Fondements cognitifs de l’arithmétique élémentaire

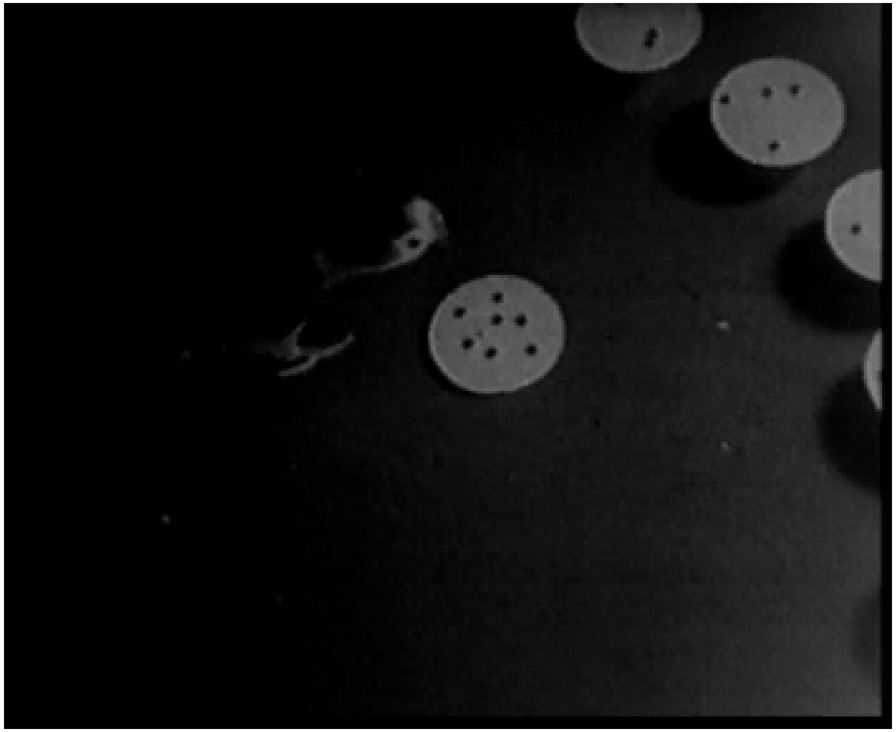
Stanislas Dehaene
Chaire de Psychologie Cognitive Expérimentale

Premier Cours

Les multiples facettes du concept de nombre

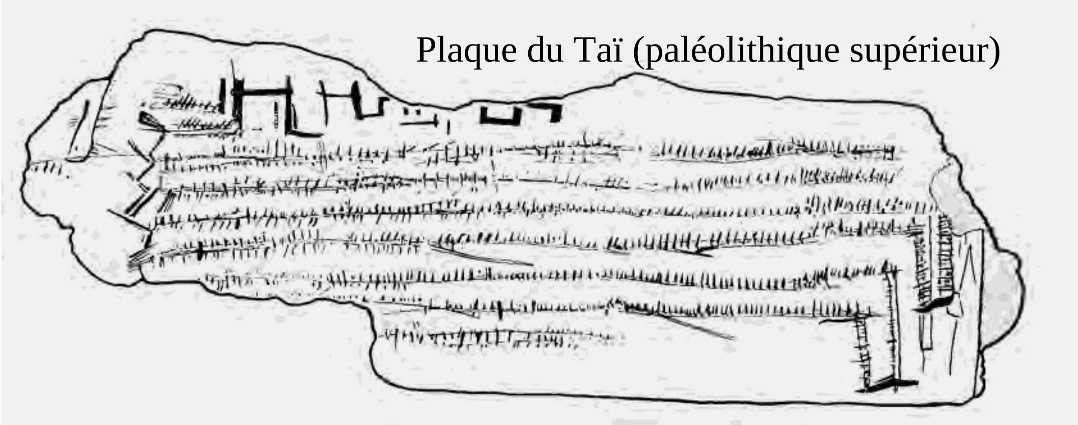
Le sens du nombre est-il propre à l’espèce humaine?

Les premières expériences d’Otto Köhler (vers 1955)



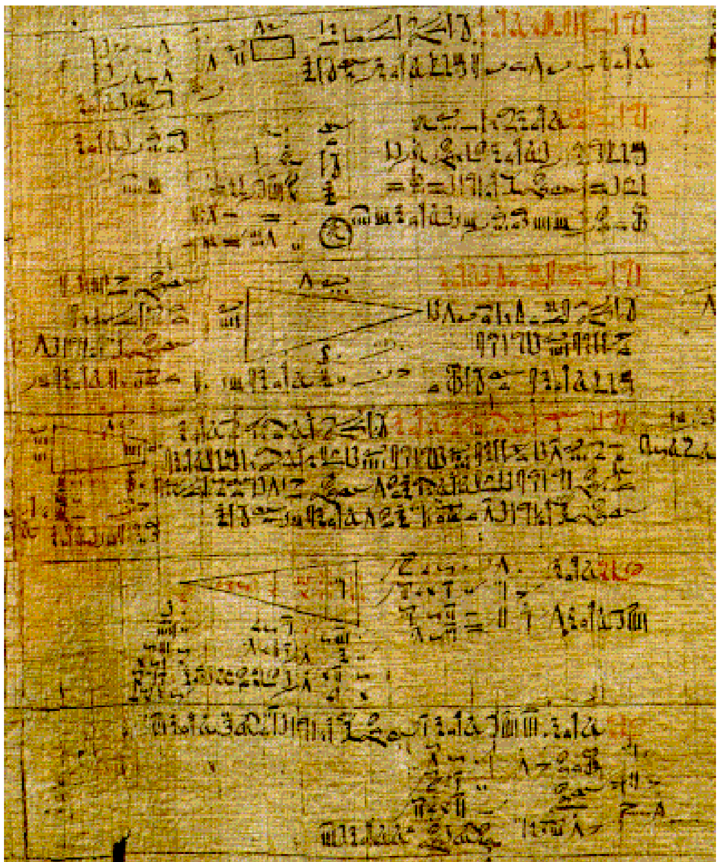
Le chimpanzé « Ai » de Tetsuro Matsuzawa (1985, 2005)

Plaque du Taï (paléolithique supérieur)



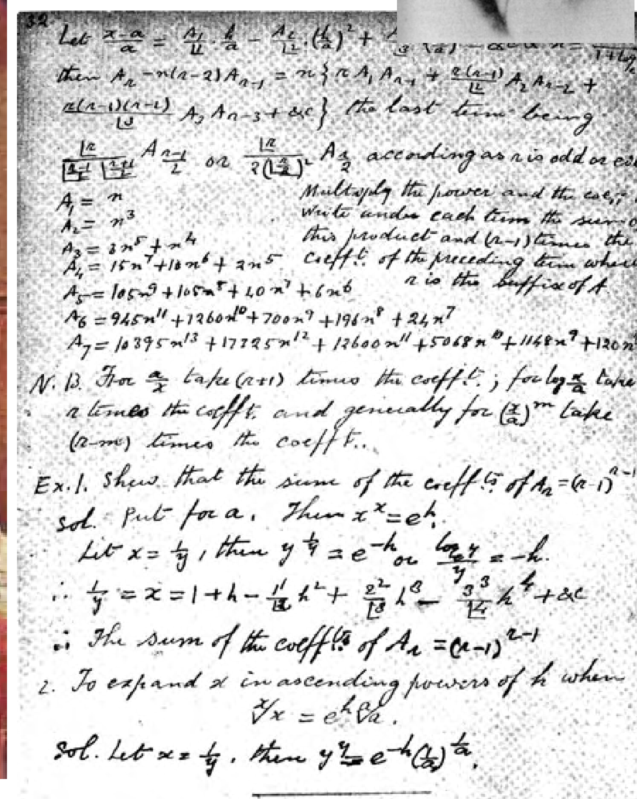
D’où proviennent le sens du nombre et les concepts mathématiques?

Papyrus Rhind



Elements d’Euclide

Carnets de Ramanujan



32

Let $\frac{x-a}{a} = \frac{A_1}{\lfloor 1} \cdot \frac{h}{a} - \frac{A_2}{\lfloor 2} \cdot \left(\frac{h}{a}\right)^2 + \ldots$

then $A_n - n(n-2)A_{n-1} = n\left\{ n A_1 A_{n-1} + \frac{n(n-1)}{\lfloor 2} A_2 A_{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{\lfloor 3} A_3 A_{n-3} + \&c \right\}$ the last term being

$\frac{\lfloor n}{\lfloor \frac{n-1}{2} \lfloor \frac{n+1}{2}} A_{\frac{n-1}{2}}$ or $\frac{\lfloor n}{2\left(\lfloor \frac{n}{2}\right)^2} A_{\frac{n}{2}}$ according as n is odd or even

$A_1 = n$
$A_2 = n^3$
$A_3 = 3n^5 + n^4$
$A_4 = 15n^7 + 10n^6 + 2n^5$
$A_5 = 105n^9 + 105n^8 + 40n^7 + 6n^6$
$A_6 = 945n^{11} + 1260n^{10} + 700n^9 + 196n^8 + 24n^7$
$A_7 = 10395n^{13} + 17325n^{12} + 12600n^{11} + 5068n^{10} + 1148n^9 + 120n^8$

Multiply the power and the coeff.t Write under each term the sum of this product and $(n-1)$ times the coeff.t of the preceding term where n is the suffix of A.

N.B. For $\frac{a}{x}$ take $(n+1)$ times the coeff.t; for $\log\frac{x}{a}$ take n times the coeff.t and generally for $\left(\frac{x}{a}\right)^m$ take $(n-m)$ times the coeff.t..

Ex. 1. Shew that the sum of the coeff.ts of $A_n = (n-1)^{n-1}$

Sol. Put for a. Then $x^x = e^h$.

Let $x = \frac{1}{y}$, then $y^{\frac{1}{y}} = e^{-h}$ or $\frac{\log_e y}{y} = -h$.

$\therefore \frac{1}{y} = x = 1 + h - \frac{1^1}{\lfloor 2} h^2 + \frac{2^2}{\lfloor 3} h^3 - \frac{3^3}{\lfloor 4} h^4 + \&c$

$\therefore$ The sum of the coeff.ts of $A_n = (n-1)^{n-1}$

2. To expand x in ascending powers of h when $\sqrt[x]{x} = e^h \sqrt[a]{a}$.

Sol. Let $x = \frac{1}{y}$. then $y^y = e^{-h}\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{a}}$.

En débat: l'origine des concepts mathématiques

- **Un accès direct au monde Platonicien des Idées?** (Connes) "Lorsqu'il se déplace dans la géographie des mathématiques, le- mathématicien perçoit peu à peu les contours et la structure incroyablement riche du monde mathématique. Il développe progressivement une sensibilité à la notion de simplicité qui lui donne accès à de nouvelles régions du paysage mathématique." (également Kepler et la plupart des mathématiciens)
- **Une construction logique?** (Piaget): "Le nombre entier peut ainsi être conçu comme une synthèse de la classe et de la relation asymétrique (ordre)" (également Russell)
- **Une pure manipulation de symboles linguistiques?** (Vygotsky): "Thought is not merely expressed in words; it comes into existence through them". "The speech structures mastered by the child become the basic structures of his thinking." (également Wittgenstein, Hilbert)
- **Un sens inné?** (Roger Bacon, ~1219-1294): "The knowledge of mathematical things is almost innate in us…This is the easiest of sciences, a fact which is obvious in that no one's brain rejects it; for laymen and people who are utterly illiterate know how to count and reckon."
- **Des intuitions profondes inscrites dans nos structures cérébrales?** (Davis & Hersh): "In the realm of ideas, of mental objects, those ideas whose properties are reproducible are called mathematical objects, and the study of mental objects with reproducible properties is called mathematics. Intuition is the faculty by which we can consider or examine these (internal mental) objects." (également Kant, Poincaré, Changeux…)

Plan du cours

- Cours : **Fondements cognitifs de l'arithmétique élémentaire**
  - **Le concept de nombre**
  - **Circuits cérébraux de l'arithmétique élémentaire**
  - **Les neurones des nombres**
  - **Un modèle mathématique de la décision numérique**
  - **L'impact des symboles sur la cognition numérique**
  - **Synesthésie numérique et représentation spatiale des nombres**
- Séminaire : **La représentation du nombre chez l'enfant**
- **Aujourd'hui**
  - Le concept de nombre
  - Les différents processus qui permettent de l'appréhender (subitisation, estimation, comptage)
  - La multiplicité des représentations du nombre chez l'enfant et l'adulte

Quelques références

- Piaget, J. and A. Szeminska (1941). *La génèse du nombre chez l'enfant.* Neuchâtel, Delachaux & Niestlé.
- Gelman, R. and C. R. Gallistel (1978). *The child's understanding of number*. Cambridge Mass., Harvard University Press.
- Fuson, K. C. (1988). *Children's counting and concepts of number.* New York: Springer-Verlag.
- Dehaene, S. (1993). *Numerical Cognition*. Oxford, Blackwell.
- Dehaene, S. (1997). *La bosse des maths.* Paris, Odile Jacob. (*The number sense.* New York: Oxford University Press)
- Butterworth, B. (1999). *The Mathematical Brain*. London, Macmillan.
- Dehaene, S., Molko, N., Cohen, L., & Wilson, A. J. (2004). Arithmetic and the brain. *Current Opinion in Neurobiology*, *14*(2), 218-224.
- Nieder, A. (2005). "Counting on neurons: The neurobiology of numerical competence." *Nature Reviews in Neuroscience*
- Hubbard, E. M., Piazza, M., Pinel, P., & Dehaene, S. (2005). Interactions between number and space in parietal cortex. *Nature Reviews in Neuroscience*, *6*(6), 435-448.

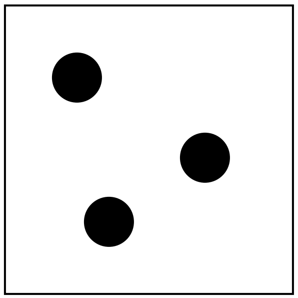
Le vocabulaire de la psychologie du nombre

- Le mot « nombre » recouvre des nombreuses acceptions:
  - Le **concept** de nombre
  - La **propriété** de nombre: le **cardinal** d’un ensemble, la **quantité numérique**
    - terme technique: la **numérosité**
    - Implique l’**individuation** des éléments et la représentation d’un **ensemble**
  - Les **symboles** numériques ou **noms de nombres**:
    - Notation verbale:
      - numéral *(un, deux, trois…)*
      - ordinal *(premier, second, troisième…)*
    - Notation positionnelle: nombre arabe ou indo-arabe *(1, 2, 3…20, 50, 813)*, lui-même formé de **chiffres** arabes (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9)
  - Tout objet susceptible d’être manipulé selon certaines **opérations**
    - En mathématiques: entiers naturels, entiers relatifs, fractions, nombres réels, nombres complexes, quaternions, matrices…
    - En psychologie:
      - Échelle arbitraire: les numéros *(le bus numéro 62)*
      - Échelle ordinale: les adresses *(j’habite au numéro 62)*
      - Échelle additive *(il fait 20°… 10° de plus qu’hier… mais pas « deux fois plus chaud »)*
      - Échelle multiplicative, dôtée d’un « vrai zéro » *(le but fait 20 mètres de long)*

La perception du nombre:
1. la « subitisation » (*subitizing*)

Mandler & Shebo, 1982; Trick & Pylyshyn, 1994

Combien d'objets?



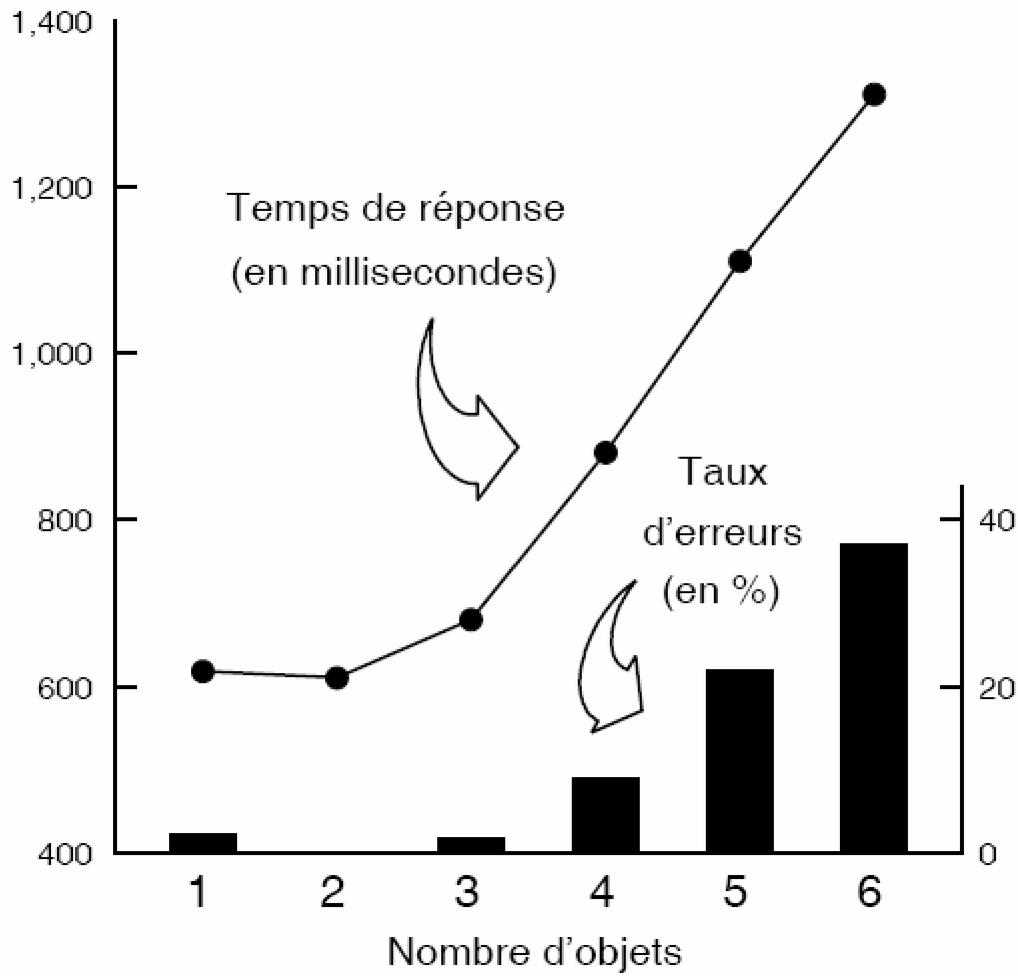
• La « subitisation » s'arrête aux environs de 3

• Elle ne dépend pas de l'arrangement spatial (objets alignés)

• Elle échoue si

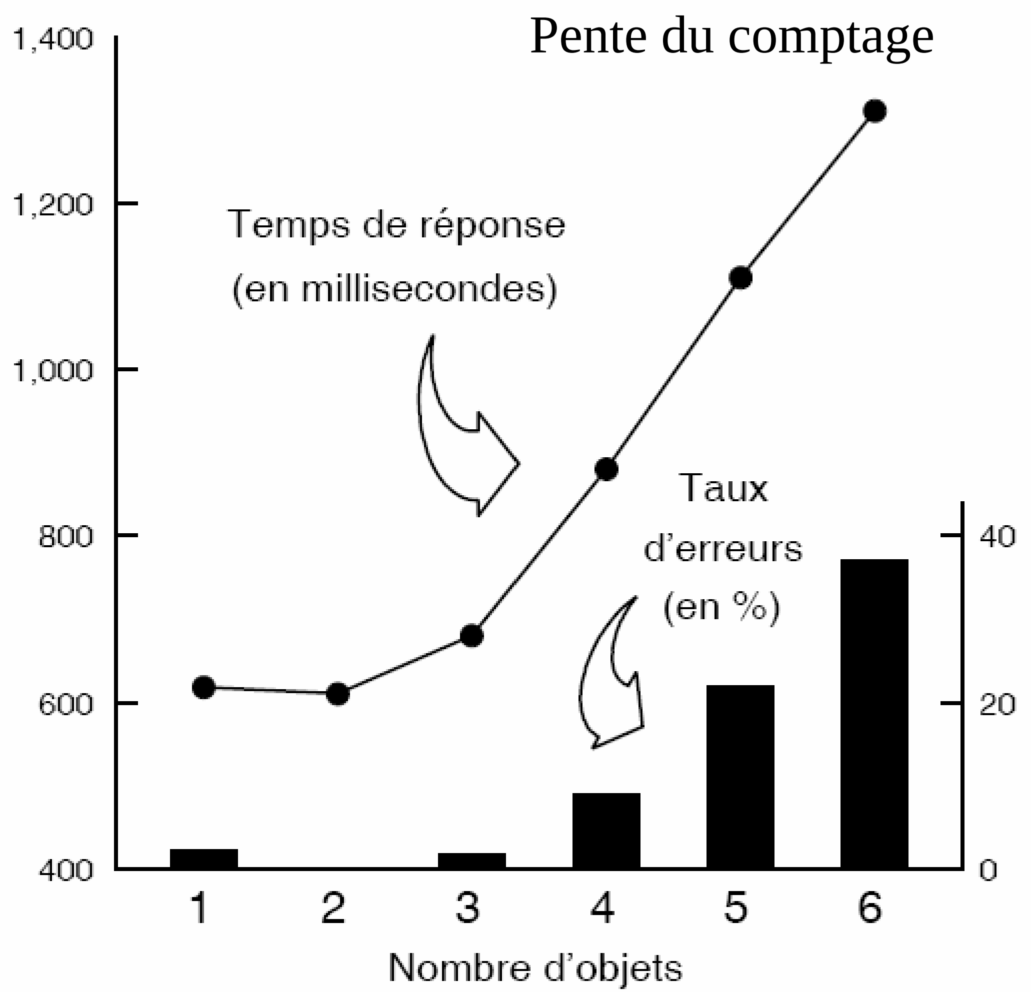
- Les objets sont superposés

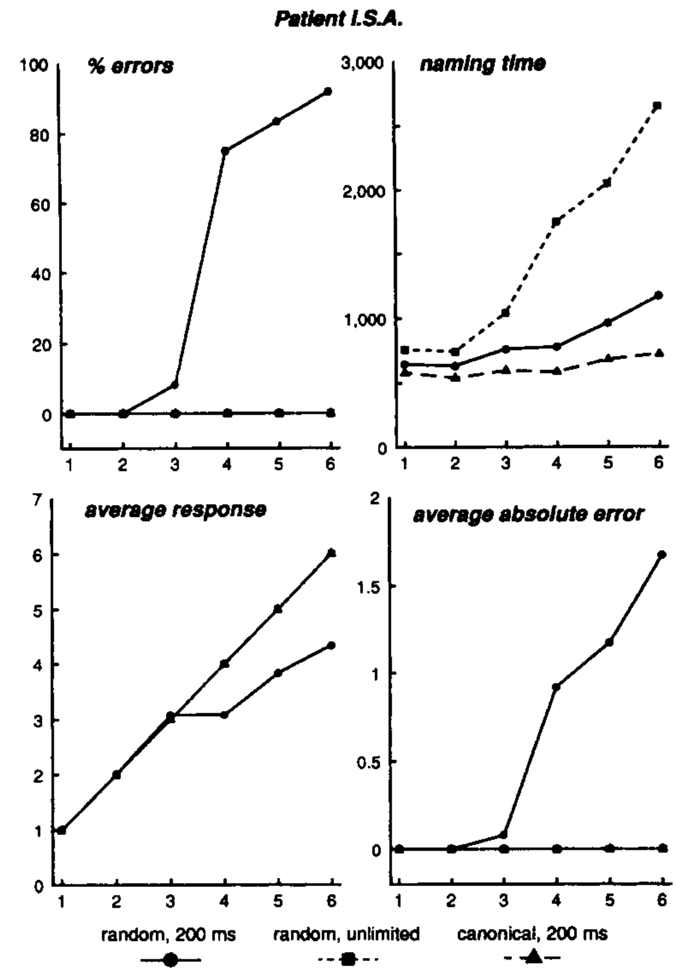
- Les objets ne peuvent pas être isolés par la vision « pré-attentive »



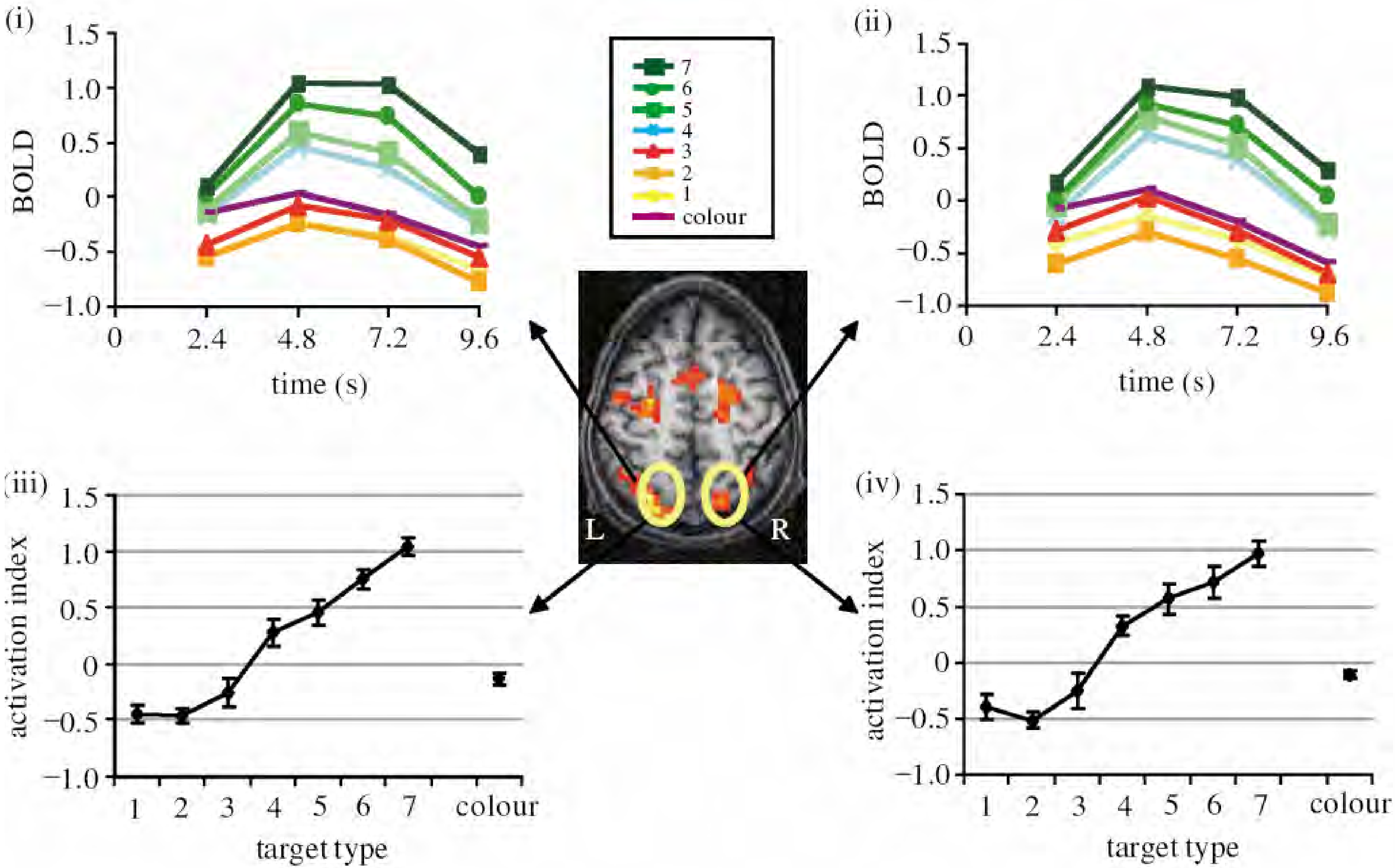
La perception du nombre: 2. Le comptage

Subitisation et comptage sont **dissociables:**
Les patients simultanagnosiques peuvent encore « subitiser » mais pas compter
(Cohen et Dehaene, JEP:HPP, 1994)





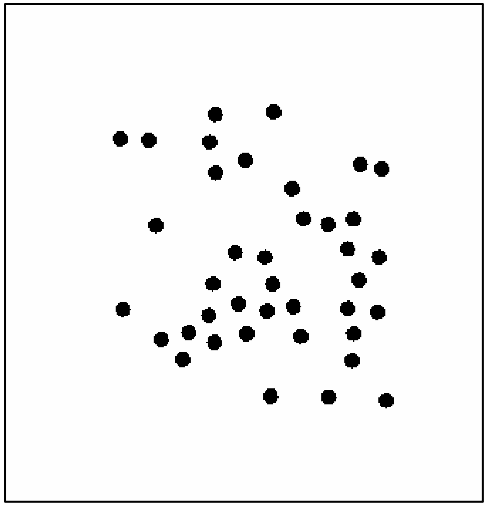
Subitisation et comptage font appel à des réseaux cérébraux distincts



Piazza, M., Giacomini, E., Le Bihan, D., & Dehaene, S. (2003). Single-trial classification of parallel pre-attentive and serial attentive processes using functional magnetic resonance imaging. *Proc R Soc Lond B Biol Sci*, *270*(1521), 1237-1245.

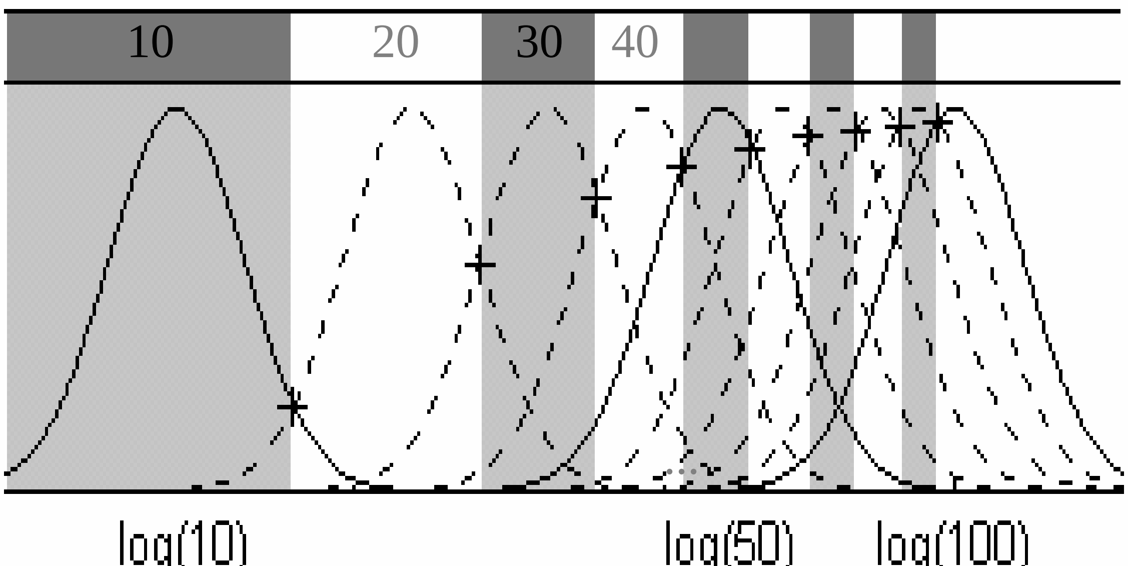
La perception du nombre: 3. l'estimation

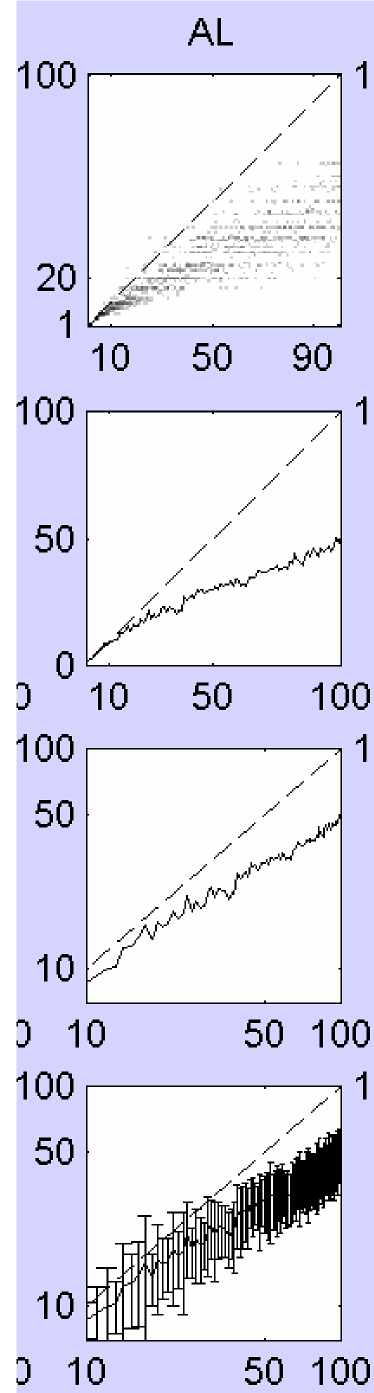
Izard et Dehaene, *Cognition*, 2007



Combien de points?
Y a-t-il plus ou moins que 40?

Conclusion: la numérosité serait représentée mentalement sous forme **analogique**, par une distribution d'activation sur une **ligne numérique mentale logarithmique**.





Distribution des réponses (échelle linéaire)

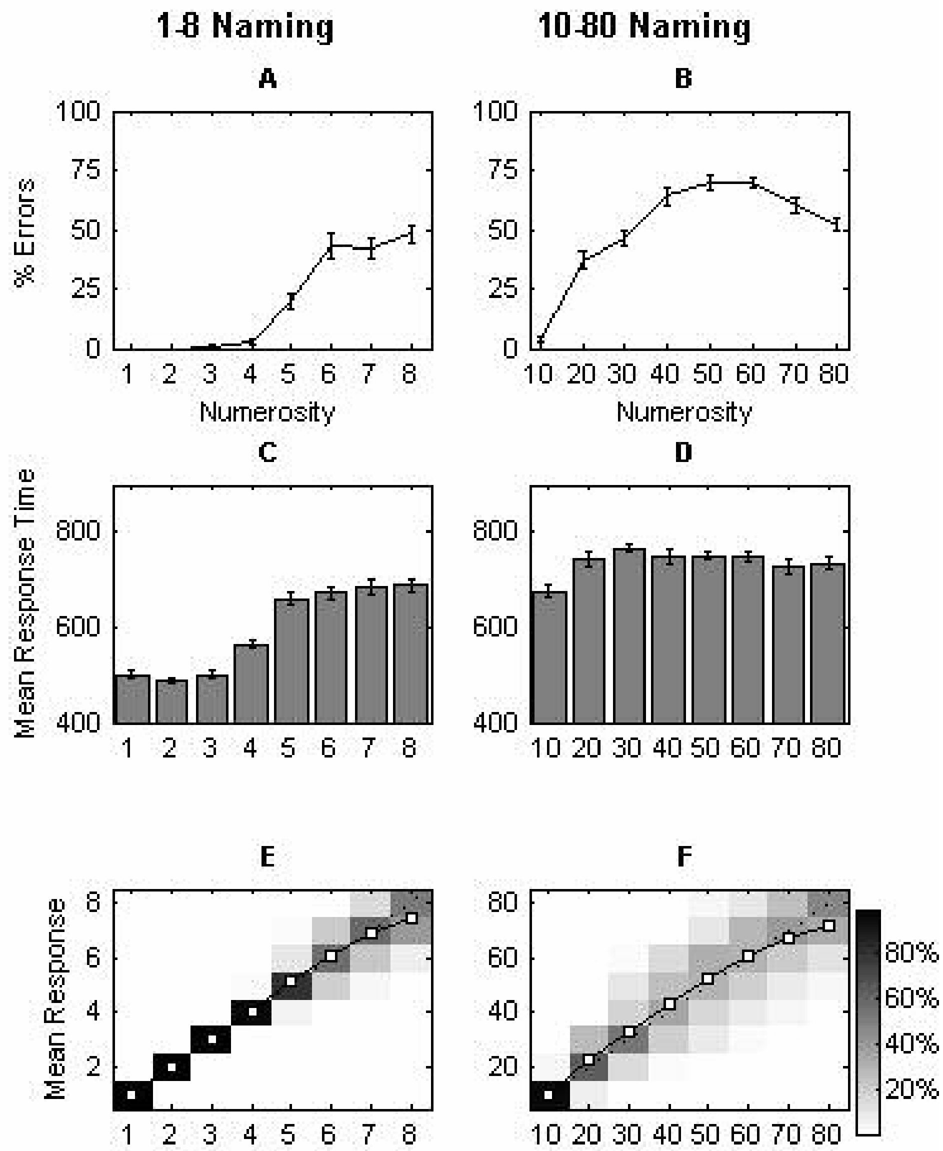
Réponse moyenne (échelle linéaire)

Réponse moyenne (double échelle logarithmique)

Ecart type des réponses (double échelle logarithmique)

Subitisation et estimation sont également des processus distincts

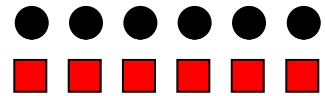
• L'estimation obéit à la **loi de Weber**: l'écart-type des réponses est proportionnelle à la moyenne (la constante de proportionnalité s'appelle *fraction de Weber*)
• La loi de Weber suffit-elle à expliquer la bonne précision de la dénomination des petits nombres (subitisation)?
• Non. La dénomination des numérosités 1, 2 et 3 est bien plus précise que ne le prédit la loi de Weber.



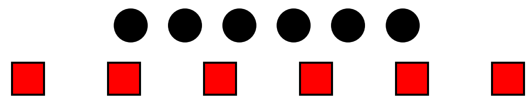
Revkin et al, *Psychological Science, sous presse*

Le développement du concept de nombre: La correspondance terme à terme

- Les tests Piagétiens
  - Conservation du nombre
    - Voici des verres et des bouteilles. Est-ce qu'il y a la même chose de ronds et de carrés?



    - Et maintenant, est-ce qu'il y a la même chose?



  - Inclusion des classes
    - J'ai des fleurs: deux roses et huit marguerites. Est-ce que j'ai plus de marguerites ou plus de fleurs?
- Hypothèse d'une lente construction mentale du nombre et de la logique (Papert, 1960)

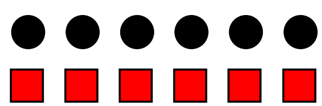
« Pour le nourrisson, il n'existe même pas d'objets ; une première structuration est nécessaire pour que l'expérience s'organise en *choses*. Nous insistons sur le fait que le bébé ne *découvre* pas l'existence des objets comme un explorateur découvre une montagne, mais plutôt comme un homme découvre la musique: il en a entendu depuis des années, mais ce n'était, jusque là, que du bruit. Ayant « acquis les objets », l'enfant a un long chemin à parcourir avant d'arriver à l'étape des classes, des sériations, des emboîtements et, enfin, du nombre. »

Deux réfutations expérimentales de l’importance de la tâche de conservation du nombre

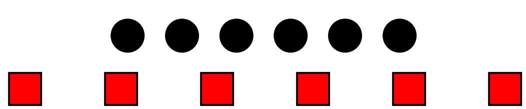
- Mehler & Bever, *Science* (1967): les enfants de trois ans réussissent le test lorsqu’on sollicite leur motivation de façon non-verbale (avec des *M&M*’s!)

Avant transformation | Après transformation

- McGarrigle & Donaldson, *Cognition* (1974): les enfants réussissent lorsqu’il y a une bonne raison de leur poser deux fois la même question (par exemple parce qu’une tierce personne bouscule l’arrangement des objets)
    - Voici des verres et des bouteilles. Est-ce qu’il y a la même chose de ronds et de carrés?



    - L’expérimentateur se détourne. Un complice bouscule l’arrangement des points. L’expérimentateur se retourne et demande « Et maintenant, est-ce qu’il y a la même chose? »



Le développement du concept de nombre: Les principes du comptage sont-ils « innés »?

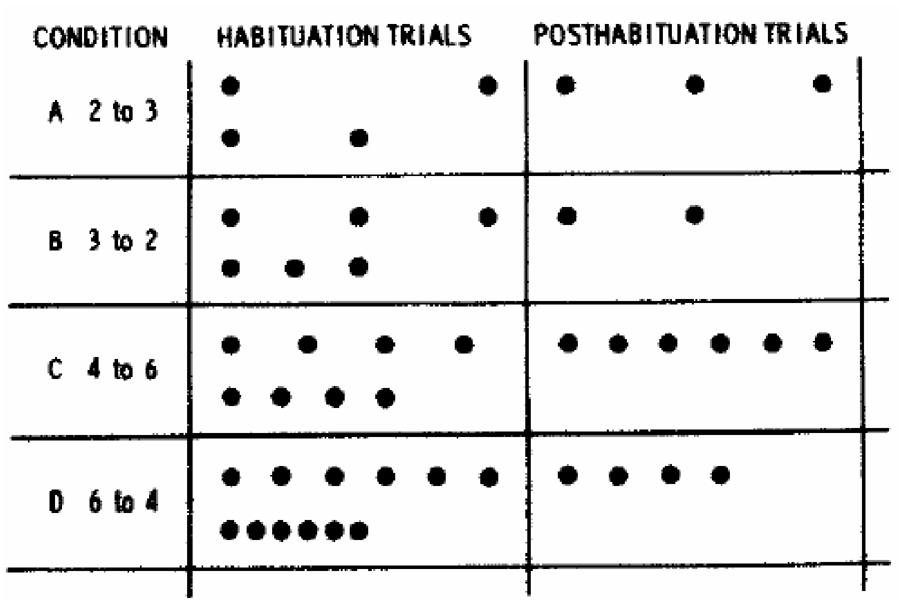
(Gelman & Gallistel, *The child’s understanding of number*, 1978)

- Principe d’ordre stable
  - Récitation des mots dans un ordre fixe
- Principe de correspondance terme à terme
  - On avance d’un mot pour chaque objet compté
- Principe du cardinal
  - Le dernier mot donne le cardinal de l’ensemble compté
- Principe d’abstraction
  - Toute collection d’objets peut être comptée
- Principe de non-pertinence de l’ordre
  - Les objets peuvent être comptés dans n’importe quel ordre

- Les enfants repèrent très précocément les violations de ces principes (*know how)*
- Toutefois, ils n’ont pas nécessairement une réelle connaissance « conceptuelle » (*know why*), particulièrement du principe le plus important, celui du cardinal (Fuson, *Children's counting and concepts of number*, 1988). Le comptage est une acquisition culturelle tardive.

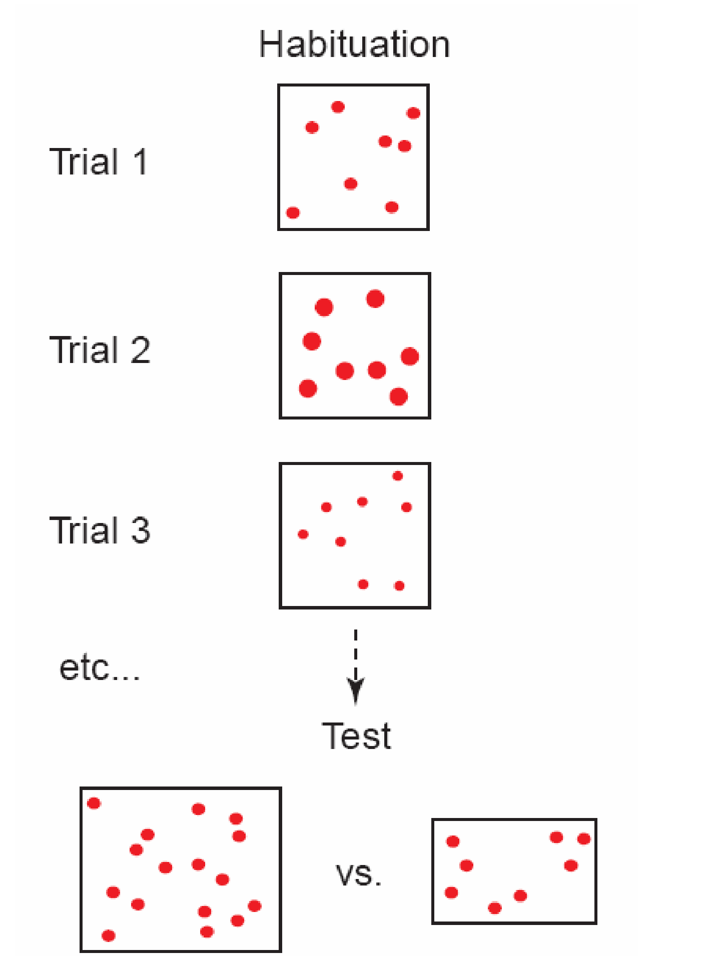
La subitisation et l'estimation sont présents chez le très jeune enfant

Même des nouveaux-nés âgés de 48 heures peuvent discriminer de petits nombres d'objets (Starkey & Cooper, 1980; Antell & Keating, 1983)



Starkey, Spelke & Gelman (1983, 1990): codage amodal des correspondances entre 2 ou 3 sons et 2 ou 3 objets.
Résultats contestés par Mix et al. (1997) mais confirmés par Kobayashi et al. (2005) et Jordan et Brannon (2006)

Cette compétence s'étend à des grands nombres, par exemple 8 versus 16 (Xu & Spelke, 2000)

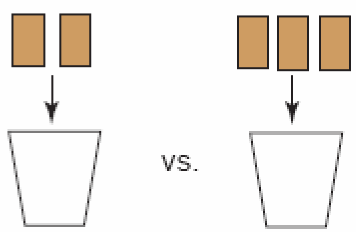


La « signature » de la subitisation: une limite stricte à un, deux ou trois objets

Dans certaines expériences qui nécessitent de suivre la trajectoire des objects (« tracking »), les performances des enfants sont strictement limitées à 1, 2 ou 3 objets (« set size signature »).
De plus, l'enfant s'intéresse fréquemment à la quantité totale plutôt qu'au nombre.

(c) Cracker choice experiments

Les gateaux sont insérés l'un après l'autre.



Core system engaged	Computation performed
Distinct individuals [20]	Continuous quantity [20]

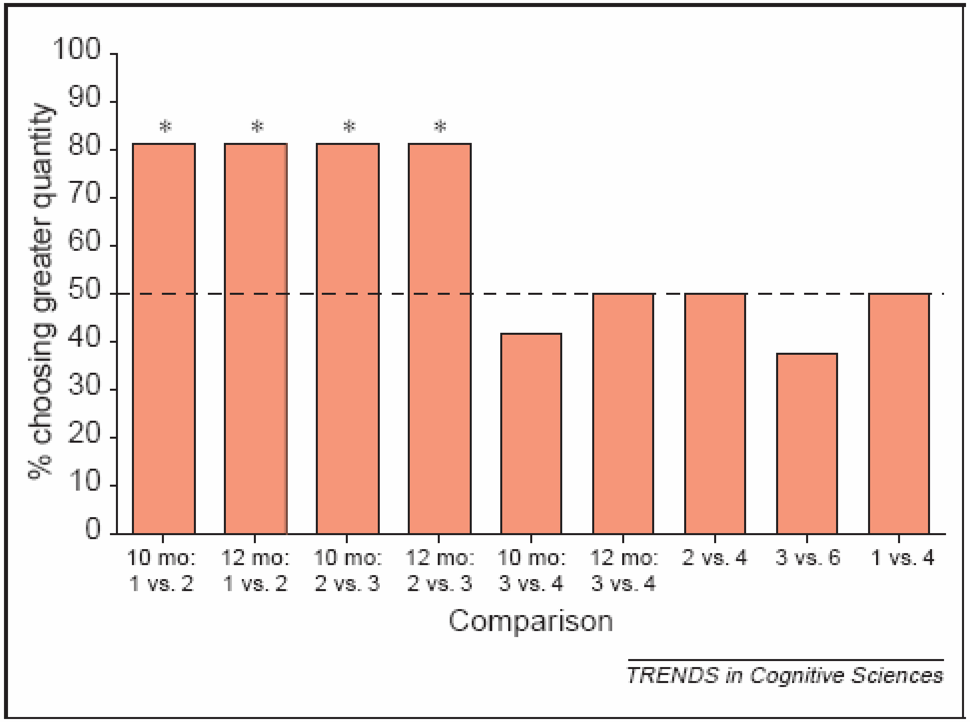


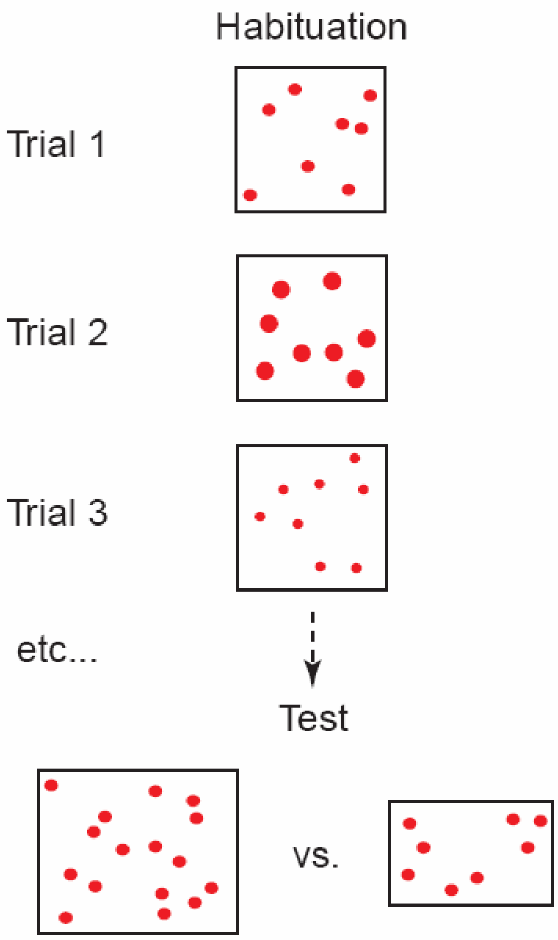
Figure 3. Infants' choices in the experiment by Feigenson *et al.* [20]. Bars represent the percentage of infants in each comparison group (at two different ages, 10 and 12 months, for the smaller quantities) choosing the greater quantity of crackers. Infants' choices demonstrate the set-size signature of the system for representing small numbers of numerically distinct individuals (Core system 2), in that infants performed randomly (dotted line at 50%) when either array contained more than 3 objects, even with highly discriminable ratios between the quantities. Asterisks denote significance levels of $P < 0.05$. Adapted with permission from [20].

Feigenson, Carey et al, *Psych Science* 2002; *TICS* 2004

La « signature de l'estimation: pas de limite stricte, mais les performances dépendent du rapport des deux nombres

Pour la discrimination de grands nombres, ce n'est pas le nombre absolu qui compte, mais le rapport des deux nombres (« Weber fraction signature »).

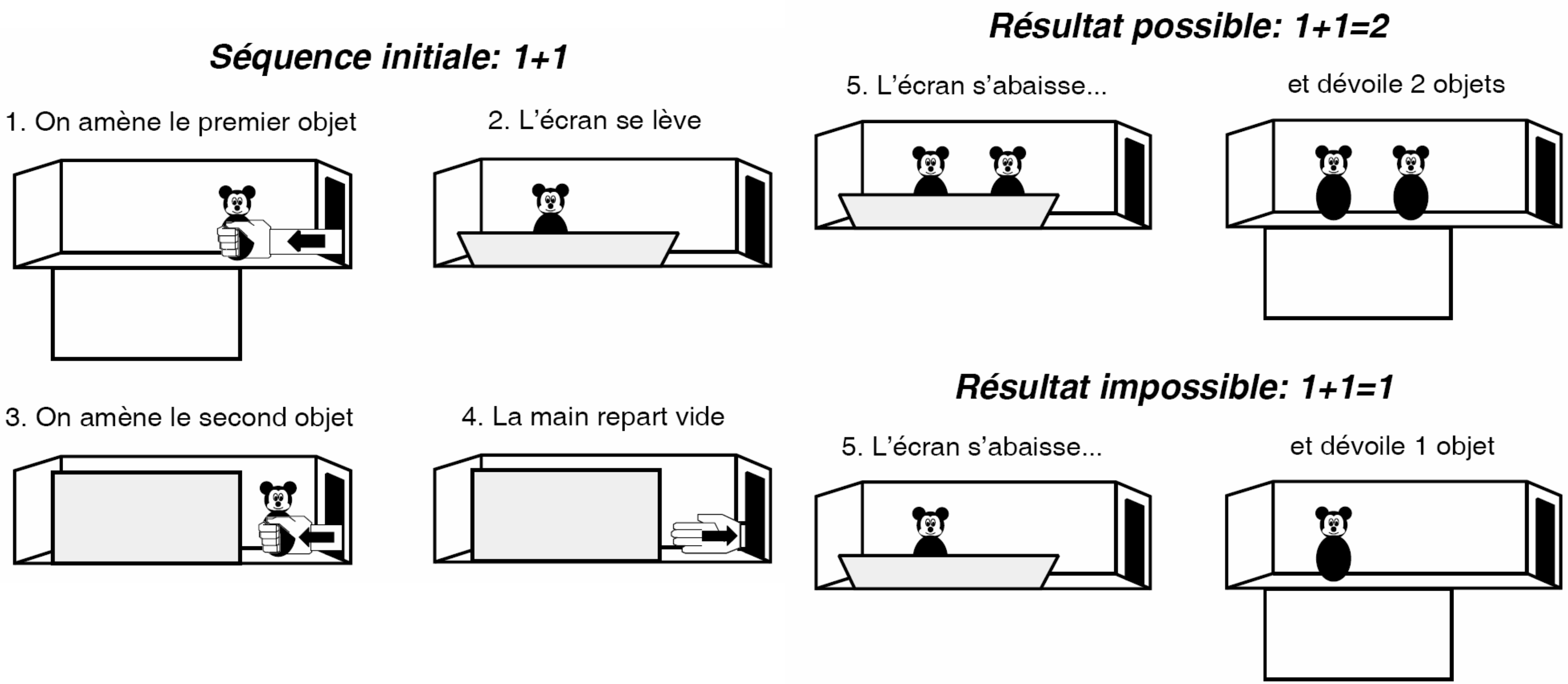
- Cette compétence résiste à de nombreux contrôles pour les paramètres non-numériques (taille, surface, densité)
- La discrimination s'étend à des séquences de sons.
- La fraction de Weber s'améliore au cours du développement (1:2 à six mois, 2:3 à 10 mois)



Feigenson et al, *TICS* 2004

Opérations numériques chez le très jeune enfant

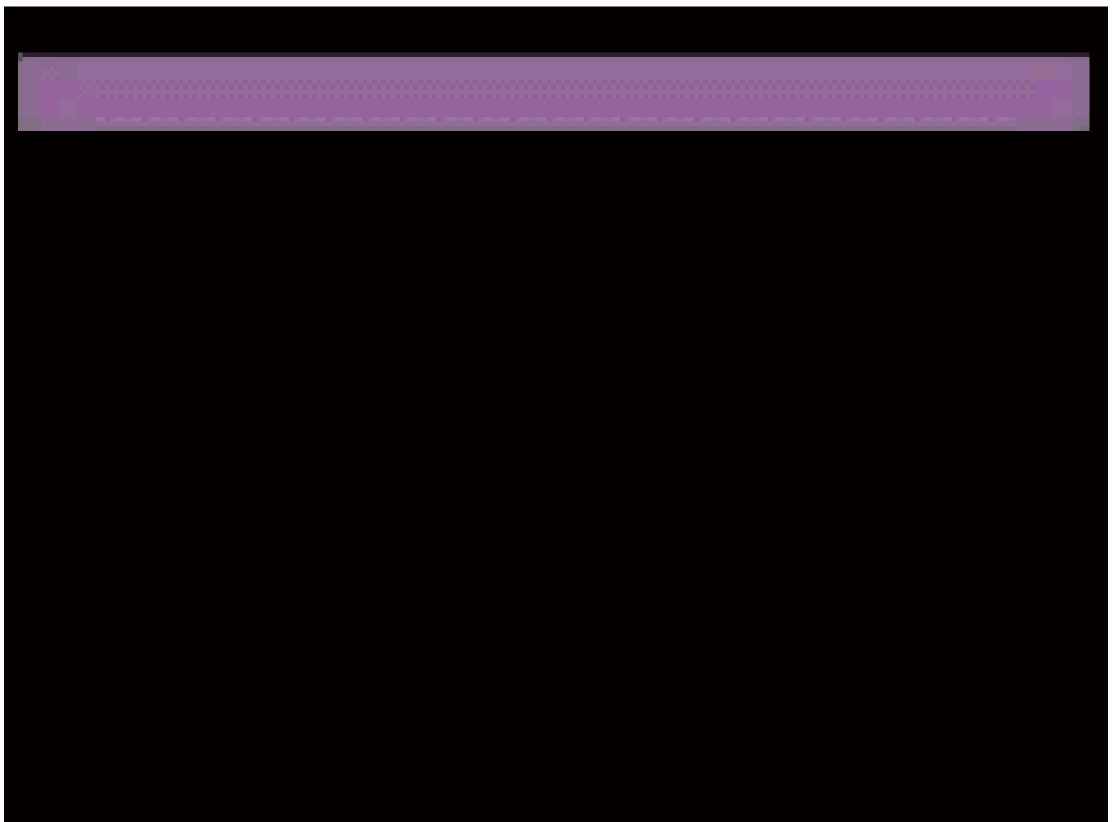
- Wynn (*Nature*, 1992):
  - Enfants de 4 mois ½



Opérations numériques chez le très jeune enfant

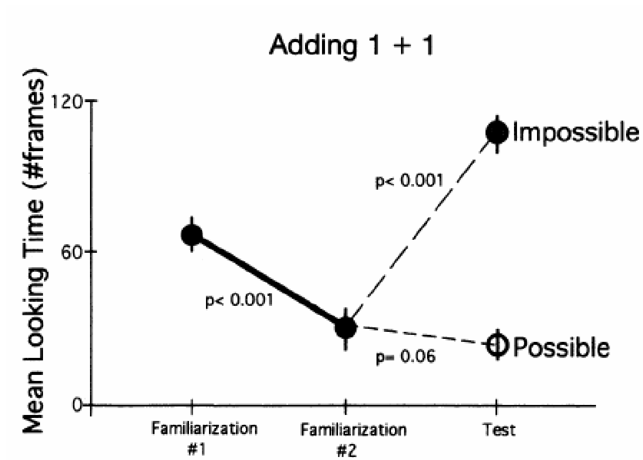
- Wynn (*Nature*, 1992) et ses réplications:
  - Koechlin et coll. (*Math Cognition*, 1997): plateau tournant, empêchant l'enfant de fonder ses jugements sur la position précise des objets
  - McCrink et Wynn (*Psych Science*, 2004): 5+5 = 5 ou 10, 10-5 = 5 ou 10

Excellents contrôles pour la densité, la surface et le contour des objets



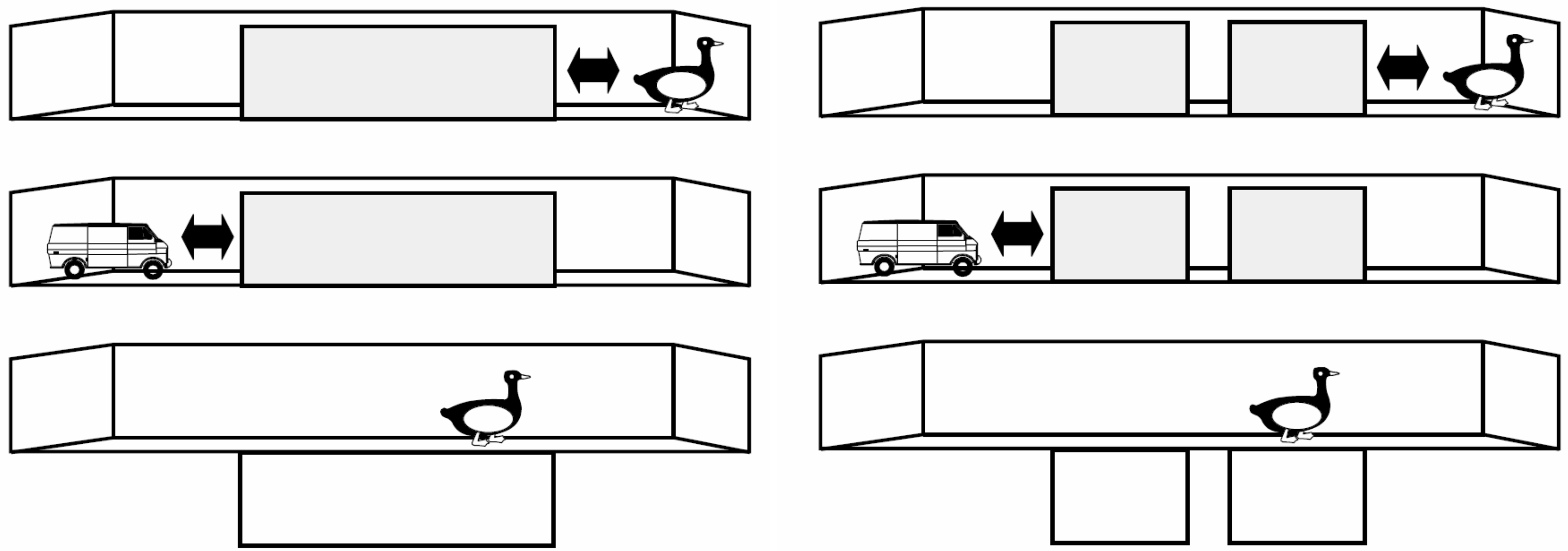
- Hauser et al. (*PNAS*, 1996):

Réplication chez des singes macaques en semi-liberté: 1 aubergine + 1 aubergine



L’importance de l’individuation

Expérience de Xu et Carey (*Cognitive Psychology*, 1996)



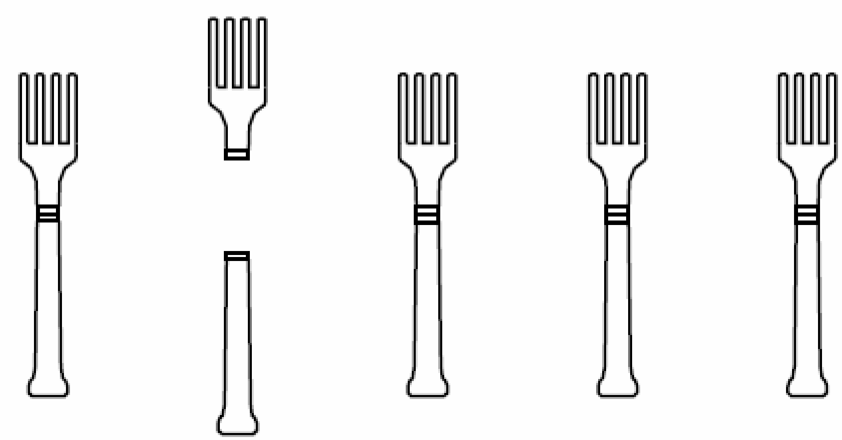
Pas de surprise de l’enfant

Surprise de l’enfant

• L’enfant de 10 mois individue les objets qui entrent dans des opérations arithmétiques simples sur la base de leur **continuité spatio-temporelle**, plus que sur la base de leur identité.

• L’enfant de 12 mois réussit le test.

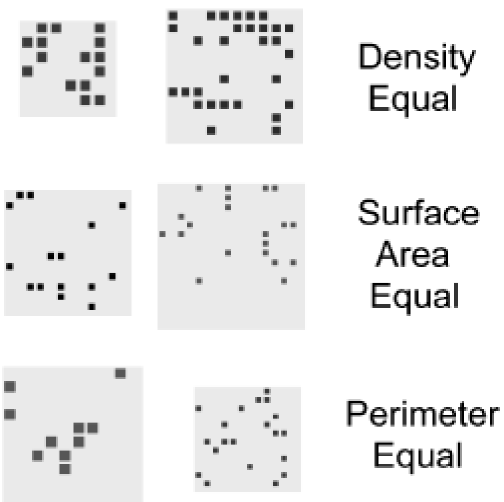
• Même chez un enfant de 3-4 ans, l’individuation peut conduire à des erreurs (Shipley & Shepperson, *Cognition*, 1990)

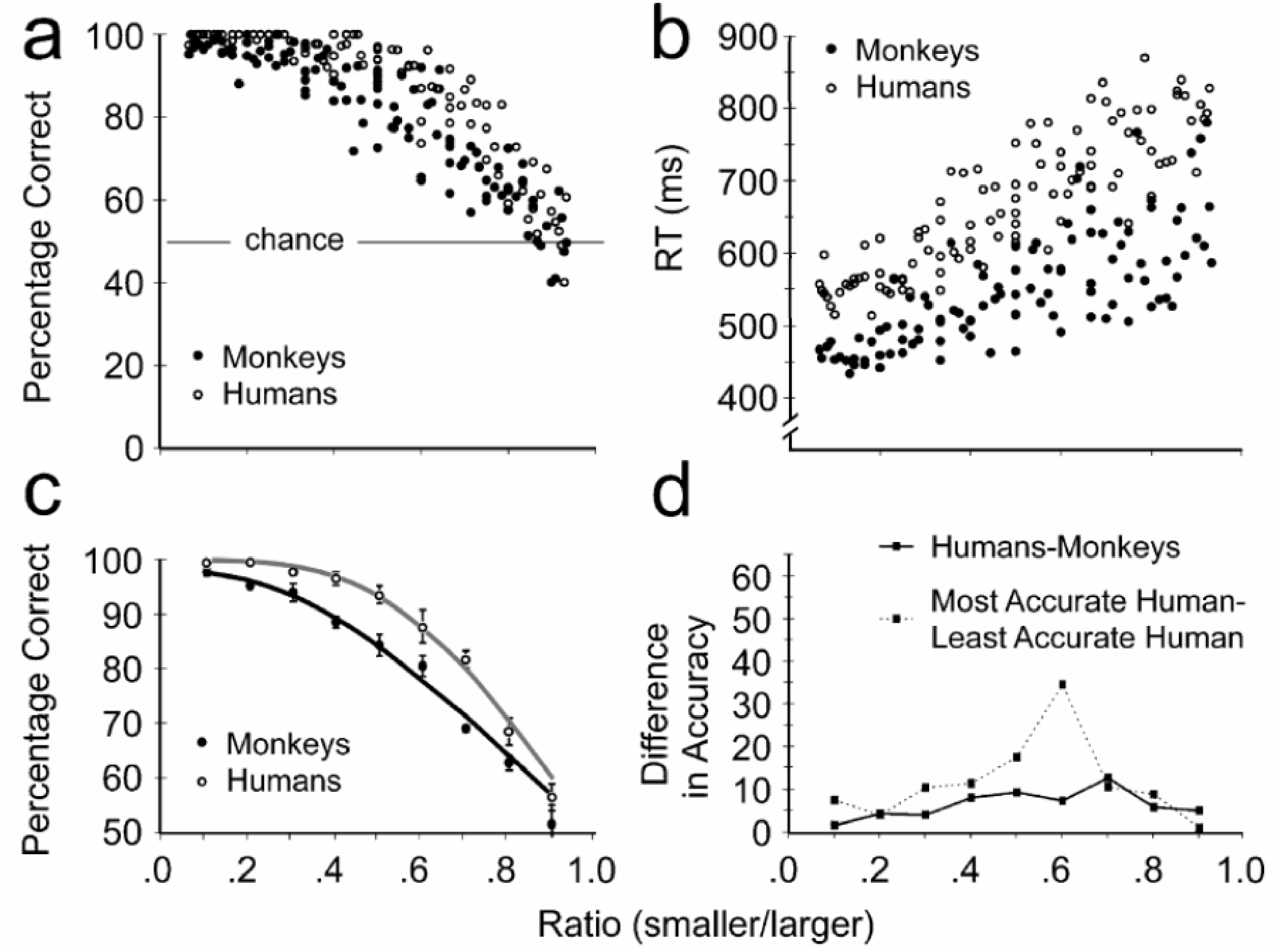


Continuité phylogénétique et épigénétique de la représentation analogique des nombres

La tâche de comparaison de deux numérosités

Cantlon & Brannon, Psychological Science 2006

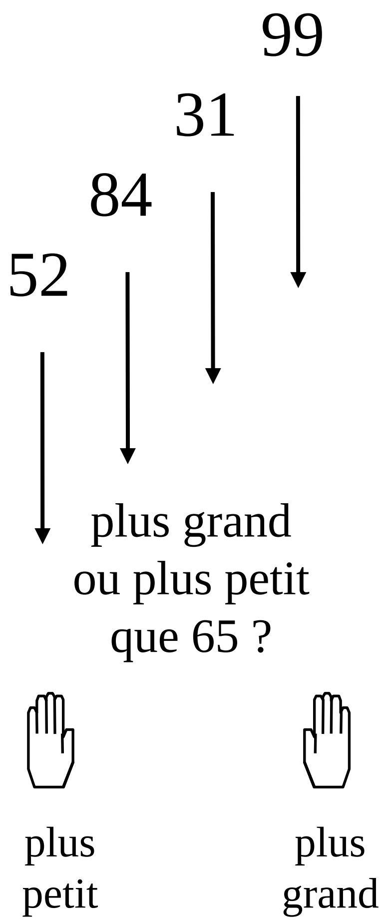


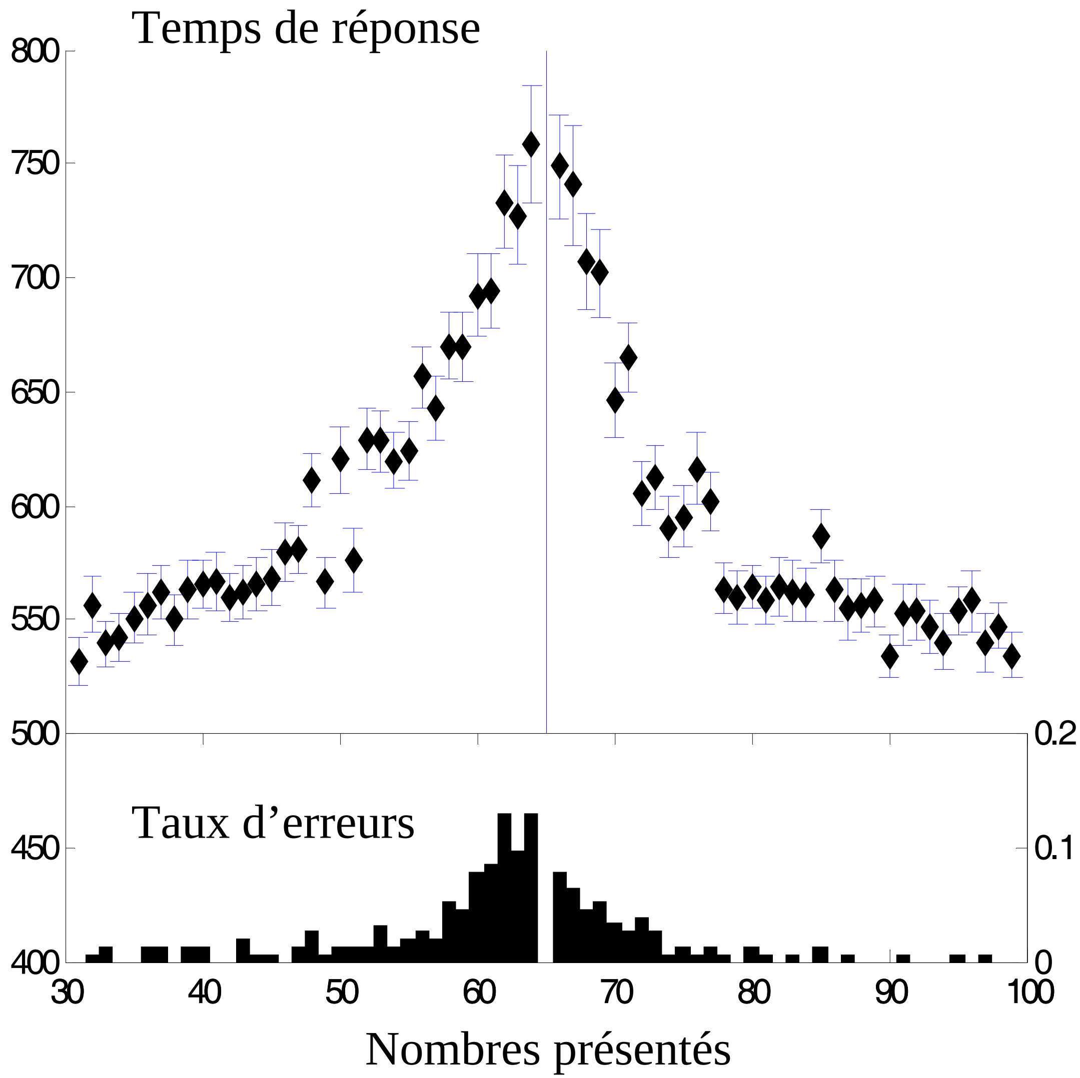


Même la compréhension des **symboles** numériques fait appel au sens des quantités

L'effet de distance en comparaison de nombres

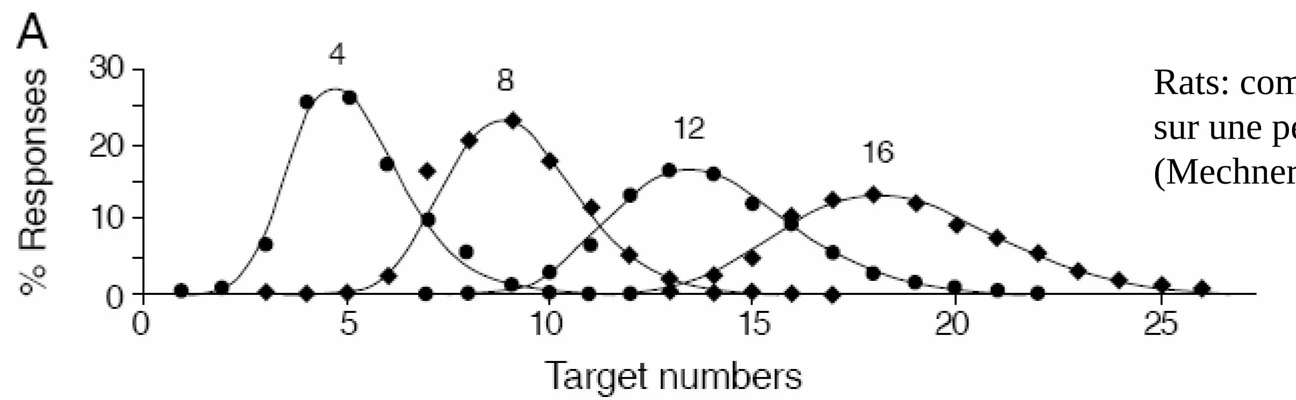
découvert par Moyer et Landauer en 1967



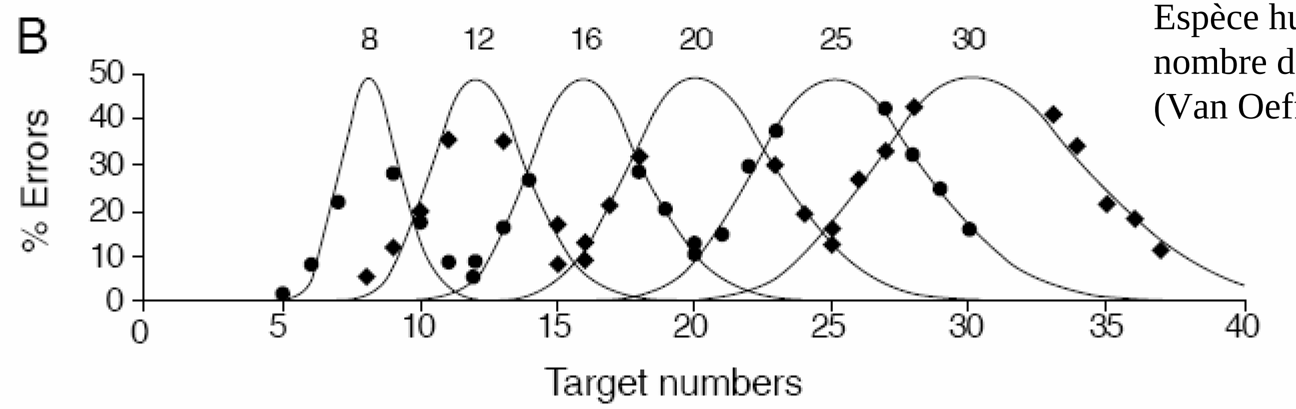


Continuité phylogénétique et épigénétique de la représentation analogique des nombres

La tâche de jugement pareil/différent



Rats: comparaison du nombre d'appuis sur une pédale avec une référence fixe (Mechner, 1958)



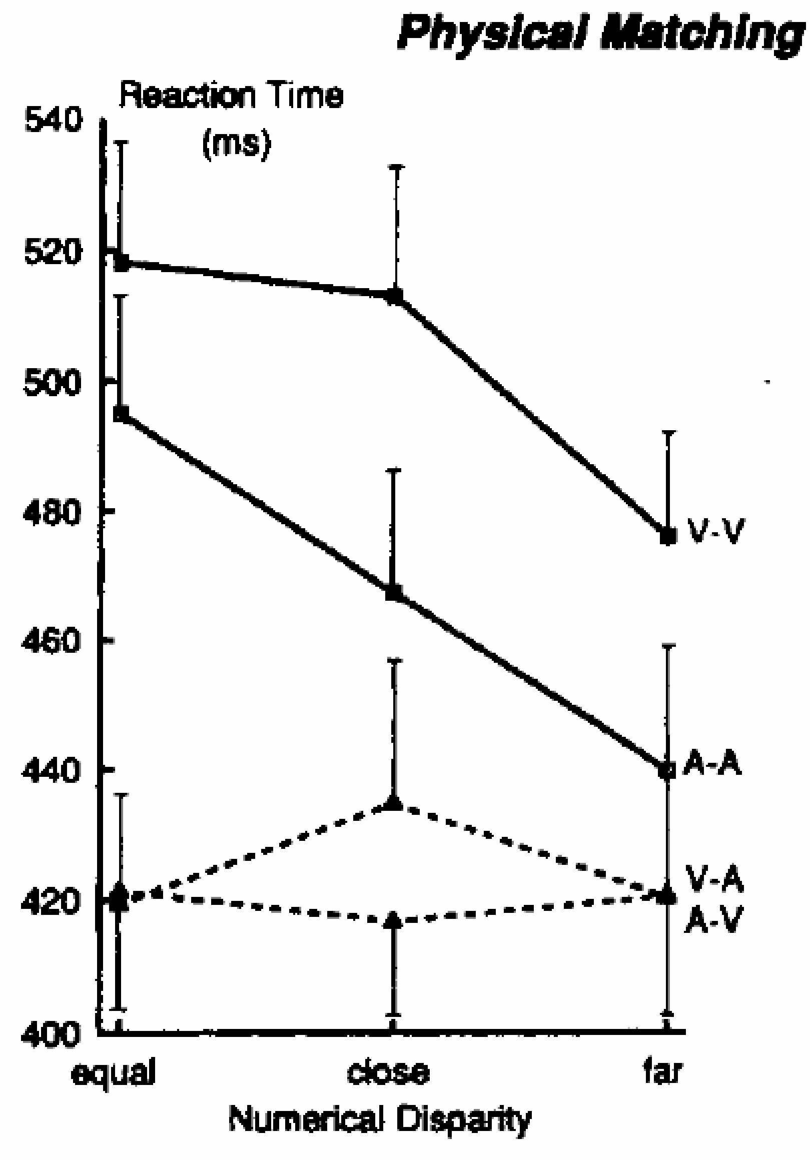
Espèce humaine: comparaison d'un nombre de points avec une référence fixe (Van Oeffelen and Vos, 1982)

L’intuition numérique chez l’adulte humain

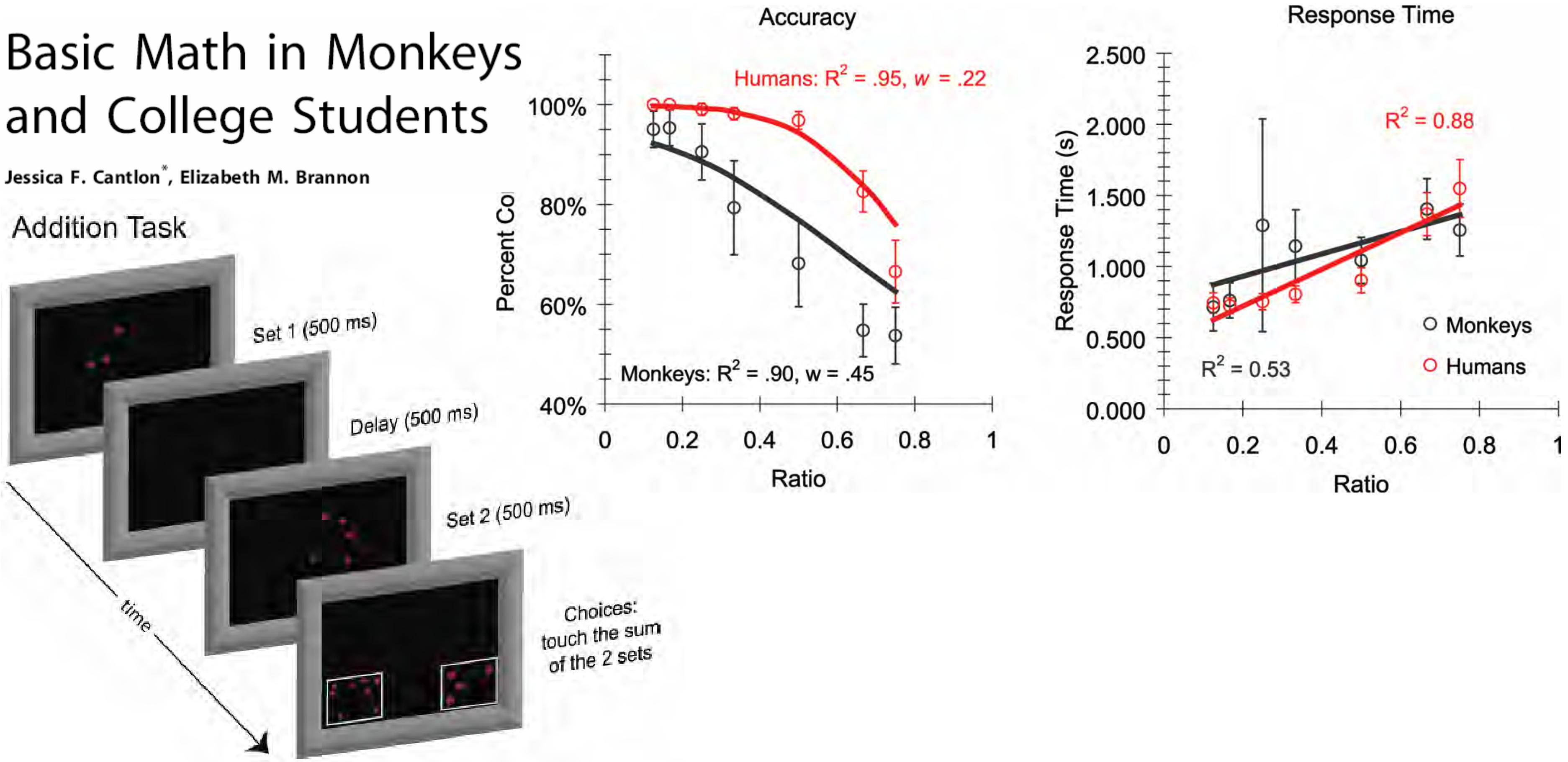
- Le jugement pareil-différent avec des symboles montre un effet de distance numérique (Duncan & McFarland, 1980; Dehaene & Akhavein, 1994):

8 ≠ 9 versus 2 ≠ 9

Conclusion: Même lorsque les nombres sont présentés sous forme de symboles, l’accès au sens des quantités numériques est automatique et rapide.



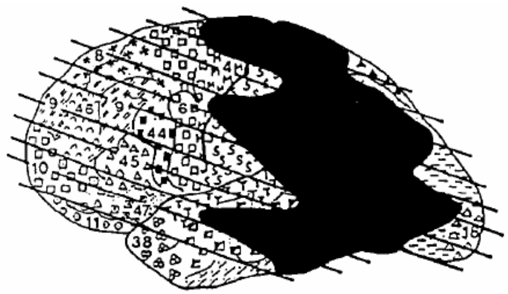
Le calcul numérique approximatif



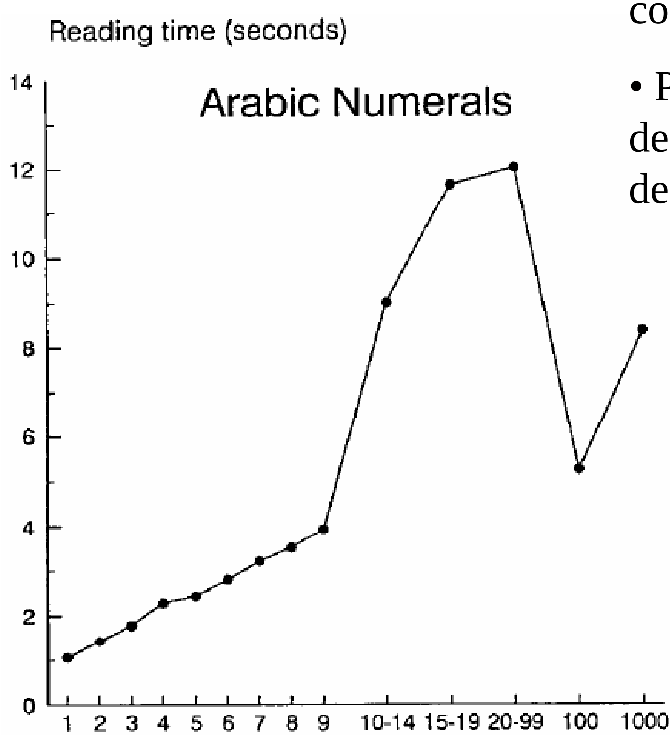
La vérification des opérations **symboliques** montre également un effet de distance numérique (Ashcraft et al., 1981):

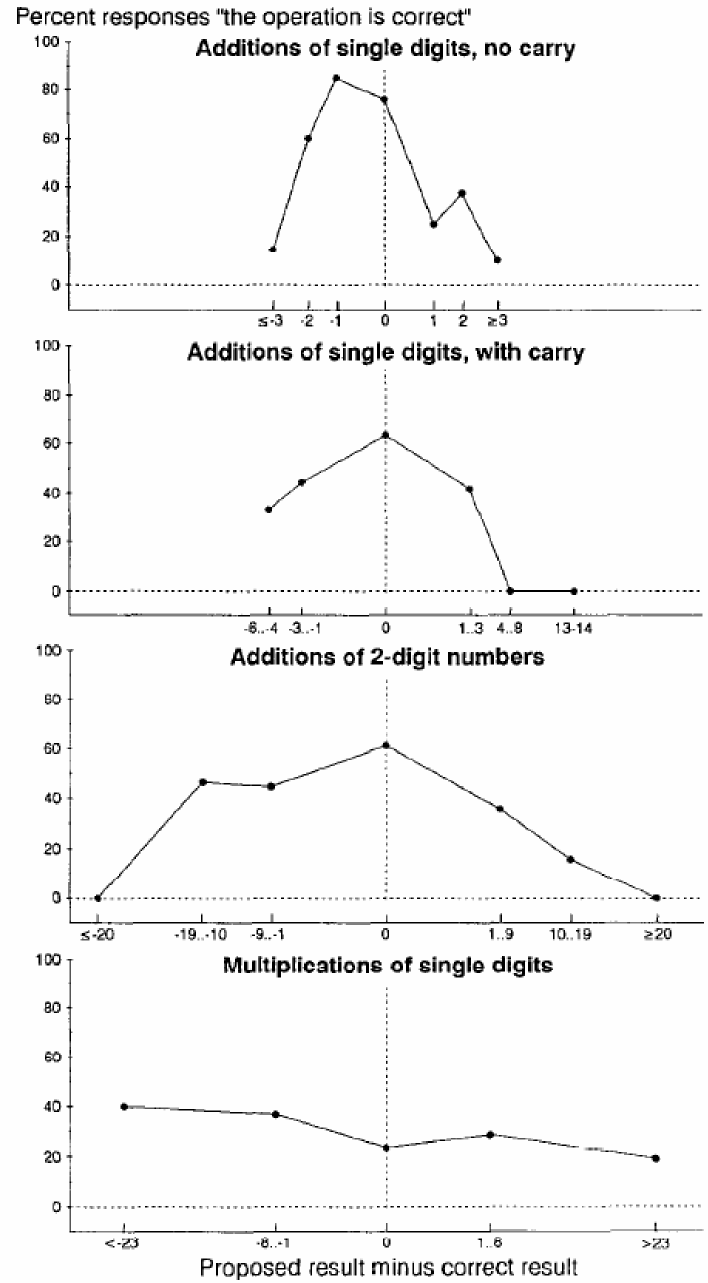
21+34=55, 65 ou 95

Deux systèmes de calcul mental?



- Patient Nau…: aphasie et alexie sévère
- Ralentissement du temps de lecture des nombres arabes
- Mais….
  - Parvient à lire en comptant sur les doigts
  - Parvient à approximer des additions, mais pas des multiplications





Dehaene, S. and L. Cohen (1991). "Two mental calculation systems: A case study of severe acalculia with preserved approximation." Neuropsychologia **29**: 1045-1074.

Symbolic arithmetic knowledge without instruction
Gilmore, McCarthy & Spelke, *Nature 2007*

- Enfants de maternelle (5 ou 6 ans)
- de niveau socio-économique favorisé ou défavorisé
- Tests d'approximation sur des grands nombres et des opérations jamais enseignées explicitement
- Performances supérieures au hasard (60-75%)
- Performances corrélées avec la réussite en mathématiques à l'école

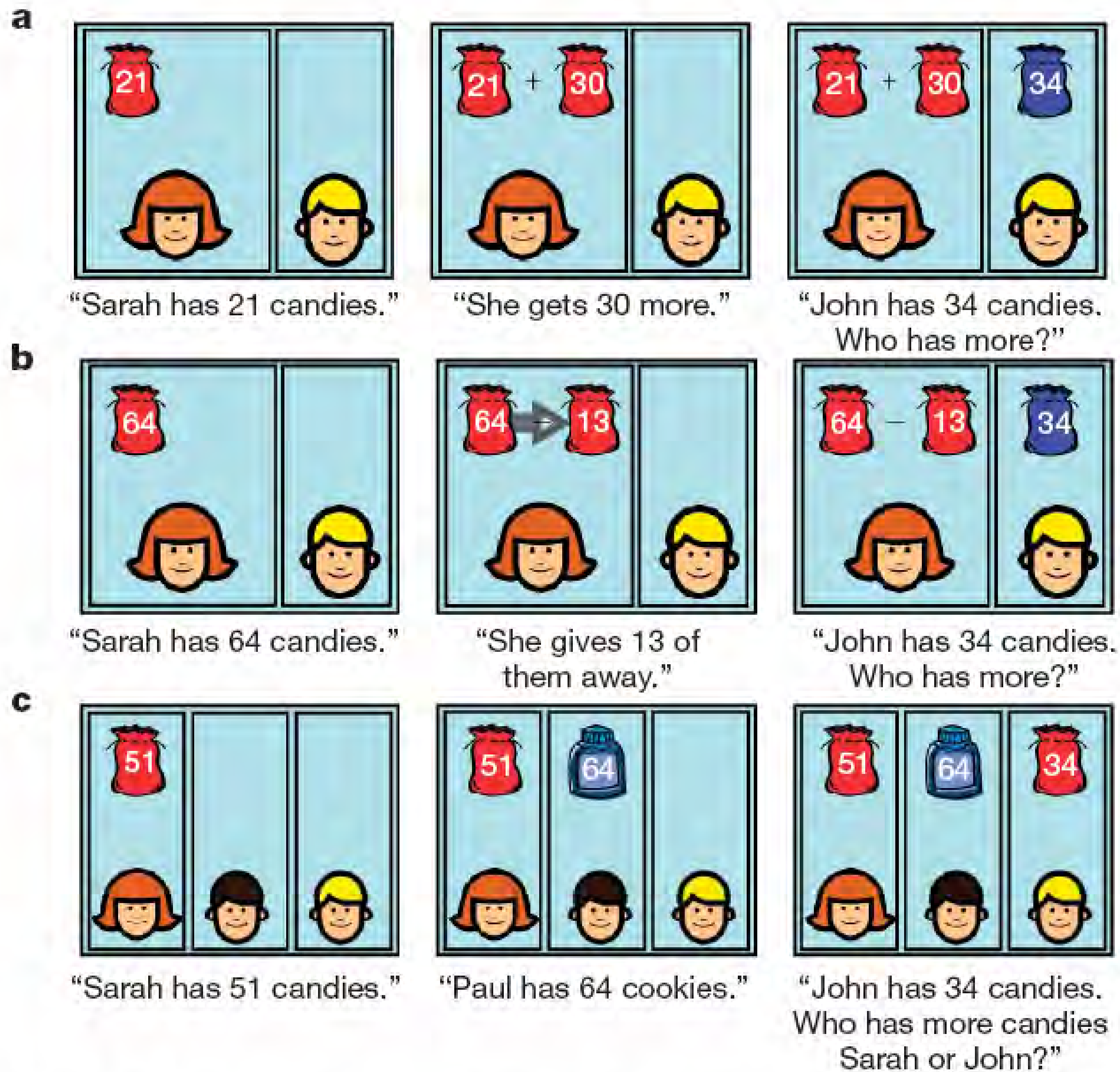


Figure 1 | Example problems of symbolic, approximate arithmetic.
a, Addition; **b**, subtraction; and **c**, comparison.

Conclusions

- Au moins trois systèmes distincts contribuent au « sens du nombre »:
  1. La subitisation pour les ensembles de 1, 2 ou 3 objets
  2. L'estimation de la numérosité, bien au-delà de 3 objets
  3. Le comptage, fondé sur la correspondance terme-à-terme, pour parvenir à la cardinalité exacte
- La subitisation et l'estimation sont présents très précocement chez l'enfant, et existent également chez de nombreuses espèces animales
- Ces processus numériques confèrent à l'enfant, très précocement, le « sens du nombre » et une capacité de calcul approximatif
- A l'âge adulte, nous continuons à accéder rapidement à la représentation analogique des nombres, même lorsque ceux-ci nous sont présentés sous forme de symboles