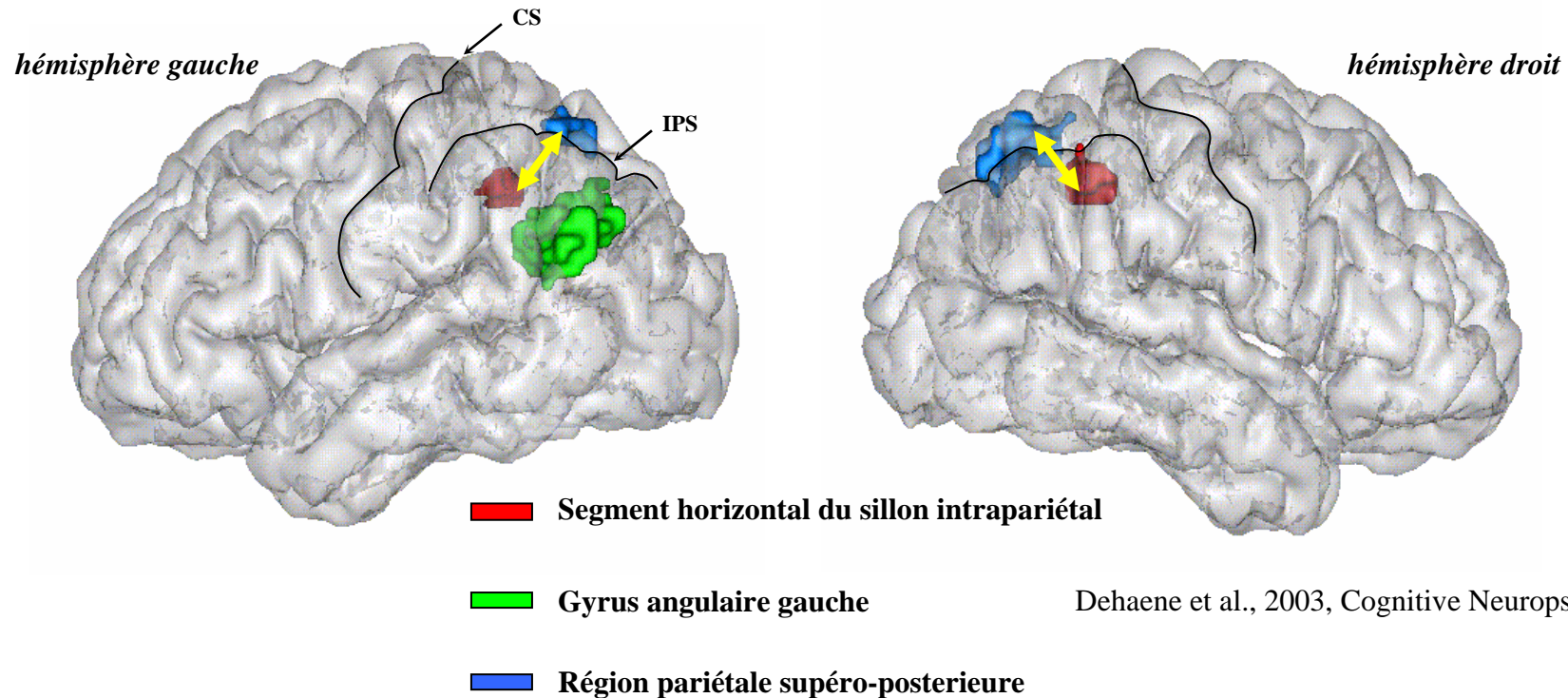
Coupes
coronales
à
différents
niveaux



Régions



Conclusion: l'interaction entre les aires pariétales VIP et LIP pourrait être responsable de l'association nombre - espace



- Le traitement des nombres fait appel à une région intrapariétale proche de l'aire VIP (en rouge).
- VIP possède des connexions anatomiques directes et bidirectionnelles avec l'aire LIP.
- Tant VIP que LIP, chez l'homme comme chez le singe, contiennent des cartes spatiales rétinotopiques, spatiotopiques et/ou centrées sur la tête (Duhamel, Sereno...).
- Herrera et al (2008): une tâche concurrente de mémoire visuo-spatiale abolit l'effet SNARC, alors qu'une tâche de mémoire phonologique ne l'affecte pas.

Plan du cours

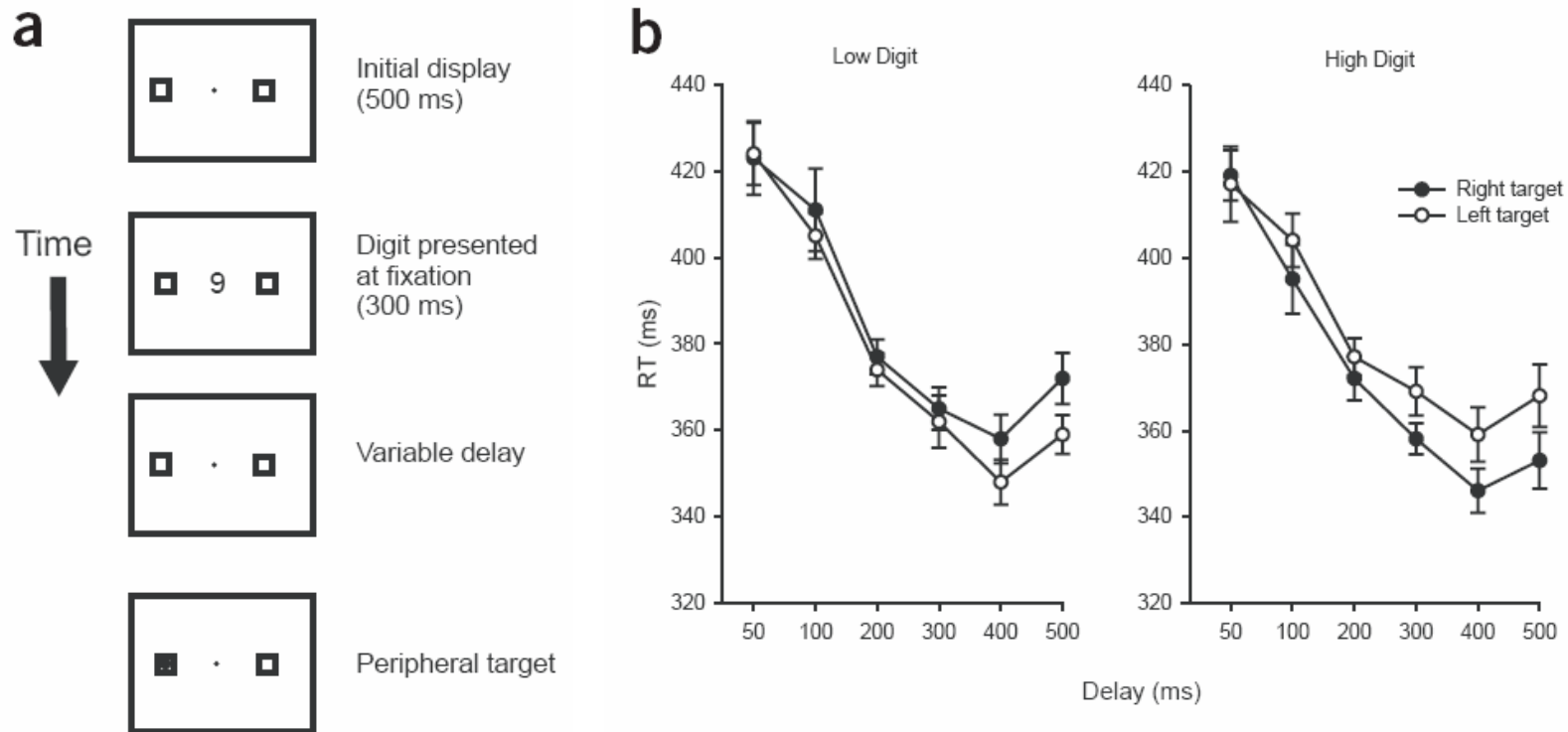
- Association automatique entre nombre et espace: l'effet SNARC
- Interactions entre nombre et attention visuo-spatiale
- Biais spatiaux au cours du calcul
- Synesthésie numérique
- Modifications du lien entre nombre et espace au cours du développement.

La simple présentation d'un nombre peut attirer l'attention visuo-spatiale

Fischer et al., *Nature Neuroscience*, 2003

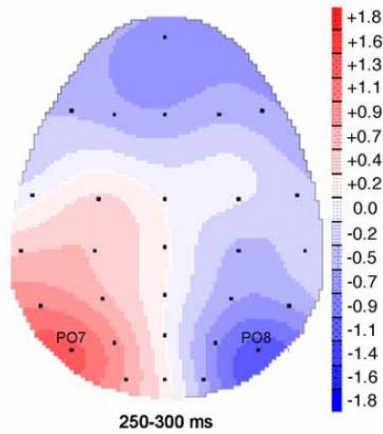
Tâche = Détection d'un simple flash lumineux

La détection est plus rapide dans l'hémichamp droit après un grand chiffre, et dans l'hémichamp gauche après un petit chiffre.



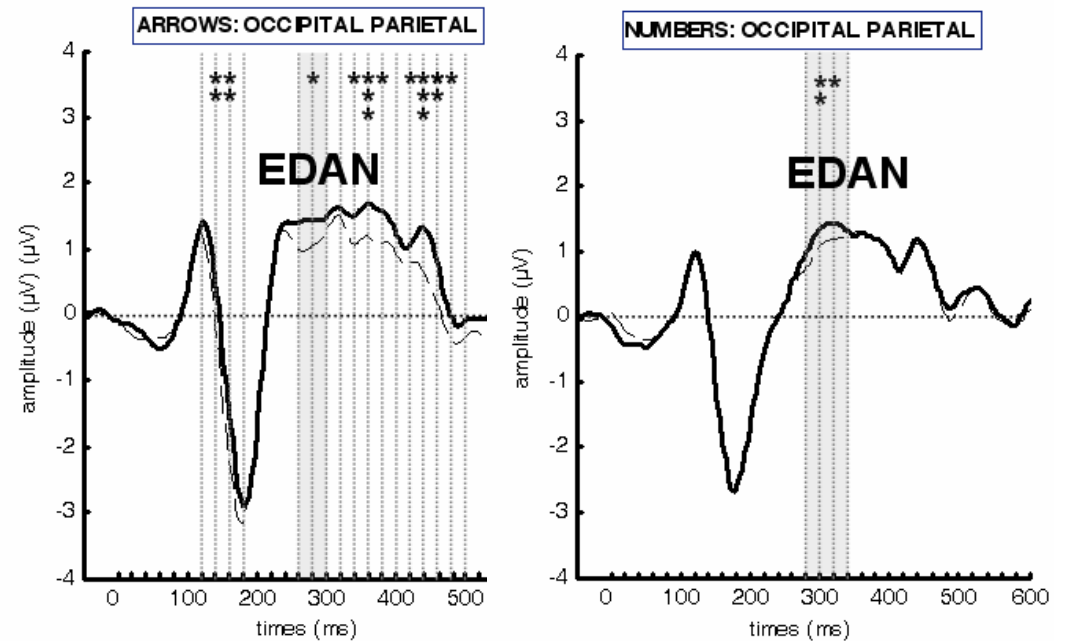
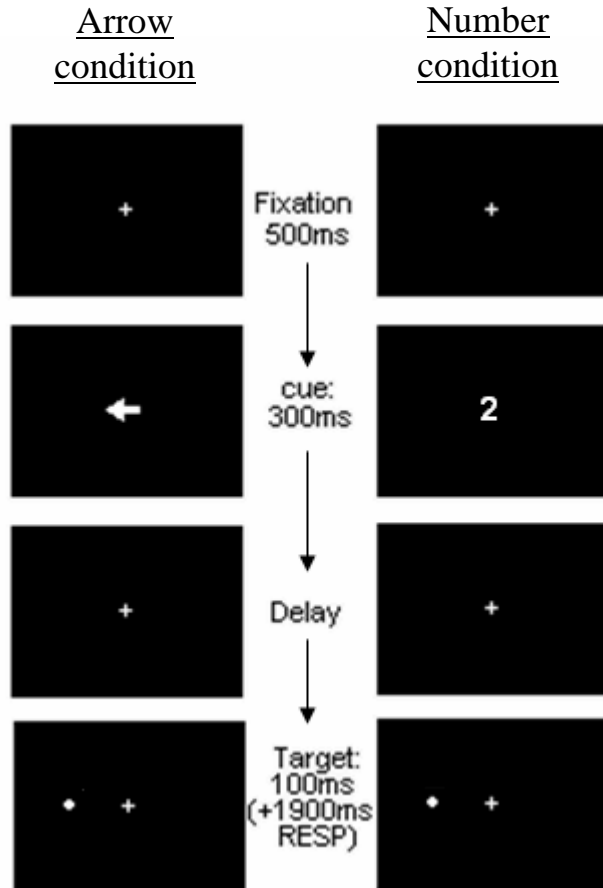
Toutefois l'effet est faible ou absent lorsque le nombre est totalement dépourvu de pertinence pour la tâche. Il est probable qu'une composante partiellement stratégique soit impliquée (Galfano et al., 2007).

Les nombres attirent-ils automatiquement l'attention? Une étude en potentiels évoqués



Van der Stigchel et al., (2006)

- L'orientation de l'attention visuo-spatiale engendre une onde EDAN (early directing attention negativity, ~300 ms)
- La présentation d'un nombre, même non pertinent, génère-t-elle une onde EDAN?
- Tâche: Détecter le plus vite possible un point qui apparaît à droite ou à gauche de la fixation, précédé d'une flèche ou d'un nombre non prédictif.



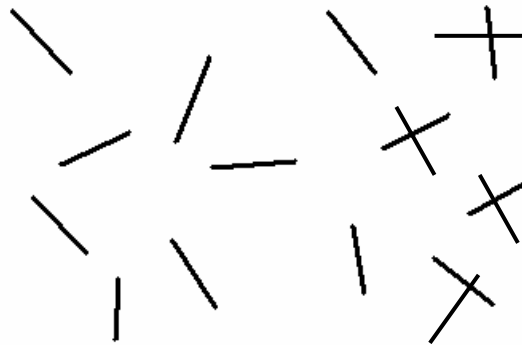
————— « Ipsilateral » arrows ou nombres
 induce a greater positivity than
 ————— « Contralateral » arrows ou nombres

Quelques signes cliniques d'héminégligence spatiale

Cortical areas damaged in spatial neglect

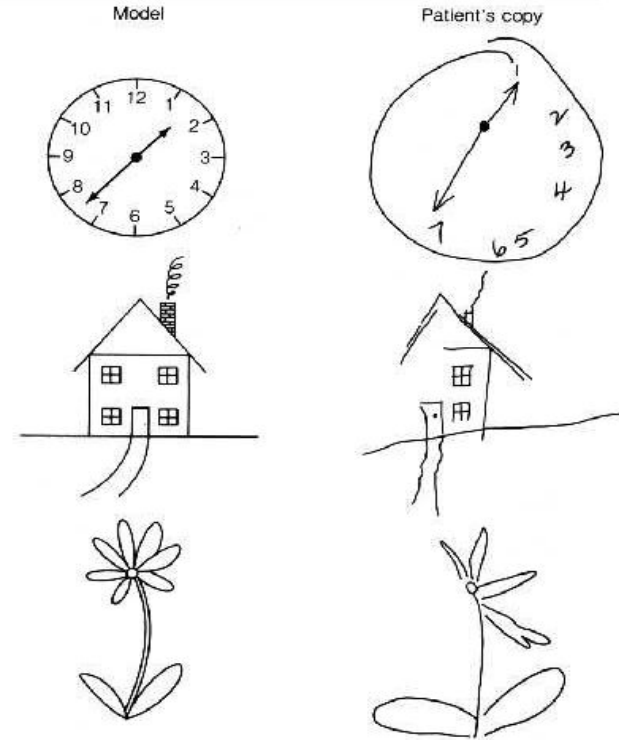


Test de barrage de lignes

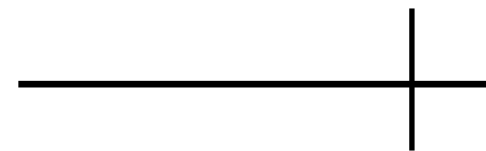


Copie de dessins

Figure 13. Drawings by a patient with left-side neglect.



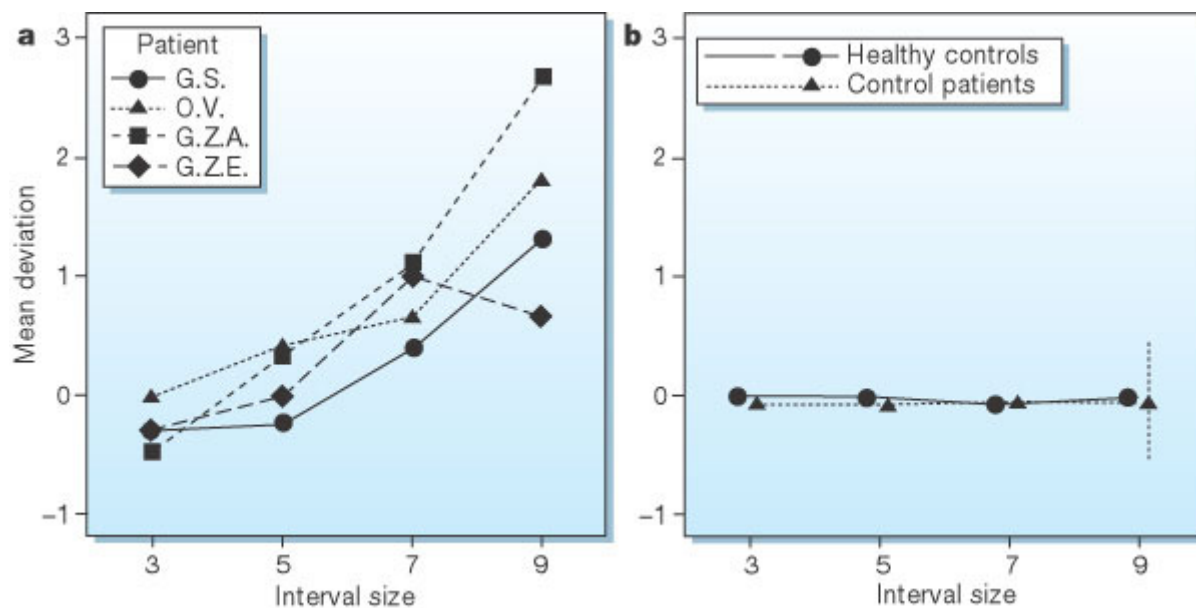
Bisection de lignes



L'héminégligence s'étend à la ligne numérique mentale

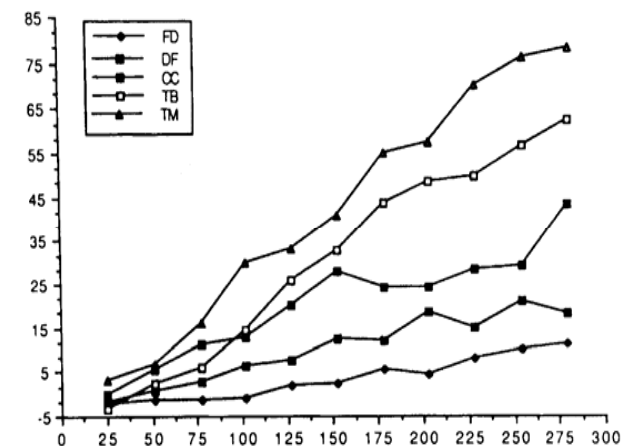
Zorzi, Priftis, & Umiltà, *Nature*, 2002,

- Tâche de bisection numérique:
- « Quel nombre tombe au milieu de 11 et 19 ? »
(entrée auditive, réponse verbale)
- Réponse : dix-sept !!!



L'erreur de bisection de lignes est modulée par l'intervalle numérique, tout comme la bisection de lignes physiques est modulée par la longueur de la ligne

(Halligan & Marshall, 1988).

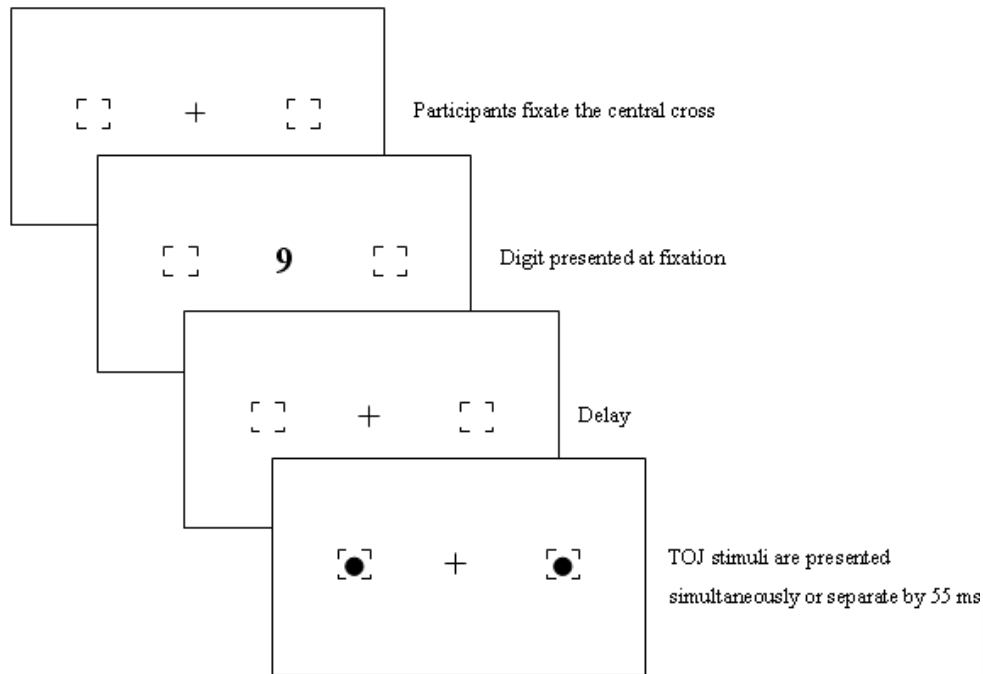


- Nombreuses répliquions: Doricchi et al., 2005, *Nat. Neurosc.*; Priftis et al., 2006, *J. Cognitive Neurosc.*; Zorzi et al., 2006, *Neuropsychologia*; Zamarian et al., 2007, *Cortex*
- La bisection de nombres, comme l'héminégligence spatiale, peut être compensée partiellement par le port de prismes (Rossetti et al., 2004, *Psych. Science*)

L'association nombre-espace peut affecter des jugements psychophysiques très simples

Casarotti et al., *Cognition*, 2007

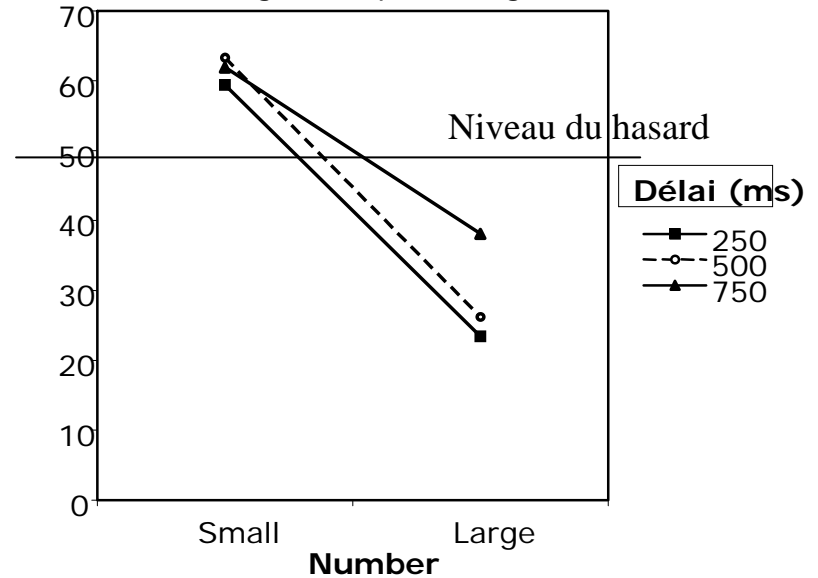
Tâche = Jugement de l'ordre dans lequel apparaissent deux flashes lumineux.



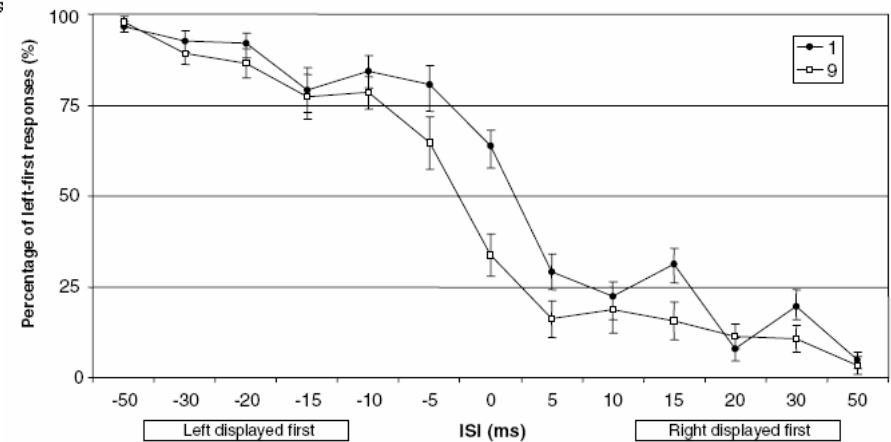
L'effet n'existe que si l'on doit rapporter l'identité du nombre à la fin de l'essai.

Les lettres ne produisent aucun biais de réponse.

Essais où les deux flashes sont simultanés
Pourcentage de réponses "gauche"

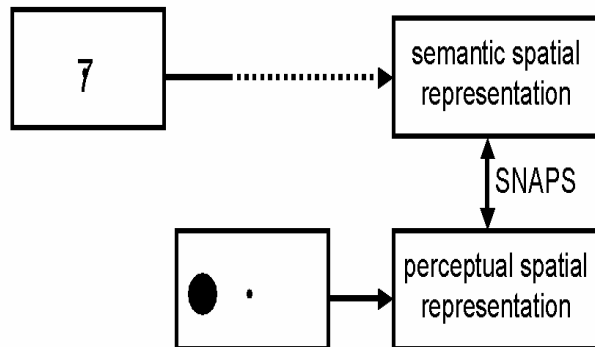
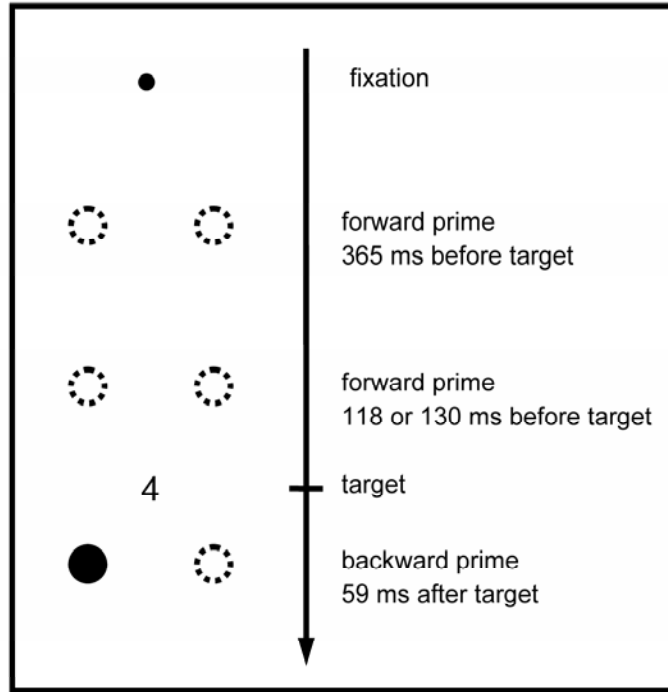


Essais où l'intervalle entre les deux flashes varie

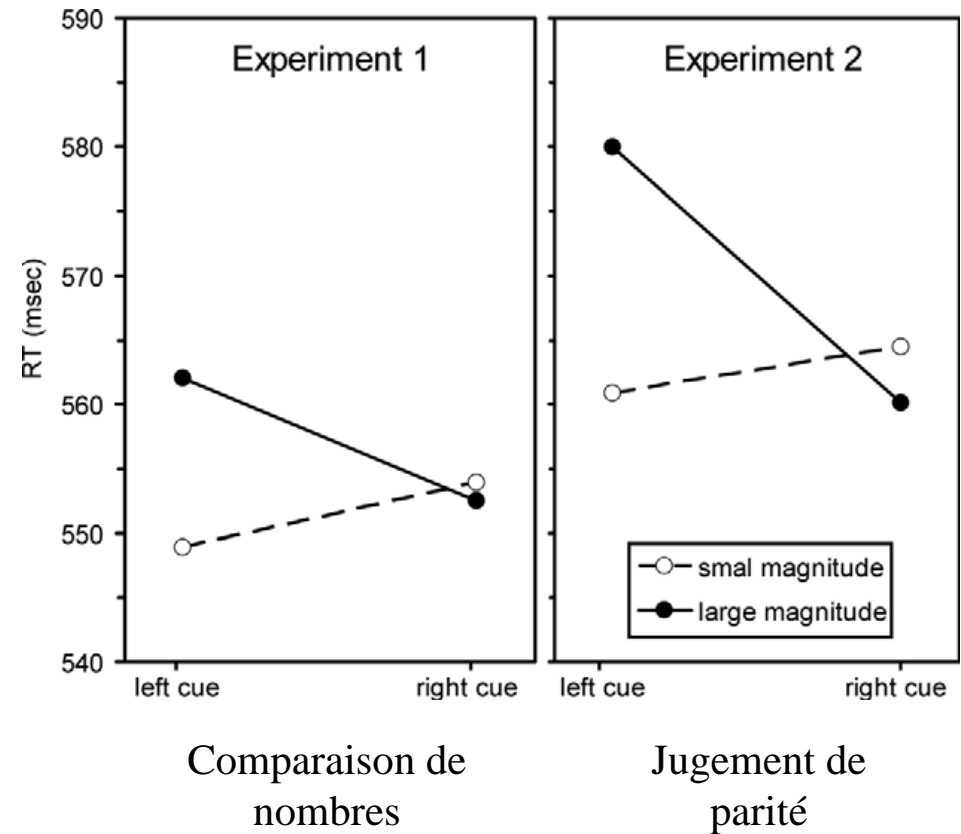


Les interactions entre attention visuelle et nombre sont bidirectionnelles

(Stoianov et al., *Cognition* 2008)



Un indice attentionnel présenté *juste après* un chiffre peut faciliter son traitement.



Un effet plus « exotique »: Interaction entre nombre et action

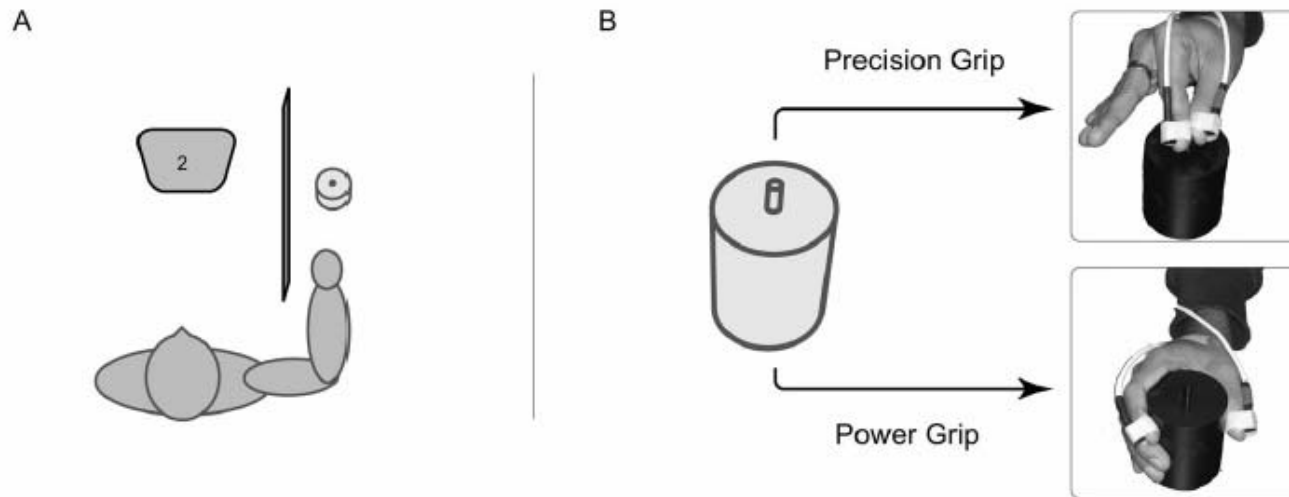
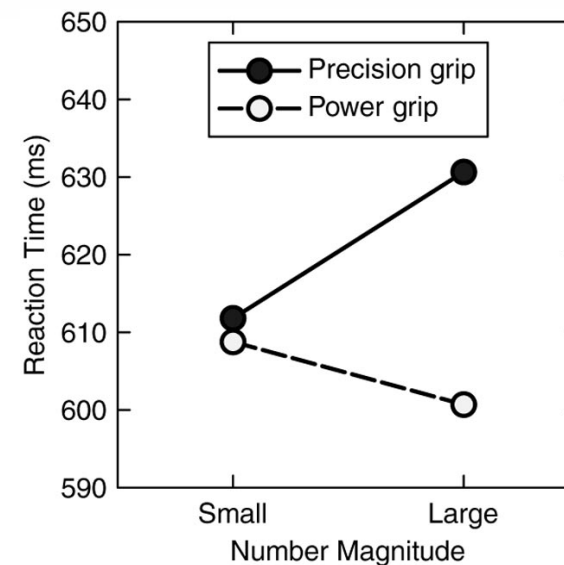


Figure 1. Basic experimental setup. A: Participants sat at a table with a computer screen and a manipulandum. An opaque screen obscured the to-be-grasped object and the right hand from view. B: The object consisted of two segments: a large cylinder at the bottom affording a power grip and a small cylinder at the top affording a precision grip.

Tâche: jugement de parité, réponse avec une pince manuelle étroite ou large

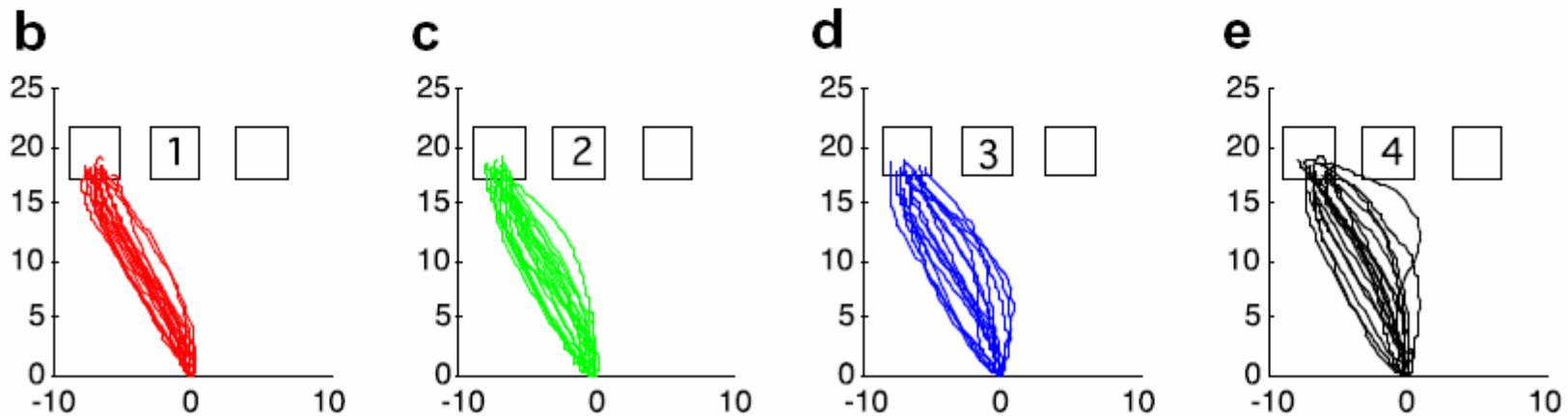
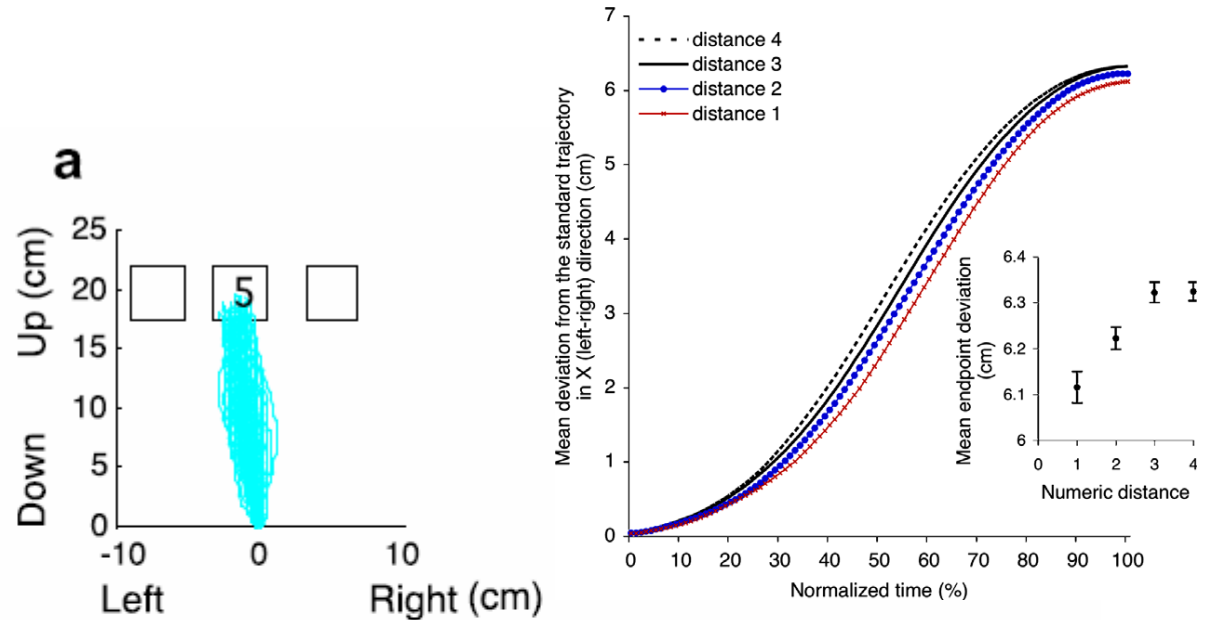
Lindemann, O., Abolafia, J. M., Girardi, G., & Bekkering, H. (2007). Getting a grip on numbers: numerical magnitude priming in object grasping. *J Exp Psychol Hum Percept Perform*, 33(6), 1400-1409.



Interaction entre nombre et trajectoire spatiale

-Tâche: Comparaison de chiffres avec 5. Pointer vers le carré de gauche si $n < 5$, vers le milieu si $n = 5$, vers le carré de droite si $n > 5$

- La trajectoire montre une plus grande dispersion pour les petites distances, et un biais systématique en fonction de la taille du nombre.



Autres interactions entre le nombre et les autres dimensions spatiales et temporelles

- Numérosité et durée perçue d'un stimulus visuel (Dormal, Seron et coll., 2006)
- Nombre et doigts (Di Luca et coll., 2006)

Conclusion:

Interactions entre le nombre, l'espace et le temps – trois grandeurs codées au sein du lobe pariétal

A Theory of Magnitude (ATOM; Walsh, 2003)

Plan du cours

- Association automatique entre nombre et espace: l'effet SNARC
- Interactions entre nombre et attention visuo-spatiale
- **Biais spatiaux au cours du calcul**
- Synesthésie numérique
- Modifications du lien entre nombre et espace au cours du développement.

Tâches d'addition et de soustraction non-symboliques



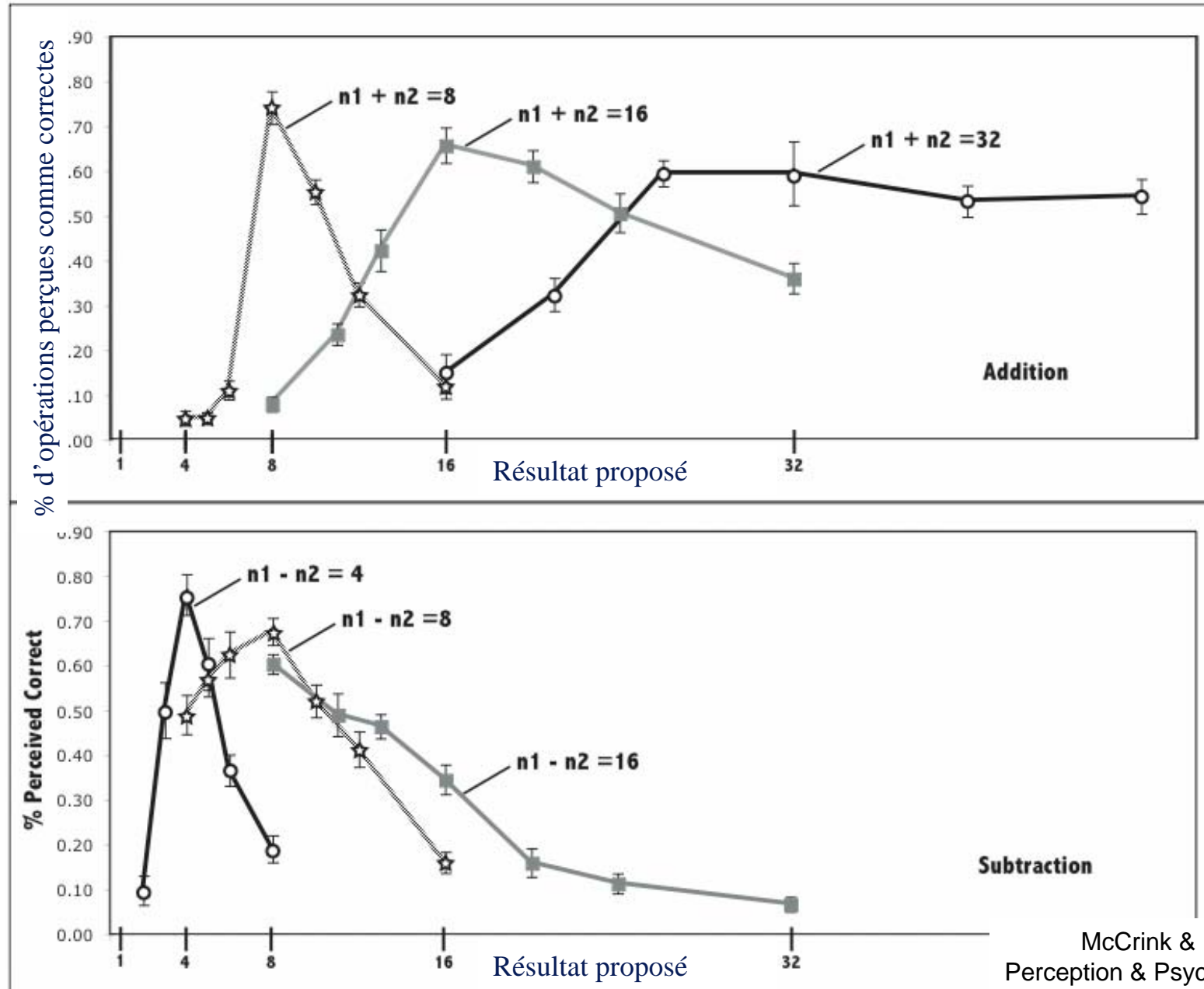
- McCrink and Wynn (2004)

Les enfants de 9 mois sont surpris lorsque le résultat est grossièrement faux

-McCrink and Dehaene (2007)

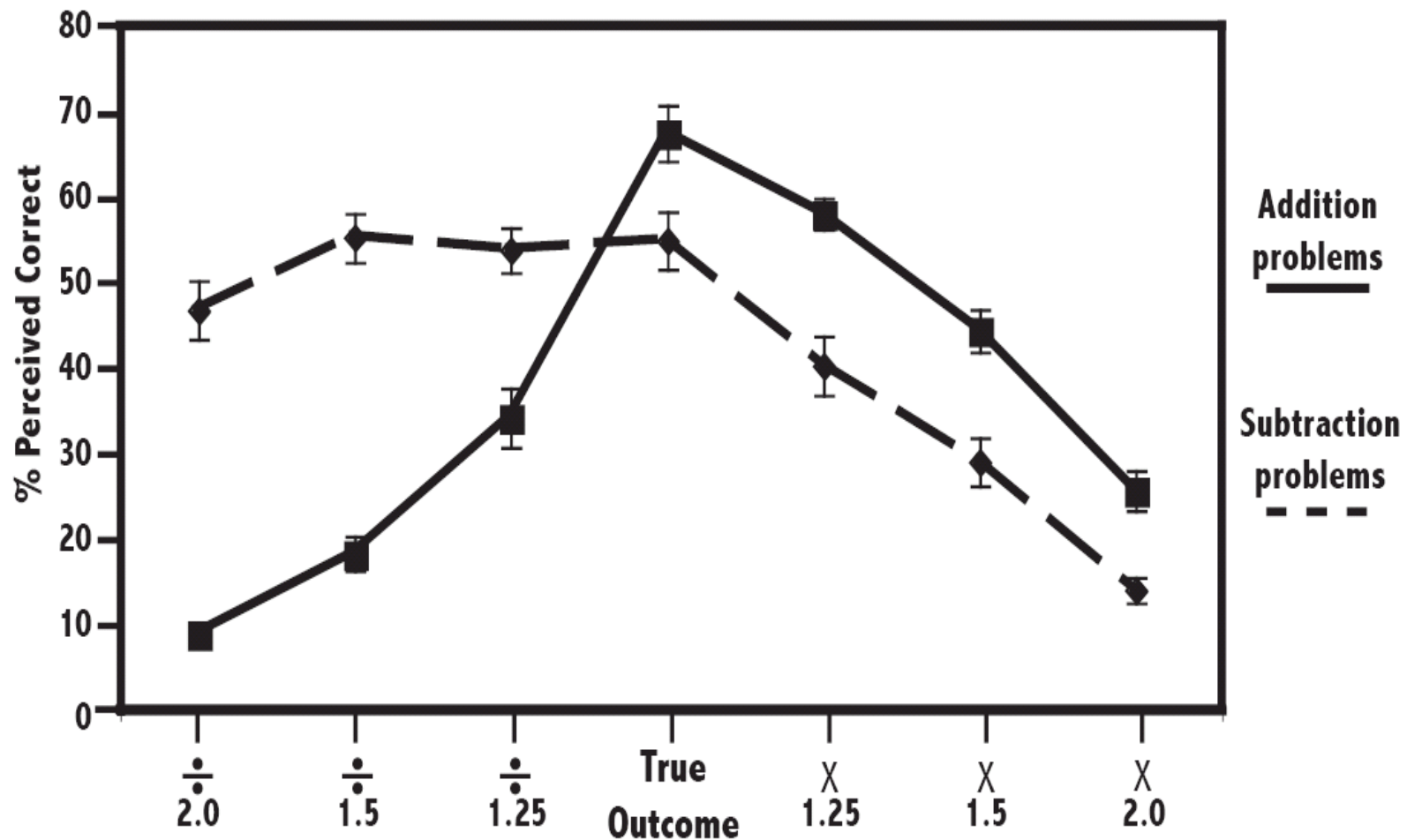
Etude psychophysique où l'on varie la distance entre le résultat proposé et le résultat juste.

Psychophysique du calcul mental



Un « effet d'inertie » dans les opérations arithmétiques?

Les additions sont biaisées vers les grands nombres
Les soustractions sont biaisées vers les petits nombres



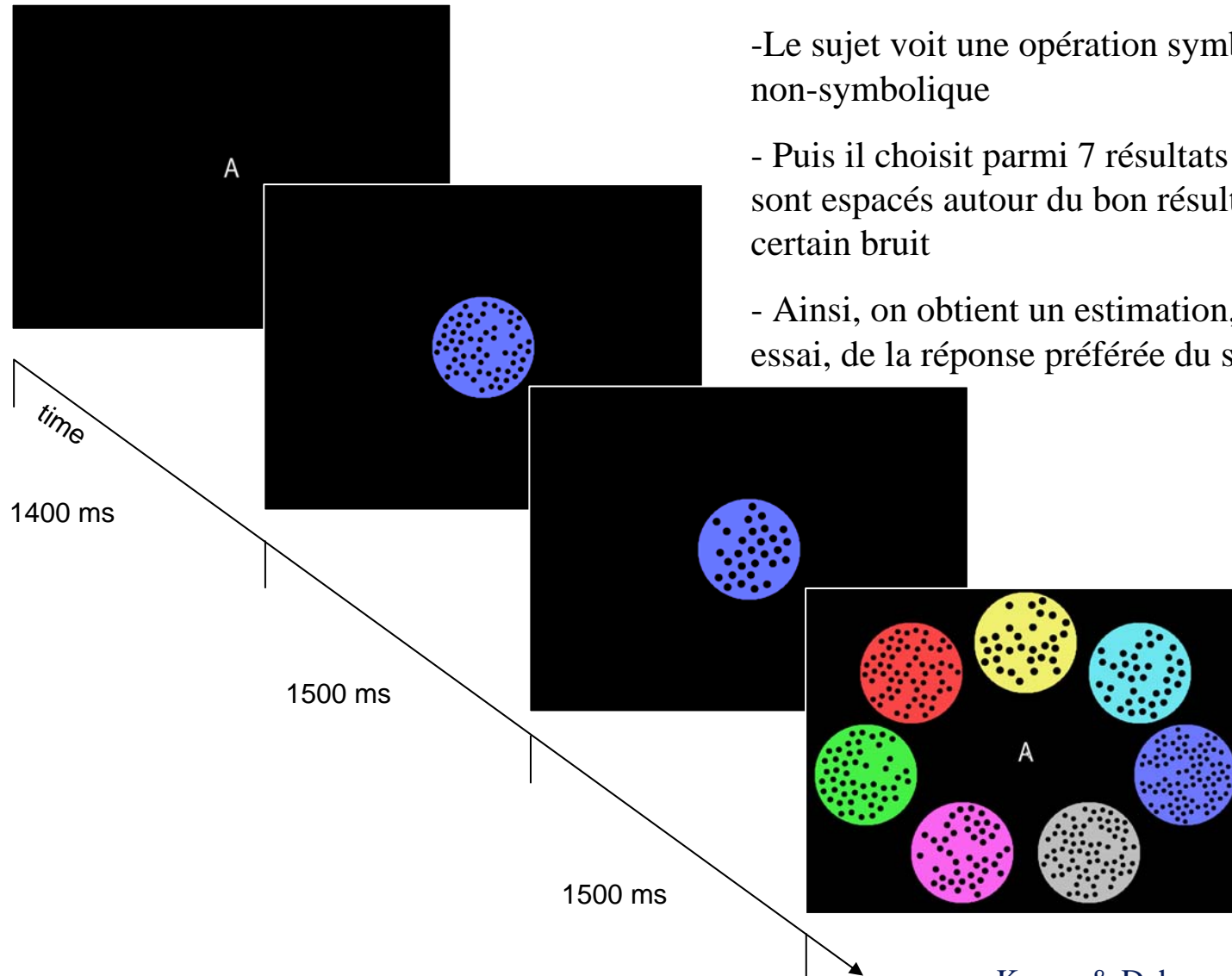
Une meilleure méthode de mesure de la précision du calcul approximatif

A chaque essai

-Le sujet voit une opération symbolique ou non-symbolique

- Puis il choisit parmi 7 résultats possibles qui sont espacés autour du bon résultat +/- un certain bruit

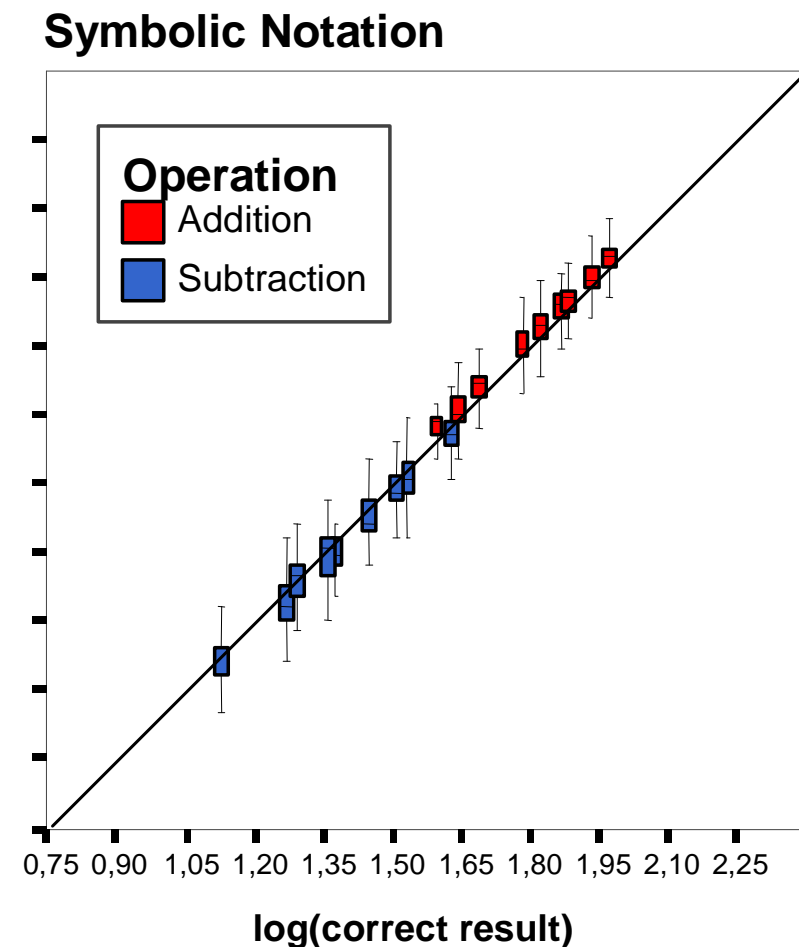
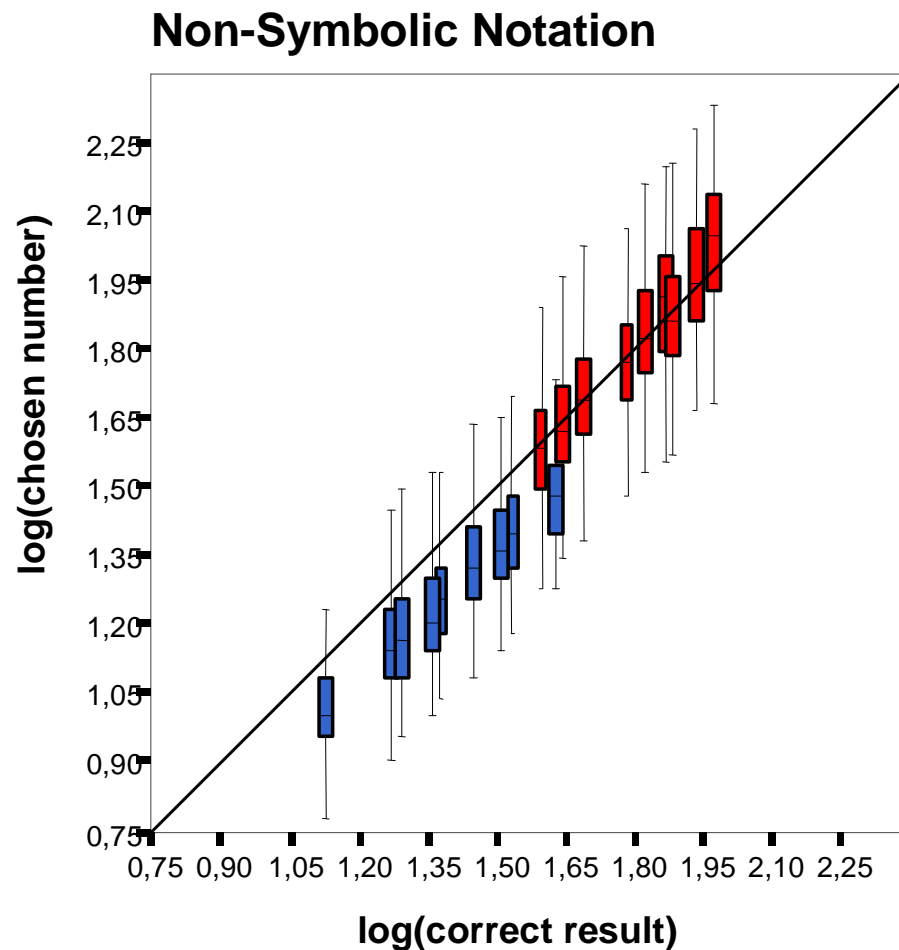
- Ainsi, on obtient une estimation, à chaque essai, de la réponse préférée du sujet



Un « effet d'inertie » dans les opérations arithmétiques?

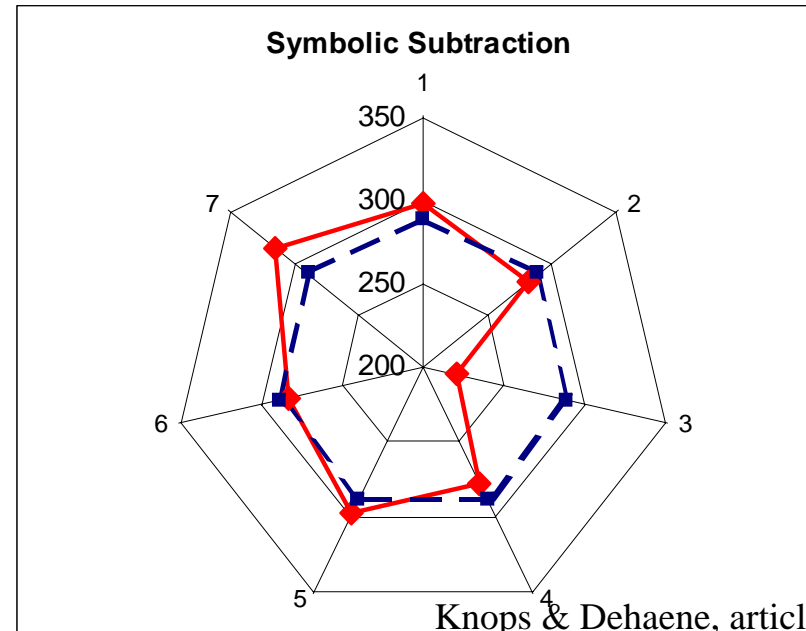
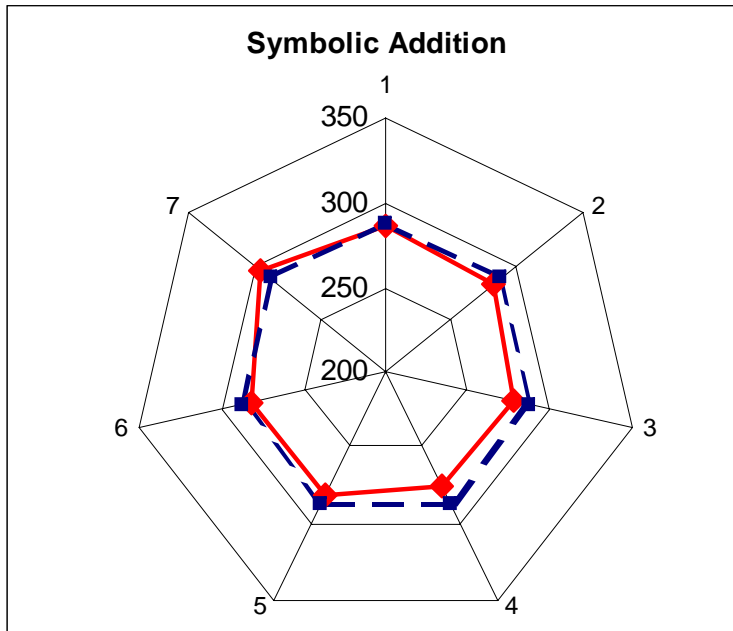
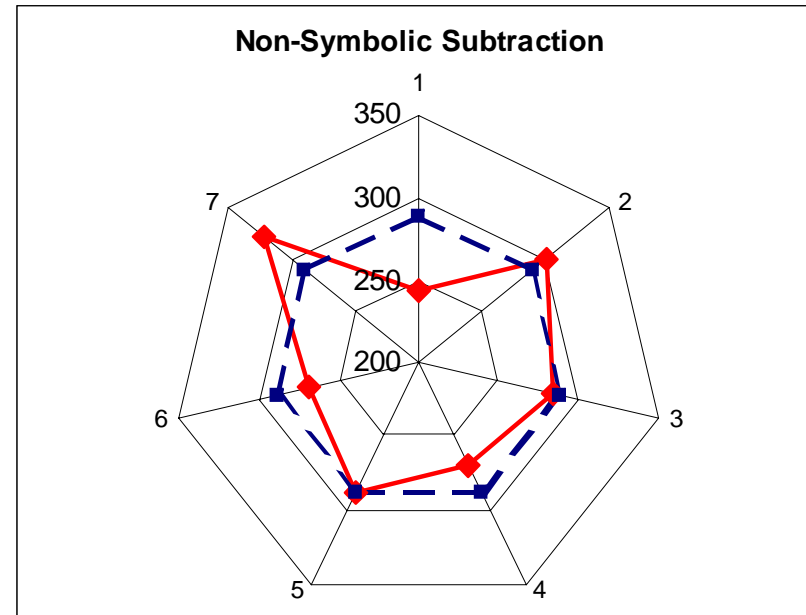
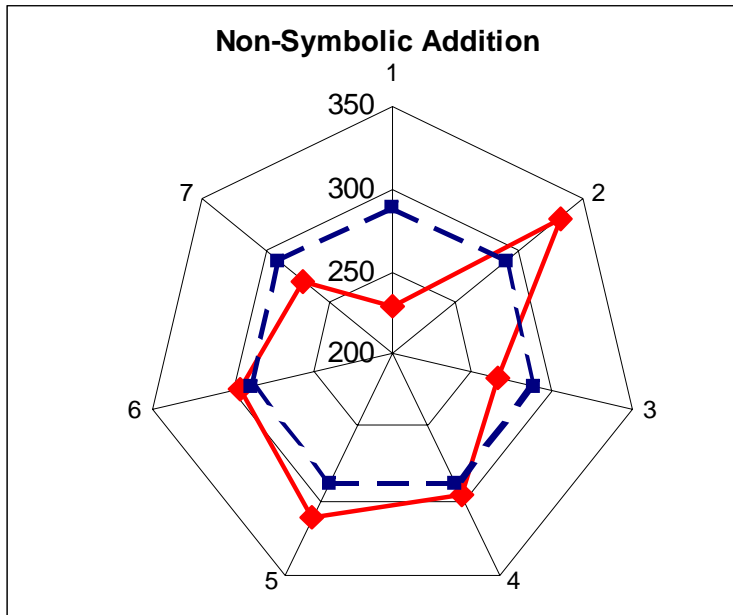
Les additions sont biaisées vers les grands nombres
Les soustractions sont biaisées vers les petits nombres

L'effet existe pour les opérations non-symboliques, mais aussi, dans une moindre mesure, pour les opérations symboliques approximatives



Un nouvel effet de biais spatial

L'addition biaise les choix vers le côté droit, la soustraction vers le côté gauche



Recouvrement entre l'activation évoquée par le calcul, l'aire VIP (mouvement tactile ou visuel) et les aires LIP et FEF (saccades)

En rouge: régions activées
lors d'un calcul mental
symbolique

En vert: régions activées
par le mouvement tactile
ou visuelle (localisant la
région VIP)

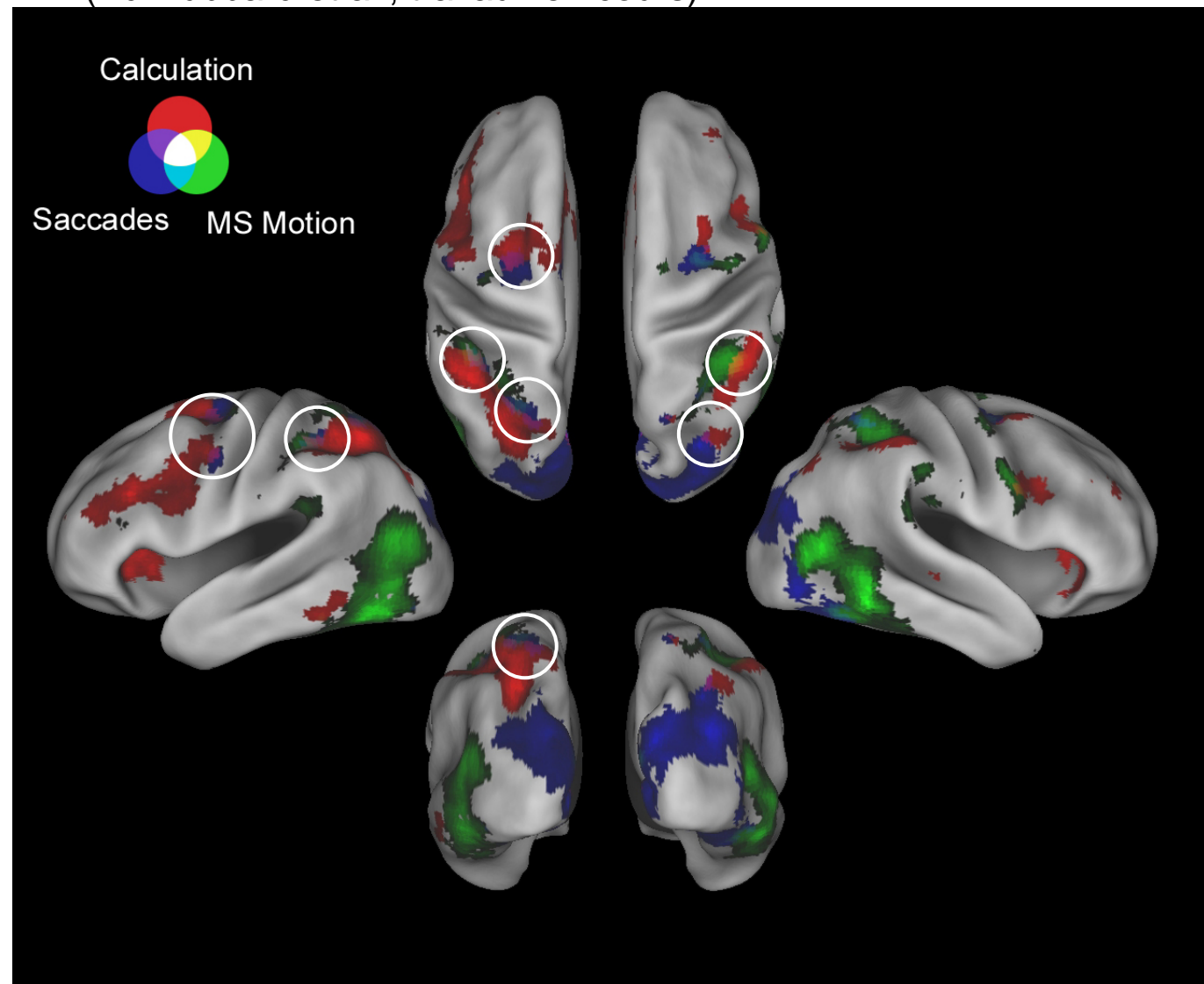
→ Recouvrement entre
l'aire VIP et le calcul
mental

→ En bleu: régions activées
par les saccades visuelles

→ Recouvrement dans
l'aire LIP mais aussi les
champs frontaux
oculogyres (*frontal eye
fields*)

→ Forte corrélation entre
les contours précis des
deux activations

(Ed Hubbard et al., travaux en cours)



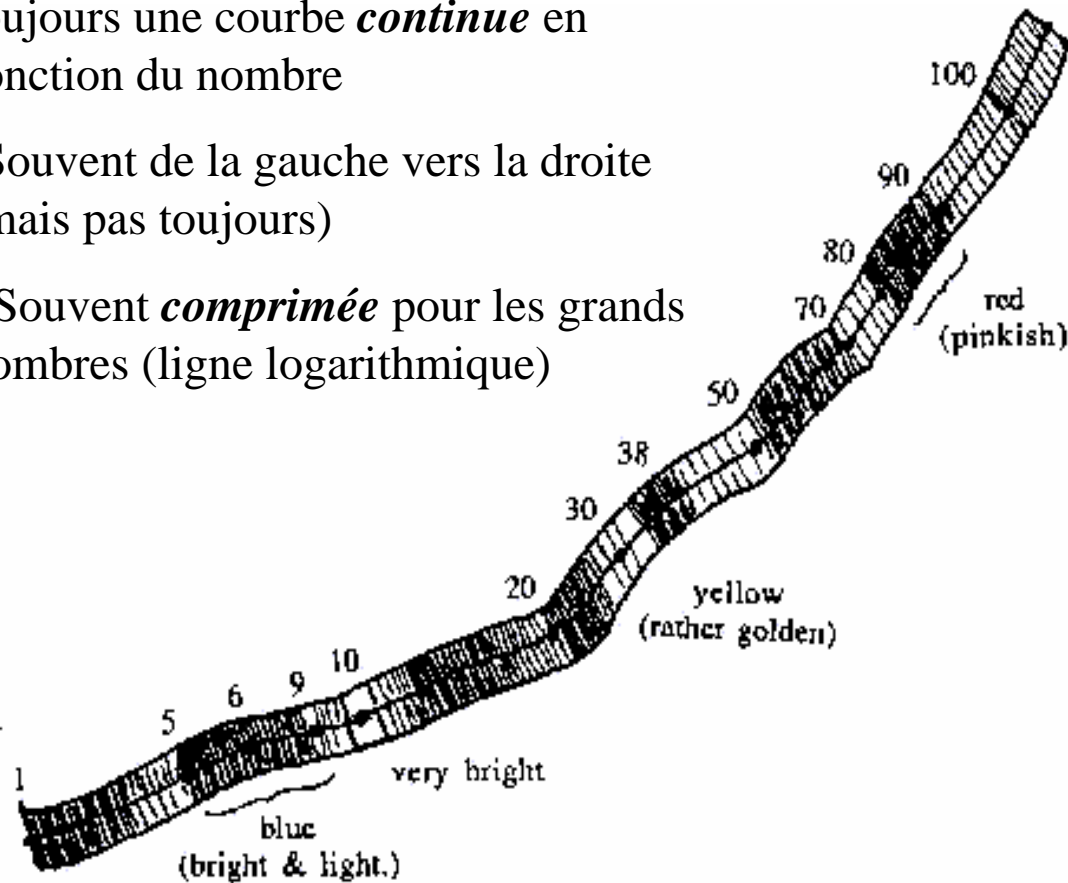
Plan du cours

- Association automatique entre nombre et espace: l'effet SNARC
- Interactions entre nombre et attention visuo-spatiale
- Biais spatiaux au cours du calcul
- **Synesthésie numérique**
- Modifications du lien entre nombre et espace au cours du développement.

Les "formes numériques"

Quelques caractéristiques importantes:

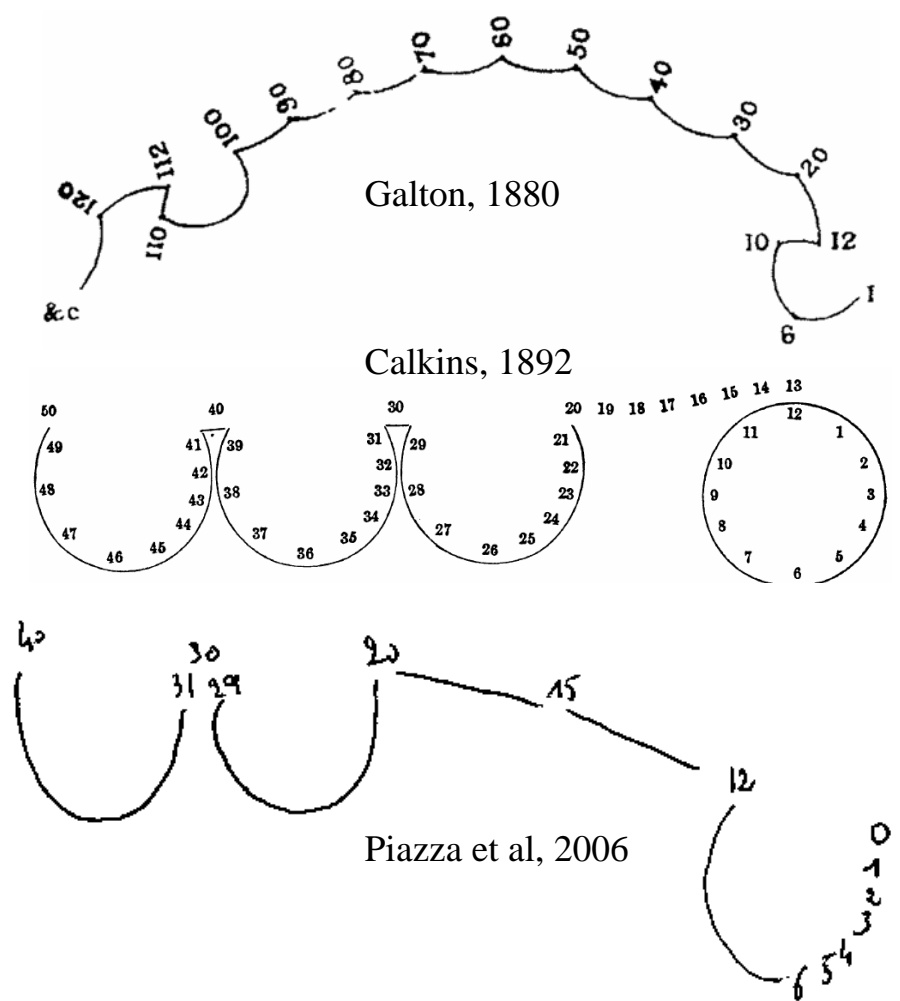
- La représentation décrit presque toujours une courbe *continue* en fonction du nombre
- Souvent de la gauche vers la droite (mais pas toujours)
- Souvent *comprimée* pour les grands nombres (ligne logarithmique)



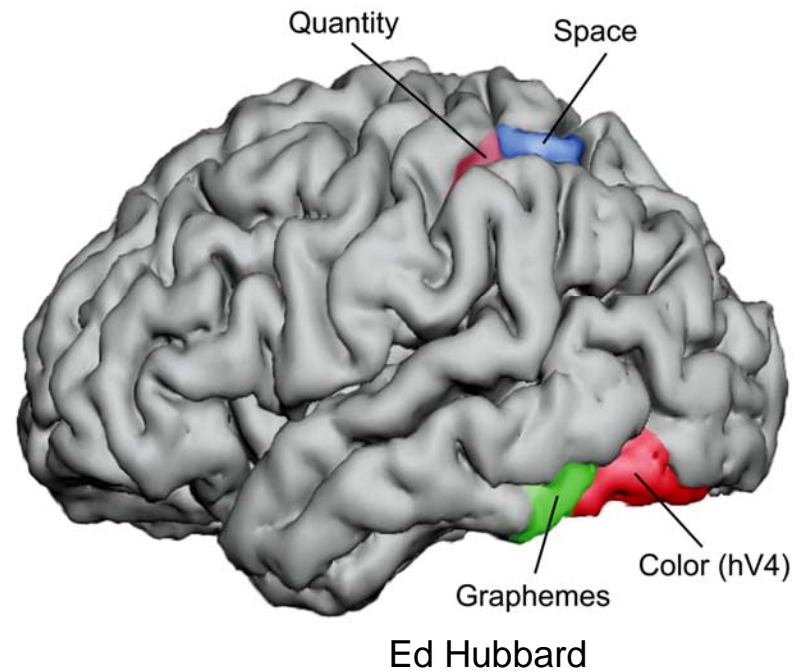
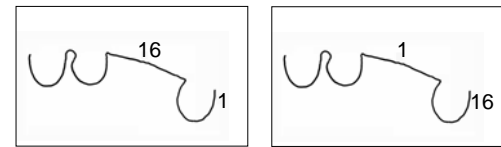
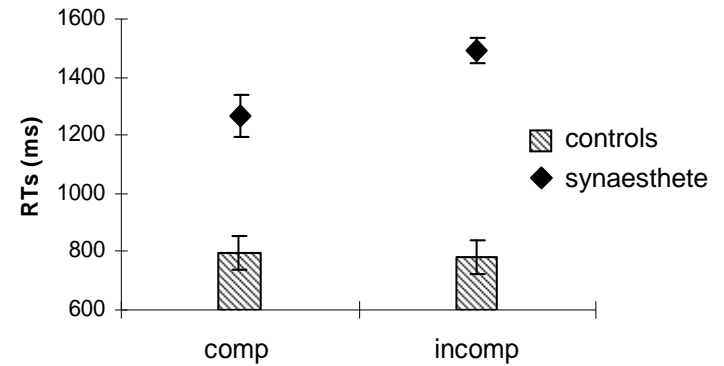
Sir Francis Galton, 1880, *Nature*

La synesthésie pour les nombres:

Un cas particulier d'interaction automatique entre nombre et espace?



Comparaison sur une ligne numérique (Piazza et al. 2006)



Plan du cours

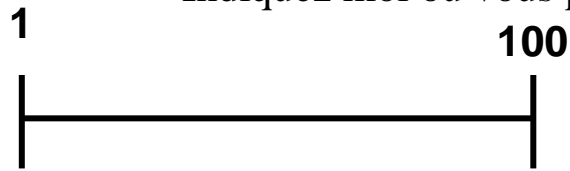
- Association automatique entre nombre et espace: l'effet SNARC
- Interactions entre nombre et attention visuo-spatiale
- Biais spatiaux au cours du calcul
- Synesthésie numérique
- Modifications du lien entre nombre et espace au cours du développement.

La nature des liens entre nombre et espace change au cours du développement

(Siegler & Opfer, 2003; Siegler & Booth, 2004)

Tâche de mise en relation d'un nombre avec une position:

« Indiquez moi où vous placeriez le nombre n »



Un changement radical survient au cours de l'éducation: passage d'une représentation logarithmique à une représentation linéaire

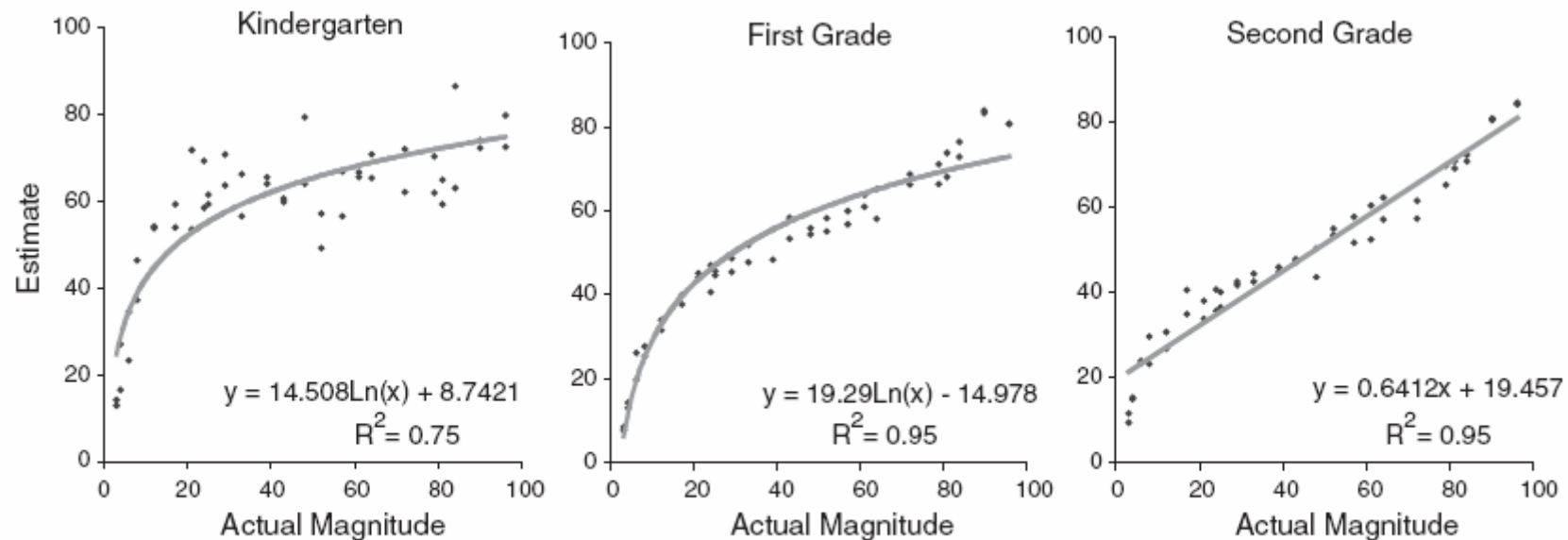


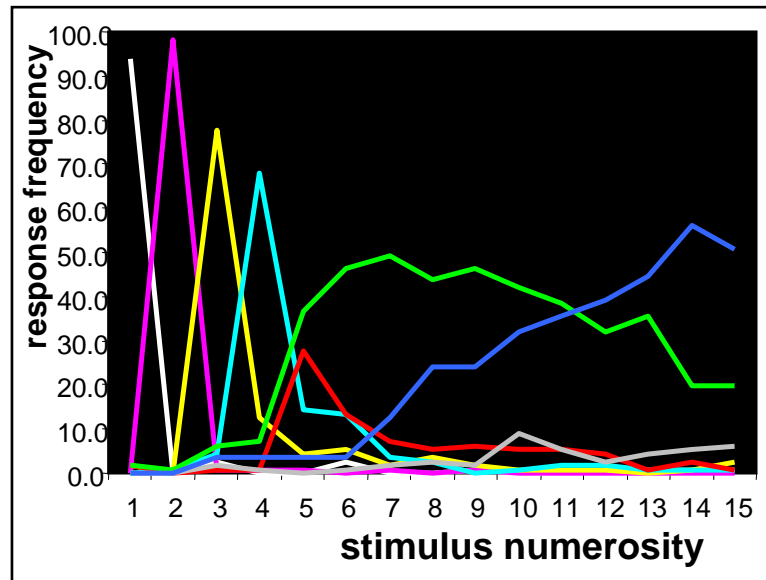
Figure 2. Progression from logarithmic pattern of median estimates among kindergartners (left panel) to linear pattern of estimates among second graders (right panel) in Experiment.



Cognition numérique en l'absence d'un lexique numérique

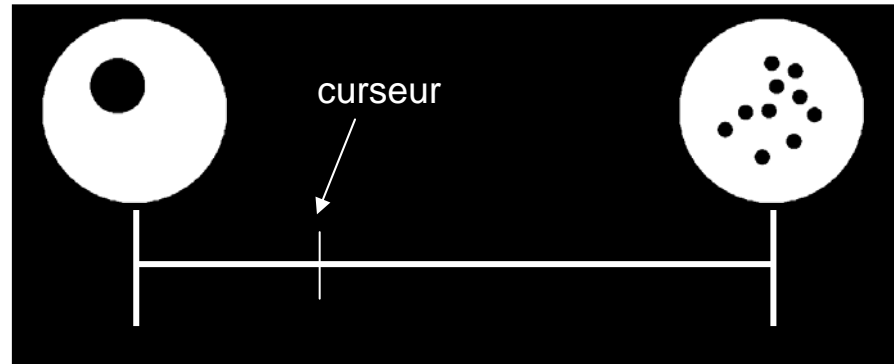
Pica, Lemer, Izard, & Dehaene, Science, 2004

- pug ma = un
- xep xep = deux
- ebapug = trois
- ebadipdip = quatre
- pug pōgbi = cinq, une main
- xep xep pōgbi = deux mains
- adesu/ade gu = quelques, peu
- ade/ade ma = beaucoup



Relations nombre-espace chez les Mundurucus

La tâche de mise en relation nombre-espace a été adaptée aux nombres entre 1 et 10, en évitant l'emploi de symboles écrits.



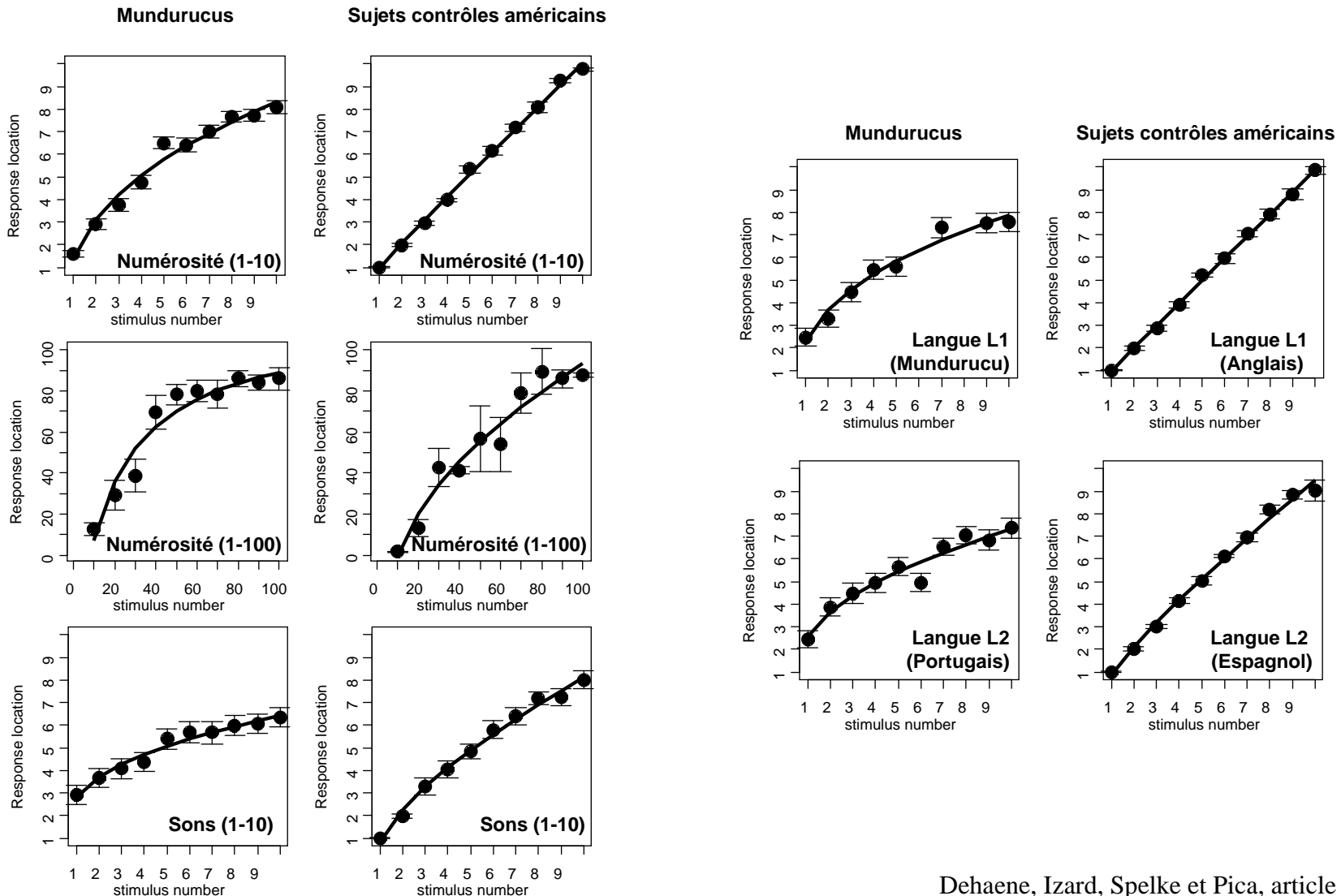
Numérosité										
Sons			...							
Mundurucu parlé	<i>pug ma (1)</i>	<i>xep xep (2)</i>	<i>ebapug (3)</i>	<i>ebadipdip (4)</i>	<i>pug pogbi (5)</i>	<i>pug pogbi xep xep bodi (7)</i>	<i>pug pogbi ebadipdip bodi (9)</i>			<i>Xep xep pogbi (10)</i>
Portugais parlé	<i>um (1)</i>	<i>dois (2)</i>	<i>tres (3)</i>	<i>quatro (4)</i>	<i>cinco (5)</i>	<i>seis (6)</i>	<i>sete (7)</i>	<i>oito (8)</i>	<i>nove (9)</i>	<i>dez (10)</i>

Relations nombre-espace chez les Mundurucus

Même les adultes Mundurucus se comportent de façon logarithmique

-Pour les numérosités visuelles et auditives entre 1 et 10

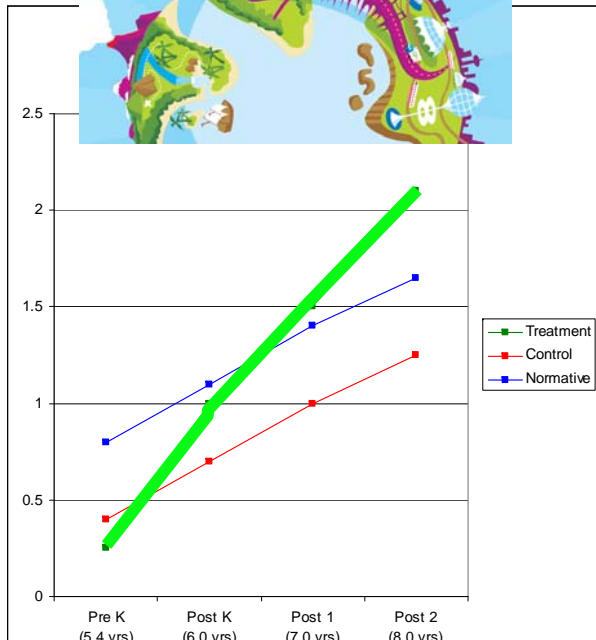
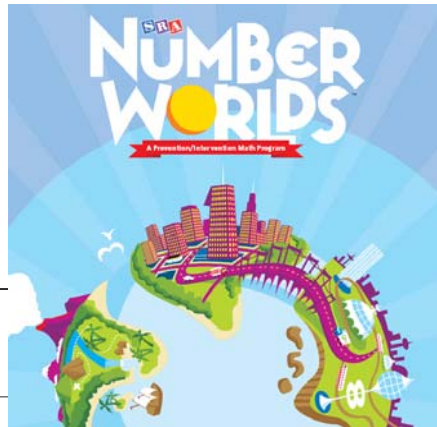
-Et même pour les nombres présentés en Mundurucu et en Portugais



Les jeux de plateau aident les enfants « à risque » en arithmétique, peut-être parce qu'ils favorisent l'apprentissage de la « ligne numérique »

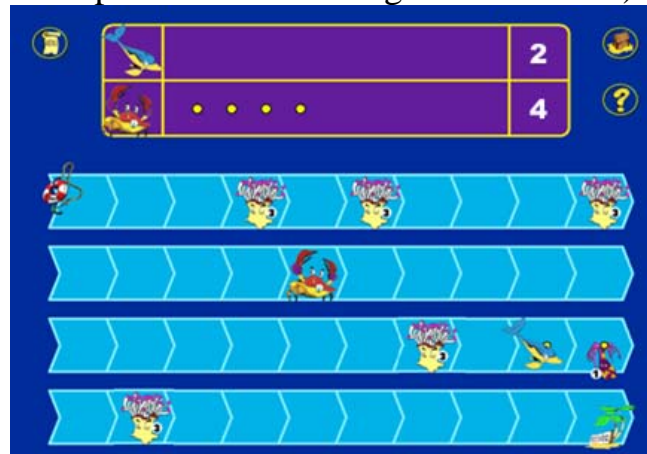
Griffin & Case (1994, 2004)

Un cursus progressif, comprenant de nombreux jeux mathématiques renforçant les liens entre nombre et espace, fait progresser les enfants « à risque » de faible niveau socio-économique

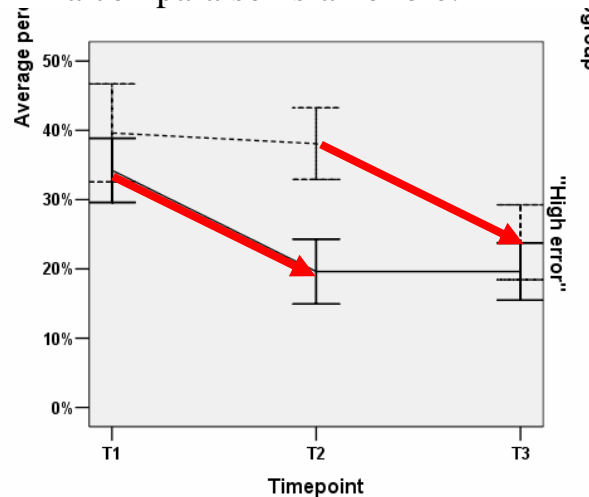


Wilson & Dehaene (2007), Wilson, Dehaene, Dubois & Fayol (soumis)

Le logiciel « Course aux nombres » améliore la subitisation, la comparaison et l'identification des nombres (par comparaison avec un logiciel de lecture).

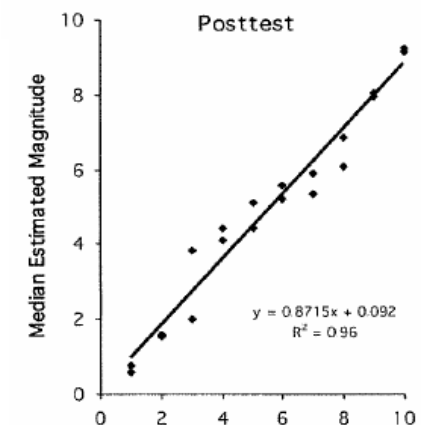
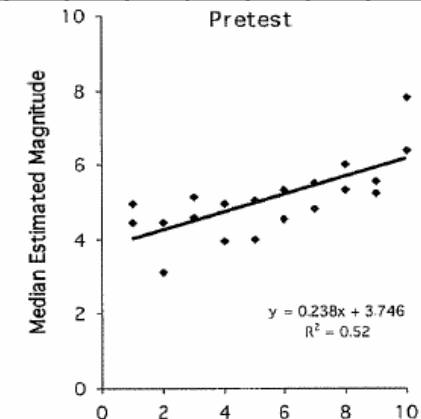
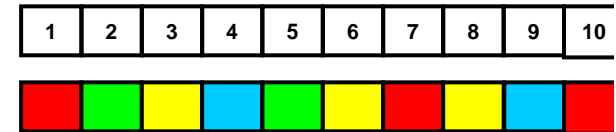


La comparaison s'améliore:



Ramani & Siegler (2008)

Un court entraînement à la ligne numérique améliore l'appariement nombre espace, la comparaison, l'identification, le comptage (par rapport à un jeu fondé sur la couleur)



Conclusions

- L'association entre nombre et espace est l'un des aspects essentiels de la cognition numérique: penser à un nombre ou effectuer un calcul évoque automatiquement un biais spatial.
- Cet effet trouve son origine dans les liens qu'entretiennent les représentations numériques et spatiales dans le lobe pariétal.
- La direction et la forme de l'effet sont influencés par l'éducation et la culture.
- Les mathématiques tirent avantage de ce lien naturel entre nombre et espace.
- Il semble essentiel de l'entraîner – cela confère aux enfants une compréhension plus profonde de l'arithmétique.