Raisonner à propos du temps en logique de séparation

François Pottier

en collaboration avec A. Charguéraud, A. Guéneau, G. Mével, J.-H. Jourdan

1er avril 2021

En r'tard, en r'tard
J'ai rendez-vous que'que part
Je n'ai pas le temps de dire au revoir
Je suis en r'tard, en r'tard

Quelles propriétés des programmes vérifions-nous ?

Quand on parle de vérifier un programme, on pense souvent à garantir :

- la *sûreté*, l'absence d'erreurs graves pendant l'exécution ;
  overflows, divisions par zéro, accès en dehors des bornes...
- la *correction fonctionnelle*, le fait de produire un résultat correct ;
- la *terminaison*.

Quelles propriétés des programmes vérifions-nous ?

Toutefois, on peut aussi souhaiter garantir des propriétés de *sécurité*,

ou encore contrôler l'utilisation de *ressources* telles que :

- la mémoire vive,
- la mémoire de masse (les disques durs et disques SSD),
- la communication via un réseau,
- la consommation électrique,
- le *temps*.

Comment raisonner à propos du temps ?

Nous avons déjà mentionné la *non-terminaison*,
le cas le plus évident d'abus de la ressource "temps".

- C'est (habituellement) un comportement indésirable.
- Il est relativement facile à écarter en pratique.
  – *on associe un variant aux boucles et aux fonctions récursives*

Comment raisonner à propos du temps ?

Terminer, c'est bien, mais terminer quand ?

Peut-on garantir la terminaison *dans un délai* explicitement borné ?

Comment raisonner à propos du temps ?

Terminer, c'est bien, mais terminer quand ?

Peut-on garantir la terminaison *dans un délai* explicitement borné ?

On imagine assez facilement les attraits et difficultés d'une telle idée...

Parmi les attraits,

- Éliminer une catégorie *d'erreurs de programmation*.
  - *on commet parfois une erreur qui compromet la complexité mais pas la correction.*
  - *dommage, car si on a choisi un algorithme plus évolué, c'est bien pour gagner en performance !*
- Éliminer une catégorie de *failles de sécurité*.
  - *p.ex. attaques de déni de service contre des tables de hachage*

Difficultés

On ne maîtrise pas le *temps réel*.

On peut compter les opérations, ou les cycles.

C'est fastidieux. De plus, le compte exact dépend

- du *langage* de programmation choisi,
- du *compilateur* utilisé,
- du *processeur* utilisé,
- des aléas du système d'exploitation, du système mémoire, etc.

Nous ne parlerons donc pas ici d'analyse du temps réel (*WCET*).

On veut une façon plus abstraite de mesurer l'efficacité d'un programme.

La complexité asymptotique, idée 1

Compter les opérations *à une constante près,*
et laisser cette constante non spécifiée.

- Publier $O(n)$ au lieu de $13n + 237$.
- La constante cachée peut dépendre du code, pas des données.

Cette information incomplète n'empêche pas les comparaisons :

- $O(n \log n)$ est plus rapide que $O(n^2)$ pour n *assez grand*.

Ce style de spécification est *modulaire* et *robuste*.

- Remplacer $13n + 237$ par $9n + 323$ n'affecte pas les utilisateurs.

La complexité asymptotique, idée 2

Compter *seulement certaines opérations* représentatives.

Dans un tri, on pourrait ne compter que les comparaisons.

On peut toujours se contenter de compter les *appels de fonction* et les *entrées dans le corps d'une boucle*.

Dans la suite, je supposerai qu'on a inséré dans le code des *tick*()
et je ne compterai que ces pseudo-instructions.

Le *placement* des *tick*s détermine ce que l'on compte ;
le *comptage* des *tick*s est indépendant de leur placement.

Hopcroft (1986) rappelle l'état de l'art dans les années 1960 :

> *Research on algorithms [was] very unsatisfying. A researcher would publish an algorithm [...] along with execution times for a small set of sample problems. [...] Later, a second researcher would give an improved algorithm along with execution times for the same set of sample problems. The new algorithm would invariably be faster, since in the intervening years, both computer performance and programming languages had improved.*

Il raconte comment l'idée de complexité asymptotique a été accueillie :

> *The idea met with much resistance. People argued that faster computers would remove the need for asymptotic efficiency. Just the opposite is true, however, since as computers become faster, the size of the attempted problems becomes larger.*

Skiena (1997) confirme cela : « I was a Victim of Moore's Law ».

> *Over the years, my users started asking why it took so long to do a modest-sized graph computation. The mystery wasn't that my program was slow. The question was : why did it take so many years for people to figure this out ?*

Plus les machines s'améliorent, plus les algos inefficaces semblent lents !

Tarjan, co-récipient du prix Turing (1986), écrit :

> *As a measure of computational efficiency, we settled on the worst-case time, as a function of the input size, of an algorithm [...]. We chose to ignore constant factors in running time, so that our measure could be independent of any machine model and of the details of any algorithm implementation. An algorithm efficient by this measure tends to be efficient in practice. This measure is also analytically tractable, which meant that we would be able to actually derive interesting results about it.*

Tarjan ajoute :

> *What is important in most applications is the time taken by an entire sequence of operations rather than by a single operation.*

C'est la complexité *amortie* ;

nous en reparlerons plus loin.

Simple problème de comptage ?

Simple problème de comptage, donc ? Oui, mais :

- à partir d'un véritable code source, pas d'un pseudo-code
- dans le cadre d'un système de vérification de programmes
  - une propriété de *correction* peut aider la preuve de complexité,
  - une propriété de *possession* peut aider la preuve de complexité,
  - un argument de complexité peut aider la preuve de correction !

Quelles difficultés ?

Un spectre de questions, mathématiques / ingénierie / informatique :

- comprendre $O(\ldots)$ en présence de plusieurs paramètres
- gérer les *quantificateurs* $\exists$ *cachés* dans les $O(\ldots)$
- automatiser (autant que possible) la *synthèse* de fonctions de coût
- écrire des spécifications *modulaires* : précises, *pas trop* précises
- autoriser arguments de correction et de complexité à *interagir*
- concevoir et justifier une *logique de programmes* adaptée

Je me focalise aujourd'hui principalement sur les deux derniers points.

Plan de cet exposé

J'aborderai aujourd'hui

- le comptage *global* du temps en logique de Hoare
- le comptage *local* du temps en logique de séparation
  les *crédits* et l'analyse amortie
- l'analyse amortie de programmes *paresseux*
  les *débits* et leur lien avec les crédits
- les vertus de la *lenteur*
  les *reçus*

Une première idée-clef

La logique de Hoare garantit une propriété de *l'état final* atteint lors d'une exécution.

Si l'état comprend un *historique*, alors elle peut garantir une propriété *d'une exécution toute entière*.

Si l'état comprend une *horloge*, alors elle peut garantir que l'exécution *ne dure pas plus* d'un certain temps.

Ajoutons à l'état du programme une horloge H, un compteur entier.

Considérons que *tick*() décrémente H *et peut planter* :

$$tick() \quad = \quad \text{if } H > 0 \text{ then } H := H - 1 \text{ else } crash()$$

Supposons que H n'est pas modifié en dehors de *tick*().

Alors, vérifier qu'un programme est *sûr* (ne plante pas)
suffit à garantir qu'il n'exécutera pas plus de H_0 instructions *tick*(),
où H_0 est la valeur initiale de H.

Une horloge sans influence

La logique de Hoare permet donc de *raisonner à propos du temps !*

De plus, si nous vérifions que l'instruction *crash*() n'est jamais atteinte, alors les appels à *tick*() n'ont aucun effet et peuvent être supprimés.

Bien que l'horloge H ne soit pas *a priori* une variable fantôme, elle se révèle *a posteriori* effaçable. Elle n'est qu'un *artifice de raisonnement*.

Une spécification fondamentale

Un lemme fondamental est la spécification de *tick*() :

$$\forall h.\{H = h \wedge h > 0\}\ \mathit{tick}()\ \{H = h - 1\}$$

On peut montrer en logique de Hoare que ce triplet est valide,
et ce, même en l'absence d'un triplet qui décrit *crash*().

La précondition exige de *montrer qu'il reste du temps*.

La postcondition reflète le fait que le temps restant décroît.

Quelques spécifications typiques

On raisonne ensuite à propos de programmes *"tiqués"*,
c'est à dire dans lesquels on a placé des instructions *tick*().

À une fonction qui calcule la somme des éléments d'un tableau,
on pourrait donner cette spécification :

$$\{|A| = n \wedge H = h \wedge h \geq n + 1\}$$
$$S := sum(A)$$
$$\{S = \Sigma_{i=0}^{i<n} A[i] \wedge H = h - (n + 1)\}$$

Elle indique que ce calcul consomme *exactement* $n + 1$ unités de temps.

Spécification ordinaire et spécification de la complexité sont *combinées*.

- *elles sont vérifiées ensemble*
- *la preuve de correction peut aider la preuve de complexité*

En général, il sera difficile de décrire exactement le temps consommé ; on se contentera d'exprimer une *borne supérieure*.

Par exemple, à une fonction *lsearch* qui cherche un élément dans un tableau, on pourrait attribuer cette spécification :

$$\{|A| = n \wedge H = h \wedge h \geq n + 1\}$$
$$I := \mathit{lsearch}(A, X)$$
$$\{\ldots \wedge H \geq h - (n + 1)\}$$

Elle indique que ce calcul consomme *au plus* $n + 1$ unités de temps.

Théorème (Sûreté)

Si $\{H = n\}\ p\ \{True\}$ *est dérivable, alors une exécution quelconque du programme p ne contient pas plus de n instructions tick*().

Ce théorème ne parle pas directement du *temps* d'exécution de p.

– En réalité, seul, il n'en garantit même pas la terminaison !

Mais si on a habilement placé les instructions *tick*() dans p, alors *le nombre total* d'instructions exécutées et *le nombre de tick*() exécutés ne peuvent différer que d'un facteur constant.

Crary et Weirich (2000) présentent une approche fondée sur un compteur global, sous la forme d'un système de types.

Dockins et Hobor (2012) proposent une logique analogue, en présence de fonctions d'ordre supérieur.

Haslbeck et Nipkow (2018) définissent et comparent formellement plusieurs logiques capables de raisonner à propos du temps.

La force de la logique de séparation

La logique de séparation permet de

- ne mentionner dans une spécification *que ce dont on a besoin*,
- penser en termes de *possession* et de *transferts* de possession.

Peut-on appliquer cela au temps ?

La force de la logique de séparation

La logique de séparation permet de

- ne mentionner dans une spécification *que ce dont on a besoin*,
- penser en termes de *possession* et de *transferts* de possession.

Peut-on appliquer cela au temps ?

L'idée est de ne plus mentionner l'horloge globale H
mais de *répartir* la possession du temps restant à dépenser.

Définition des crédits-temps

Un crédit-temps, noté $\$1$, est une assertion.

– comme l'assertion $l \mapsto v$, par exemple

Elle représente *la possession d'une unité*
de la valeur actuelle de l'horloge H.

On maintient *l'invariant* que si la variable H contient la valeur h,
alors il y a au plus h crédits-temps en circulation.

Définition des crédits-temps

Un crédit-temps, noté $\$1$, est une assertion.
– comme l'assertion $l \mapsto v$, par exemple

Elle représente *la possession d'une unité*
de la valeur actuelle de l'horloge H.

On maintient *l'invariant* que si la variable H contient la valeur h,
alors il y a au plus h crédits-temps en circulation.

Une analogie monétaire utile :

- h lingots d'or sont stockés à la Banque de France ;
- au plus h billets de banque sont en circulation ;
- chaque billet est une preuve d'existence d'un lingot à la Banque.

Propriété fondamentale des crédits-temps

On peut établir pour *tick*() la spécification suivante :

$$\{\$1\}\ \mathit{tick}()\ \{\mathit{True}\}$$

Ce triplet affirme que *tick*() *consomme* un crédit.

Un crédit est donc une *permission* à dépenser une unité de temps.

Propriété fondamentale des crédits-temps

On peut établir pour *tick*() la spécification suivante :

$$\{\$1\}\ tick()\ \{True\}$$

Ce triplet affirme que *tick*() *consomme* un crédit.

Rappelons que *tick*() décrémente H et peut planter :

$$tick() \quad = \quad \text{if } H > 0 \text{ then } H := H - 1 \text{ else } crash()$$

L'assertion \$1 permet de montrer que $H > 0$ doit être vrai.

La décrémentation de H préserve l'invariant, si on abandonne \$1.

- de un billet et un lingot, on passe à zéro billet et zéro lingot
- l'invariant "#billets $\leq$ #lingots" reste satisfait

Propriété fondamentale des crédits-temps

On peut établir pour *tick*() la spécification suivante :

$$\{\$1\}\ tick()\ \{True\}$$

Ce triplet affirme que *tick*() *consomme* un crédit.

On peut le comparer au précédent, exprimé en logique de Hoare :

$$\forall h.\{H = h \wedge h > 0\}\ tick()\ \{H = h - 1\}$$

On ne fait plus référence à H. On a *décentralisé* le comptage du temps.

Autres propriétés des crédits-temps

Les crédits-temps se comportent comme des billets de banque.

Un crédit est *affine* (jetable), mais *pas duplicable*.

– jeter un crédit revient à sur-approximer un coût

Un crédit ne peut pas être créé à partir de rien.

Les crédits peuvent être assemblés et séparés :

$$\$(m+n) \equiv m\$ \star \$n$$
$$\$0 \equiv \mathit{True}$$

La règle d'encadrement donne alors pour $\mathit{tick}()$ la spécification :

$$\{\$(n+1)\}\ \mathit{tick}()\ \{\$n\}$$

Le théorème qui affirme la sûreté de la logique est inchangé :

Théorème (Sûreté)

Si {$n} *p* {*True*} *est dérivable, alors une exécution quelconque du programme p ne contient pas plus de n instructions tick*().

La logique de séparation avec crédits permet une analyse *au pire cas*.

À la fonction *lsearch*, on pourrait attribuer cette spécification :

$$\{\mathit{isArray}(a, xs) \star |xs| = n \star \$(n+1)\}$$
$$I := \mathit{lsearch}(a, x)$$
$$\{\mathit{isArray}(a, xs) \star \ldots\}$$

Elle indique que *lsearch* *consomme* $n+1$ crédits-temps,
où n est la longueur du tableau a.

Cela *ne garantit pas* que $\mathit{lsearch}(a, x)$ exécute au plus $n+1$ *tick*s.
– Cette garantie n'est donnée que pour les programmes complets.

Une lecture plus subtile des spécifications

De façon générale, face à une spécification de cette forme :

$$\{P \star \$n\}\ c\ \{Q\}$$

on *ne peut pas* conclure que la commande c exécute au plus n *tick*(),

parce que l'assertion P pourrait donner accès à d'autres crédits-temps, en plus des n crédits visibles ici.

C'est précisément cela qui va permettre l'analyse *amortie*.

Une file d'attente

Prenons l'exemple d'une *file d'attente*

implémentée par deux listes chaînées *front* et *rear*.

Cette structure est *immuable* donc persistante :

insérer ou extraire un élément produit une nouvelle file.

Code de la file d'attente

```
let put (Q (front, rear)) x =
  Q (front, x :: rear)                          – insert into rear list

let get (Q (front, rear)) =
  match front with
  | x :: front →                                – extract out of front list
      Some (x, Q (front, rear))
  | [] →                                        – if front list is empty,
      match revappend rear [] with              – reverse rear list (costly)
      | x :: rear →
          Some (x, Q (rear, []))                – and make it the front list
      | [] →
          None                                  – both lists are empty ; return nothing
```

Spécification de la file d'attente

En logique de séparation ordinaire, pour commencer.

On publie l'existence d'un prédicat abstrait $\mathit{isQueue}(q, xs)$.

On publie les spécifications :

$$\{\mathit{isQueue}(q, xs)\}$$
$$\mathit{put}\ q\ x$$
$$\{q'.\ \mathit{isQueue}(q', xs +\!\!+ [x])\}$$

$$\{\mathit{isQueue}(q, [])\}$$
$$\mathit{get}\ q$$
$$\{r.\ r = \mathit{None}\}$$

$$\left\{\ \mathit{isQueue}(q, x :: xs)\ \right\}$$
$$\mathit{get}\ q$$
$$\left\{\begin{array}{c} r.\ \exists q'.\ r = \mathit{Some}\ (x, q') \star \\ \mathit{isQueue}(q', xs) \end{array}\right\}$$

Preuve de la file d'attente

Pour vérifier cette structure de données, il faut définir son *invariant* interne, qui pourrait ressembler à ceci :

$$\begin{array}{l} \mathit{isQueue}(q, xs) = \\ \quad \exists \mathit{front}, \mathit{rear}.\ q = Q(\mathit{front}, \mathit{rear}) \wedge xs = \mathit{front} +\!\!+ \mathit{rev}(\mathit{rear}) \end{array}$$

Cet invariant est pur donc *duplicable* :

$$\mathit{isQueue}(q, xs) \vdash \mathit{isQueue}(q, xs) \ \star \ \mathit{isQueue}(q, xs)$$

Deux acteurs indépendants peuvent utiliser une même file.

Spécification de la file d'attente

En logique de séparation avec crédits-temps, ensuite.

Je suppose qu'un *tick*() est inséré au début de chaque fonction.

On adapte les spécifications :

$$\{\mathit{isQueue}(q, xs) \star \$1\}$$
$$\mathit{put}\ q\ x$$
$$\{q'.\ \mathit{isQueue}(q', xs +\!\!+ [x])\}$$

$$\{\mathit{isQueue}(q, []) \star \$1\}$$
$$\mathit{get}\ q$$
$$\{r.\ r = \mathit{None}\}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \mathit{isQueue}(q, x :: xs) \star \\ |x :: xs| = n \star \$(n+1) \end{array} \right\}$$
$$\mathit{get}\ q$$
$$\left\{ \begin{array}{c} r.\ \exists q'.\ r = \mathit{Some}\ (x, q') \star \\ \mathit{isQueue}(q', xs) \end{array} \right\}$$

Preuve de la file d'attente

On adapte la preuve, sans modifier *isQueue*.

À chaque *tick*(), on dépense un crédit.

Toutefois, cette analyse peut sembler très *pessimiste* :

chaque appel à *get* exige $n + 1$ crédits,

bien qu'en réalité le pire cas ne se produise que rarement.

Une analyse *amortie* est plus précise...

Le principe de l'analyse amortie est bien connu (Tarjan, 1985) :

- *augmenter le coût apparent* de certaines opérations,
- pour pouvoir *économiser*, et ainsi
- *piocher dans le bas de laine* en cas de coup dur.

Analyse amortie de la file d'attente

Dans le cas de la file d'attente, l'idée est de :

- prétendre que chaque *put* coûte non pas 1 mais *2 crédits*,
- pour *disposer en permanence de n crédits*, où $n = |rear|$, et ainsi
- couvrir le coût de l'appel à *revappend* quand il a lieu.

Pour exprimer cela, l'invariant doit *posséder* des crédits.

– *on ne pouvait pas exprimer cela en logique de Hoare*

L'invariant interne devient donc :

$$\begin{array}{l} \mathit{isQueue}(q, xs) = \\ \quad \exists \mathit{front}, \mathit{rear}.\ q = Q(\mathit{front}, \mathit{rear}) \wedge xs = \mathit{front} +\!\!+ \mathit{rev}(\mathit{rear}) \ \star\ \$|\mathit{rear}| \end{array}$$

Après avoir adapté la preuve, on obtient une spécification différente :

$$\{\mathit{isQueue}(q, xs) \ \star\ \$2\}$$
$$\mathit{put}\ q\ x$$
$$\{q'.\ \mathit{isQueue}(q', xs +\!\!+ [x])\}$$

$$\{\mathit{isQueue}(q, []) \ \star\ \$1\}$$
$$\mathit{get}\ q$$
$$\{r.\ \mathit{isQueue}(q, []) \ \star\ r = \mathit{None}\}$$

$$\{\mathit{isQueue}(q, x :: xs) \ \star\ \$1\}$$
$$\mathit{get}\ q$$
$$\{r.\ \exists q'.\ r = \mathit{Some}\ (x, q') \ \star\ \mathit{isQueue}(q', xs)\}$$

Lecture amortie d'une spécification

On a placé des crédits-temps dans le prédicat abstrait *isQueue*.

Même si *get* consomme *visiblement* seulement 1 crédit,

– *son coût amorti est 1*

son coût réel peut être supérieur.

$$\{\mathit{isQueue}(q, xs) \star \$1\}\ \mathit{get}\ q\ \{\ldots\}$$

Restriction du partage

L'analyse amortie est *incorrecte* si on utilise *deux fois* une structure :

$get\ q_1$ **>>=** **fun** $(x, q_2) \rightarrow$ – *spend my savings* !
let $q_3 = put\ q_2\ y$ **in**
$get\ q_1$ **>>=** **fun** $(z, q_4) \rightarrow$ – *spend my savings* ? *they are gone already* !
...

Ce code ne pourra pas être vérifié car *isQueue n'est plus duplicable* mais affine.

La présence de crédits-temps dans une structure de données impose de *renoncer au partage* de cette structure.

Deux spécifications incomparables

Nous avons donné *deux spécifications incomparables* de la file d'attente.

- Dans la première, *isQueue* est duplicable, mais *get* coûte $O(n)$.
- Dans la seconde, *get* coûte \$1 seulement, mais *isQueue* est affine.

Il peut exister *plusieurs présentations de la complexité* d'un algorithme, et différents clients ont besoin de différentes analyses.

C'est un problème ouvert potentiellement difficile.

Atkey (2011) et Pilkiewicz et Pottier (2011) introduisent l'idée des crédits-temps.

Nipkow (2015) vérifie l'analyse amortie de diverses structures de données, sans crédits-temps.

Charguéraud et Pottier (2017), Zhan et Haslbeck (2018), Guéneau et al. (2019), Haslbeck et Lammich (2021) exploitent les crédits-temps pour vérifier divers algorithmes.

Guéneau et al. (2019) proposent les crédits-temps *négatifs*.

Mével et al. (2019) définissent les crédits-temps à l'aide de l'état fantôme et des invariants d'Iris.

Une tension et un début d'idée

L'analyse amortie de la file d'attente est *plus précise*
que l'analyse pessimiste ordinaire
mais impose de *renoncer au partage*.

Le problème provient du danger qu'une opération coûteuse,
le renversement de la liste *rear*,
soit effectué deux fois.

Pourrait-on éviter cela ?

Une tension et un début d'idée

L'analyse amortie de la file d'attente est *plus précise*
que l'analyse pessimiste ordinaire
mais impose de *renoncer au partage*.

Le problème provient du danger qu'une opération coûteuse,
le renversement de la liste *rear*,
soit effectué deux fois.

Pourrait-on éviter cela ?

Pourrait-on *mémoiser* les calculs coûteux pour éviter de les répéter ?

Une *suspension* est une structure de données très simple qui représente
soit un calcul en attente,
soit le résultat de ce calcul.

En OCaml, on la trouve dans la bibliothèque *Lazy* :

type $'a\ t$
val *fromfun* : $(unit \rightarrow 'a) \rightarrow 'a\ t$
val *force* : $'a\ t \rightarrow 'a$

Une suspension construite par *fromfun f*
peut être "forcée" zéro, une, ou plusieurs fois,
mais le calcul $f()$ aura lieu une fois au plus.

Approfondir l'idée

Utiliser des suspensions, c'est bien, mais cela ne suffit pas.

Il est essentiel de les créer *suffisamment longtemps avant* que leur valeur ne soit exigée, pour que leur résultat soit *réutilisé suffisamment de fois*.

Okasaki (1999) propose de *prévoir* – mais non pas *effectuer* –
le renversement de la liste *rear* dès que celle-ci devient assez longue – par exemple, plus longue que la liste *front*. Il impose donc $|rear| \leq |front|$.

Il baptise cette structure *file du banquier* ou *banker's queue*.

La file d'attente d'Okasaki

```
type 'a stream =
  'a cell Lazy.t      – computation is suspended

and 'a cell =
  | Nil
  | Cons of 'a × 'a stream

type 'a queue = {
  lenf : int ;        – length of front sequence
  f : 'a stream ;     – lazy front sequence, computed on demand
  lenr : int ;        – length of rear sequence
  r : 'a list ;       – ordinary rear sequence, stored in memory
}                     – invariant : lenf ≥ lenr
```

La file d'attente d'Okasaki

```
let put q x =
  check { q with                    – rebalance
    lenr = q.lenr + 1 ;
    r = x :: q.r ;                  – insert into rear list
  }

let get q =
  match extract q.f with            – extract out of front sequence (forcing a thunk)
  | None →                          – if front list is empty...
      None                          – ...then rear list is empty too
  | Some (x, f) →
      Some (x,
        check { q with              – rebalance
          f = f ;
          lenf = q.lenf - 1 ;
      })
```

La fonction *check* renverse la liste *rear* si elle est devenue trop longue.

```
let check ({ lenf = lenf ; f = f ; lenr = lenr ; r = r } as q) =
  if lenf ≥ lenr then
    q                          – invariant holds ; nothing to do
  else {                       – we have lenf + 1 = lenr
    lenf = lenf + lenr ;
    f = f ++ rev r ;           – re-establish invariant
    lenr = 0 ;
    r = [] ;
  }
```

La suspension *rev r* est coûteuse, mais ne sera forcée que lorsque tous les éléments de *f* auront été extraits, donc son coût par élément extrait est constant.

La fonction *check* renverse la liste *rear* si elle est devenue trop longue.

```
let check ({ lenf = lenf ; f = f ; lenr = lenr ; r = r } as q) =
  if lenf ≥ lenr then
    q                          – invariant holds ; nothing to do
  else {                       – we have lenf + 1 = lenr
    lenf = lenf + lenr ;
    f = f ++ rev r ;           – re-establish invariant
    lenr = 0 ;
    r = [] ;
  }
```

La suspension *rev r* est coûteuse, mais ne sera forcée que lorsque tous les éléments de *f* auront été extraits, donc son coût par élément extrait est constant.

Vous y croyez ? Vous ne devriez pas. Demandez une preuve !

L'analyse amortie d'Okasaki

Okasaki (1999) explique comment analyser informellement la complexité *amortie* de ces structures paresseuses.

Il y parvient, bien que les suspensions soient *partagées*,
et sans imposer aucune restriction sur ce partage.

Okasaki (1999) explique comment analyser informellement la complexité *amortie* de ces structures paresseuses.

Il y parvient, bien que les suspensions soient *partagées*,
et sans imposer aucune restriction sur ce partage.

L'idée-clef est de ne pas raisonner en termes de crédits, mais de *débits*.

- Si $\mathit{isQueue}(q, xs)$ contient des crédits,
alors $\mathit{isQueue}(q, xs) \not\vdash \mathit{isQueue}(q, xs) \star \mathit{isQueue}(q, xs)$,
ce qui nous interdit de partager la file d'attente.
- Si un débit représente une *dette*, alors on peut dupliquer un débit :
cela nous conduit à *augmenter* notre dette, donc à *sur-approximer*
le coût réel du calcul analysé.

L'analyse amortie d'Okasaki

Okasaki associe un *débit*, une dette, à chaque suspension.

Il autorise *un paiement en plusieurs fois*.

Le débit est donc ce qui *reste à payer*
avant d'être autorisé à forcer cette suspension.

Je dirai parfois que c'est le "coût" de cette suspension,
mais ce n'est qu'un *coût résiduel* virtuel,
inférieur au coût réel du calcul suspendu.

Le raisonnement d'Okasaki est informel.

L'explication de Danielsson

Danielsson (2008) formalise les idées d'Okasaki sous forme de typage.

Thunk n a est le type d'une suspension à laquelle sont associés *n* débits.

Il propose les opérations suivantes :

$$
\begin{aligned}
\mathit{return} &: a \to \mathit{Thunk}\ 0\ a \\
\mathit{tick} &: \mathit{Thunk}\ n\ a \to \mathit{Thunk}\ (n+1)\ a \\
\mathit{bind} &: \mathit{Thunk}\ m\ a \to (a \to \mathit{Thunk}\ n\ b) \to \mathit{Thunk}\ (m+n)\ b \\
\mathit{wait} &: \mathit{Thunk}\ m\ a \to \mathit{Thunk}\ (m+n)\ a \\
\mathit{pay} &: \mathit{Thunk}\ n\ a \to \mathit{Thunk}\ m\ (\mathit{Thunk}\ (n-m)\ a)
\end{aligned}
$$

Il applique ces règles à la file du banquier (entre autres).

Les débits en logique de séparation

Peut-on traduire les idées d'Okasaki et Danielsson
en logique de séparation ?

Peut-on *expliquer les débits* en termes de crédits-temps ?

Si oui, on obtiendra un système unifié où
crédits (pour les calculs ordinaires)
et débits (pour les calculs suspendus)
cohabitent.

Que nous faut-il ?

Un prédicat $\mathit{isThunk}\ t\ n\ \phi$
signifiant que t est une suspension
à laquelle est associée une dette n
et dont la valeur v satisfait ou satisfera $\phi(v)$.

Dans la suite, je parlerai de suspension de coût n.

On veut que ce prédicat soit *duplicable*, comme chez Danielsson :
$\mathit{isThunk}\ t\ n\ \phi \vdash \mathit{isThunk}\ t\ n\ \phi \star \mathit{isThunk}\ t\ n\ \phi$

On souhaite pouvoir *créer* une suspension :

$$\{\$1 \star (\$n \mathrel{-\!\!*} \mathit{wp}\ f()\ \phi)\}$$
$$\mathit{fromfun}\ f$$
$$\{\lambda t.\ \mathit{isThunk}\ t\ n\ \phi\}$$

Si l'appel de fonction $f()$ exige n crédits,
et si on dépense un crédit immédiatement,
on obtient une suspension de coût n.

On peut lire l'implication $\$n \mathrel{-\!\!*} \mathit{wp}\ f()\ \phi$
comme une forme affaiblie du triplet $\{\$n\}\ f()\ \{\phi\}$.
Elle n'autorise qu'un appel à $f()$ au plus.

On peut *forcer* une suspension si aucune dette ne lui est associée :

$$\phi \text{ est duplicable} \longrightarrow \{\$1 \star \mathit{isThunk}\ t\ 0\ \phi\}\ \mathit{force}\ t\ \{\phi\}$$

Cette règle exige que la postcondition ϕ soit duplicable.

En effet, si une suspension est forcée plusieurs fois, son résultat est *copié*.

On souhaite pouvoir *surestimer* une dette :

$$n_1 \leq n_2 \star \mathit{isThunk}\ t\ n_1\ \phi \vdash \mathit{isThunk}\ t\ n_2\ \phi$$

On souhaite une forme de règle de *conséquence* :

$$(\forall v, \phi_1(v) \mathrel{-\!\!*} \phi_2(v)) \star \mathit{isThunk}\ t\ n\ \phi_1 \vdash \mathit{isThunk}\ t\ n\ \phi_2$$

De cette dernière, on peut déduire une règle de *transmission* :

$$\mathit{isThunk}\ t\ n\ \phi \star P \vdash \mathit{isThunk}\ t\ n\ (\lambda v.\ \phi(v) \star P)$$

En remplaçant P par $\$k$, on peut transmettre des crédits vers l'avenir.

On *retarde* ces crédits : il seront disponibles plus tard.

On souhaite pouvoir *payer* pour réduire un coût apparent :

$$\$k \star \mathit{isThunk}\ t\ n\ \phi \vdash \mathit{isThunk}\ t\ (n - k)\ \phi$$

Ainsi, des crédits existants servent à réduire une dette.

Inversement, on peut *emprunter* pour faire apparaître des crédits :

$$\mathit{isThunk}\ t\ n\ \phi \vdash \mathit{isThunk}\ t\ (n + k)\ (\lambda v.\ \phi(v) \star \$k)$$

Notre dette immédiate augmente, mais un gain futur en découle.

Tout ceci n'est que *jeu comptable :*

ces règles de raisonnement n'ont aucun effet à l'exécution ;

c'est la même suspension qui est associée à différents coûts virtuels.

Par composition des deux règles précédentes, on obtient :

$$\begin{array}{ll} & \mathit{isThunk}\ t\ m\ (\lambda u.\ \mathit{isThunk}\ u\ n\ \phi) \\ \vdash & \mathit{isThunk}\ t\ (m+k)\ (\lambda u.\ \$k\ \star\ \mathit{isThunk}\ u\ n\ \phi) \\ \vdash & \mathit{isThunk}\ t\ (m+k)\ (\lambda u.\ \mathit{isThunk}\ u\ (n-k)\ \phi) \end{array}$$

Quand deux suspensions sont imbriquées, le coût de la seconde peut être (totalement ou partiellement) *déplacé* et imputé à la première.

On *anticipe* ainsi une dette : il faudra payer plus tôt.

Cette règle d'anticipation sert dans l'analyse de la file du banquier.

On construit une liste paresseuse $f +\!\!+ \mathit{rev}\ r$.

Les séquences f et r ont approximativement même longueur n.

- f est une liste paresseuse, donc une chaîne de suspensions imbriquées, *toutes de coût nul* en ce point du code.
- $\mathit{rev}\ r$ est une suspension de coût n.

Par anticipation, ce coût peut être *étalé* sur toute la liste paresseuse : on obtient *un coût constant* pour chaque suspension de $f +\!\!+ \mathit{rev}\ r$.

Spécification de la file du banquier

Pour résumer, on obtient la spécification suivante :

isQueue(q, xs) *est duplicable*

$$\{\mathit{isQueue}(q, xs) \star \$P\}$$
$$\mathit{put}\ q\ x$$
$$\{q'.\ \mathit{isQueue}(q', xs +\!\!+ [x])\}$$

$$\{\mathit{isQueue}(q, x :: xs) \star \$G\}$$
$$\mathit{get}\ q$$
$$\{r.\ \exists q'.\ r = \mathit{Some}\ (x, q') \star \mathit{isQueue}(q', xs)\}$$

$$\{\mathit{isQueue}(q, []) \star \$G\}$$
$$\mathit{get}\ q$$
$$\{r.\ r = \mathit{None}\}$$

où P et G sont des constantes.

Cette spécification est *plus forte* que les deux précédentes.

Justification formelle

Jusqu'ici, j'ai *postulé* les règles que doit satisfaire *isThunk*.

On voudrait *vérifier*,
dans une logique de séparation assez puissante,
qu'une implémentation simple des suspensions satisfait ces règles.

Les *invariants* et *l'état fantôme monotone* d'Iris le permettent
au moins pour partie. ☠
– *cf. séminaire de Jacques-Henri Jourdan*

Références

Okasaki (1999) imagine l'analyse amortie à base de débits.

Danielsson (2008) formalise cette analyse en termes de typage.

Pilkiewicz et Pottier (2011) reconstruisent les débits à partir des crédits.

Mével et al. (2019) reproduisent cette construction dans le cadre d'Iris.

Madhavan et al. (2017) développent un système automatisé pour vérifier des programmes avec mémoisation.

Les crédits concernent le futur

Les crédits-temps sont *consommés* au cours du temps :

$$\{\$1\}\ tick()\ \{True\}$$

Ils garantissent une *borne supérieure* sur la durée de l'exécution :

Si $\{\$n\}\ p\ \{True\}$ alors p n'exécutera pas plus de n *tick*s.

Les crédits-temps nous parlent du temps restant, du temps *futur*.

Et si nous renversions tout cela ?

Les reçus concernent le passé

Imaginons des *reçus* qui sont *produits* au cours du temps :

$$\{\mathit{True}\}\ \mathit{tick}()\ \{\hourglass 1\}$$

Ils garantissent une *borne inférieure* sur la durée de l'exécution :

Si $\{\mathit{True}\}\ p\ \{\hourglass n\}$ alors p exécute au moins n *tick*s.

Les reçus-temps nous parlent du temps *passé*.

Mais pourquoi faire ?

Pourquoi s'efforcer de prouver qu'un programme est *lent ?*

Mais pourquoi faire ?

Pourquoi s'efforcer de prouver qu'un programme est *lent ?*

Si à un certain point ce programme risque d'échouer,
alors en démontrant qu'il est très lent,
on montre que *l'échec est très lointain*.

Mais pourquoi faire ?

Pourquoi s'efforcer de prouver qu'un programme est *lent ?*

Si à un certain point ce programme risque d'échouer,
alors en démontrant qu'il est très lent,
on montre que *l'échec est très lointain*.

On peut même montrer que l'échec est *impossible*

Mais pourquoi faire ?

Pourquoi s'efforcer de prouver qu'un programme est *lent ?*

Si à un certain point ce programme risque d'échouer,
alors en démontrant qu'il est très lent,
on montre que *l'échec est très lointain*.

On peut même montrer que l'échec est *impossible*
si l'on admet que *le temps est fini :*

$$\text{⧗}\, N \Rrightarrow \mathit{False}$$

On fixe une fois pour toutes un entier N très grand, par exemple 2^{64}.

Une garantie de petitesse

Par contraposition, cet axiome donne

$$\blacktriangleright\!\!\blacktriangleleft\, n \Rrightarrow n < N$$

Si on peut prouver que l'on a déjà effectué n pas de calcul,
alors on peut affirmer que n est *petit*.

À quoi cela peut-il servir ?

Une garantie de petitesse

Par contraposition, cet axiome donne

$$\text{⧗}\, n \Rrightarrow n < N$$

Si on peut prouver que l'on a déjà effectué n pas de calcul,
alors on peut affirmer que n est *petit*.

À quoi cela peut-il servir ?

À démontrer l'absence de débordements entiers, par exemple.
– *un argument de complexité aide à la preuve de sûreté !*

Spécification de l'addition des entiers machine

En arithmétique 64 bits signée, l'addition peut être spécifiée ainsi :

$$\{-2^{63} \leq n_1 + n_2 < 2^{63}\}$$
$$add(n_1, n_2)$$
$$\{\lambda n.\ n = n_1 + n_2\}$$

On a *l'obligation de prouver* que le résultat $n_1 + n_2$ est représentable.

Une situation où le débordement est impossible

Imaginons que les entiers machine n_1 et n_2
que nous souhaitons additionner
sont les tailles de deux structures que nous avons construites.

Il se pourrait dans ce cas que nous disposions de $⧗\, n_1$ et $⧗\, n_2$.

Nous pouvons en tirer $⧗(n_1 + n_2)$ puis déduire $0 \leq n_1 + n_2 < N$.

Si $2^{63} \leq N$, cela garantit l'absence de débordement.

Une situation où le débordement est impossible

Pour résumer, si on choisit N assez grand :

$$2^{63} \leq N$$

alors on peut *démontrer* pour l'addition machine cette spécification :

$$\{\text{⧗}\, n_1 \star \text{⧗}\, n_2\}$$
$$add(n_1, n_2)$$
$$\{\lambda n.\ n = n_1 + n_2 \star \text{⧗}\, n\}$$

En bref, l'addition de *deux horloges disjointes* ne peut pas déborder.

On peut ainsi démontrer que certains entiers, par exemple une *taille* ou une *profondeur*, sont toujours représentables par un mot machine.

Clochard et al. (2015) proposent un langage doté de certains types de compteurs entiers restreints et montrent que ces compteurs ne peuvent pas déborder.

Mével et al. (2019) réexpliquent cette idée en termes de reçus-temps en démontrent la correction dans Iris.

Que retenir ?

De mauvaises et de bonnes nouvelles :

- *la vérification de programmes est difficile*
  et demande des concepts et des outils pointus,
- mais *raisonner à propos du temps*
  n'est pas beaucoup plus difficile !

Et la suite ?

Intégrer la complexité dans les spécifications : *viable* à grande échelle ?

Exploiter des analyses *automatiques* (Carbonneaux et al., 2017) tout en conservant la possibilité d'argumenter plus finement là où nécessaire.

Vérifier la complexité d'algorithmes *randomisés* (Eberl et al., 2020).

Vérifier la vivacité de programmes *concurrents* (Hoffmann et al., 2013).

Contrôler le *carburant* dans la blockchain (Das et Qadeer, 2020).

Appendice :
Une application potentielle

Une application potentielle

La *minimisation d'automates finis* joue un rôle central dans le domaine du *model-checking*.

- L'algorithme de Moore (1956) a une complexité $O(kn^2)$.
  - *Cai et Paige (1989) le décrivent très clairement.*

La *minimisation d'automates finis* joue un rôle central dans le domaine du *model-checking*.

- L'algorithme de Moore (1956) a une complexité $O(kn^2)$.
  - *Cai et Paige (1989) le décrivent très clairement.*

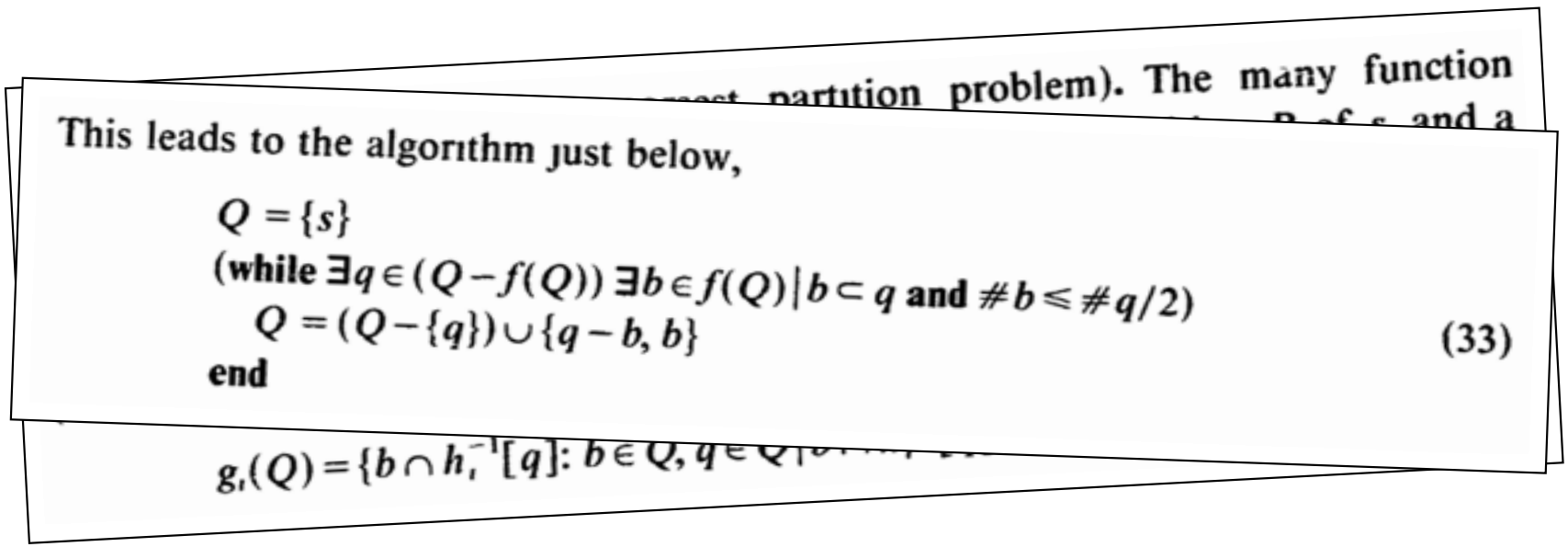
Example 13 (Many function coarsest partition problem). The many function coarsest partition problem inputs a finite set s, an initial partition P of s, and a family of total functions h_i on s, $i = 1, \ldots, k$ It outputs the coarsest (i.e., greatest) refinement Q of P such that $\forall b \in Q\, \forall i = 1, \ldots, k\, \exists d \in Q \mid h_i[b] \subseteq d$ It is straightforward to reformulate this problem as computing the greatest common fixed point (that is a refinement of P) of the family of functions

$$g_i(Q) = \{b \cap h_i^{-1}[q] : b \in Q, q \in Q \mid b \cap h_i^{-1}[q] \neq \{\}\},$$

Une application potentielle

La *minimisation d'automates finis* joue un rôle central dans le domaine du *model-checking*.

- L'algorithme de Moore (1956) a une complexité $O(kn^2)$.
  - *Cai et Paige (1989) le décrivent très clairement.*



...partition problem). The many function

This leads to the algorithm just below,

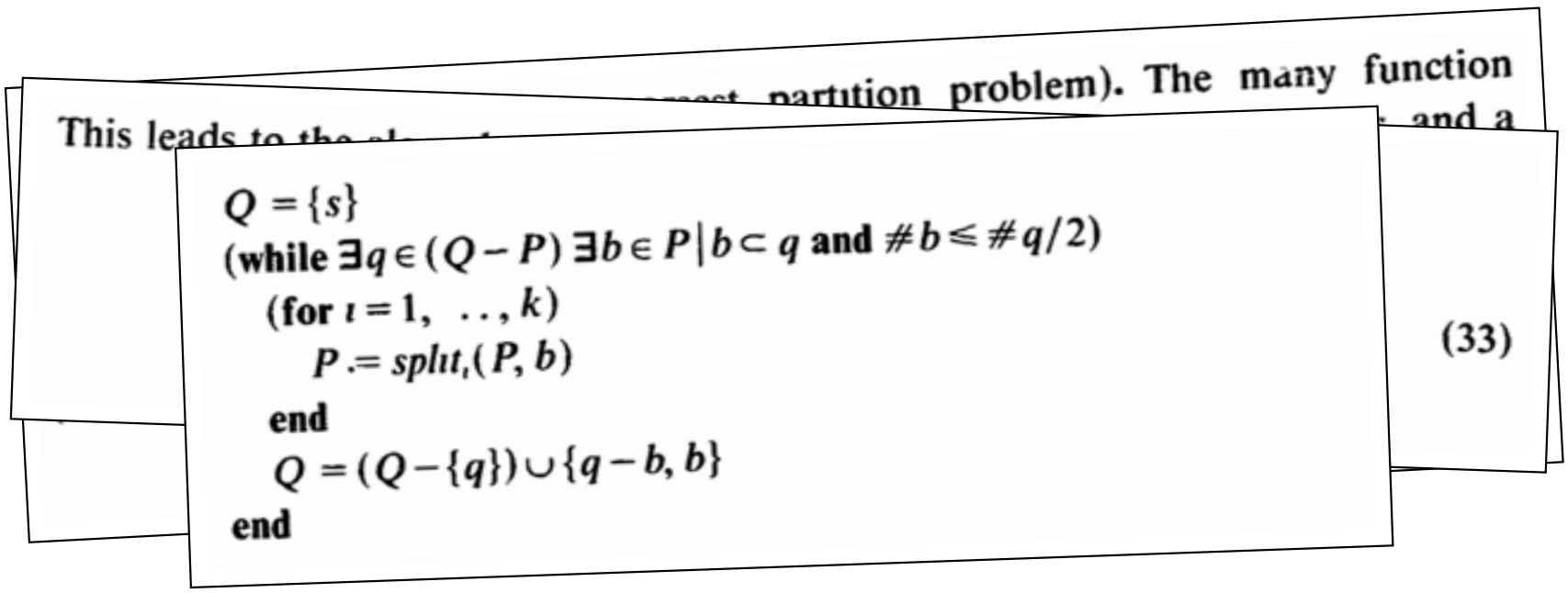
$Q = \{s\}$
(while $\exists q \in (Q - f(Q))\ \exists b \in f(Q) \mid b \subset q$ **and** $\#b \leqslant \#q/2$)
$\quad Q = (Q - \{q\}) \cup \{q - b, b\}$ (33)
end

$g_i(Q) = \{b \cap h_i^{-1}[q]: b \in Q, q \in$

Une application potentielle

La *minimisation d'automates finis* joue un rôle central dans le domaine du *model-checking*.

- L'algorithme de Moore (1956) a une complexité $O(kn^2)$.
  - *Cai et Paige (1989) le décrivent très clairement.*

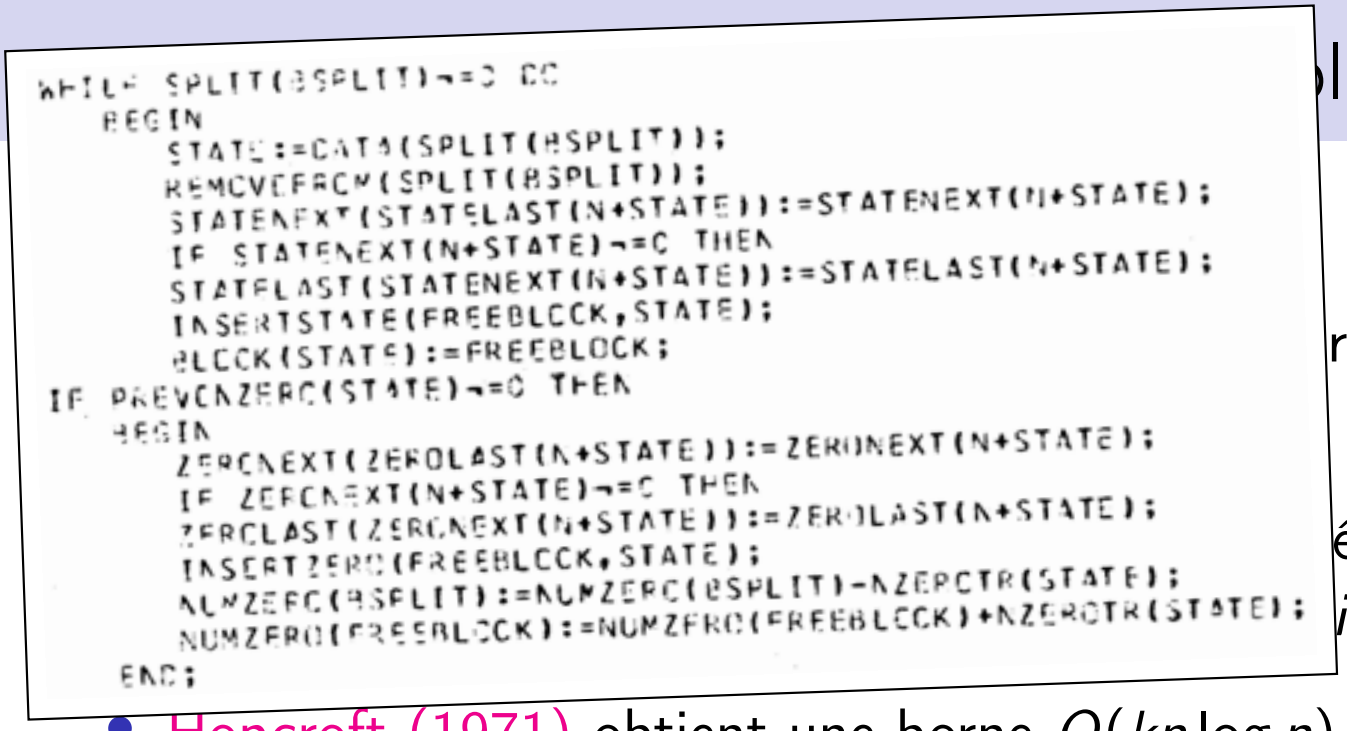


Une application potentielle

La *minimisation d'automates finis* joue un rôle central dans le domaine du *model-checking*.

- L'algorithme de Moore (1956) a une complexité $O(kn^2)$.
  - *Cai et Paige (1989) le décrivent très clairement.*
- Hopcroft (1971) obtient une borne $O(kn \log n)$.

lication potentielle



```
WHILE SPLIT(BSPLIT)¬=0 DO
   BEGIN
      STATE:=DATA(SPLIT(BSPLIT));
      REMOVEFROM(SPLIT(BSPLIT));
      STATENEXT(STATELAST(N+STATE)):=STATENEXT(N+STATE);
      IF STATENEXT(N+STATE)¬=0 THEN
      STATELAST(STATENEXT(N+STATE)):=STATELAST(N+STATE);
      INSERTSTATE(FREEBLOCK,STATE);
      BLOCK(STATE):=FREEBLOCK;
IF PREVNZERO(STATE)¬=0 THEN
   BEGIN
      ZERONEXT(ZEROLAST(N+STATE)):=ZERONEXT(N+STATE);
      IF ZERONEXT(N+STATE)¬=0 THEN
      ZEROLAST(ZERONEXT(N+STATE)):=ZEROLAST(N+STATE);
      INSERTZERO(FREEBLOCK,STATE);
      NUMZERO(BSPLIT):=NUMZERO(BSPLIT)-NZEROTR(STATE);
      NUMZERO(FREEBLOCK):=NUMZERO(FREEBLOCK)+NZEROTR(STATE);
   END;
```

ral dans le domaine

é $O(kn^2)$.

irement.

- Hopcroft (1971) obtient une borne $O(kn \log n)$.

Une application potentielle

La *minimisation d'automates finis* joue un rôle central dans le domaine du *model-checking*.

- L'algorithme de Moore (1956) a une complexité $O(kn^2)$.
  - *Cai et Paige (1989) le décrivent très clairement.*
- Hopcroft (1971) obtient une borne $O(kn \log n)$.
- Knuutila (2001) affirme que certaines variantes violent cette borne.

Une application potentielle

La *minimisation d'automates finis* joue un rôle central dans le domaine du *model-checking*.

- [illegible] Moore (1956) a une complexité $O(kn^2)$.

proofs and a well-founded computational analysis. Our analysis reveals that if the size of the input alphabet m is not fixed, then Hopcroft's original algorithm does not run in time $O(mn \log n)$ as is commonly believed in the literature. The $O(mn \log n)$ holds, however, for the variation presented later by D. Gries and for a new variant given in this article. We also propose a new

- Knuutila (2001) affirme que certaines variantes violent cette borne.

Une application potentielle

La *minimisation d'automates finis* joue un rôle central dans le domaine du *model-checking*.

- L'algorithme de Moore (1956) a une complexité $O(kn^2)$.
  - *Cai et Paige (1989) le décrivent très clairement.*
- Hopcroft (1971) obtient une borne $O(kn \log n)$.
- Knuutila (2001) affirme que certaines variantes violent cette borne.
- Valmari (2012) propose un algorithme de coût $O(n + m \log m)$.

Une application potentielle

La *minimisation d'automates finis* joue un rôle central dans le domaine du *model-checking*.

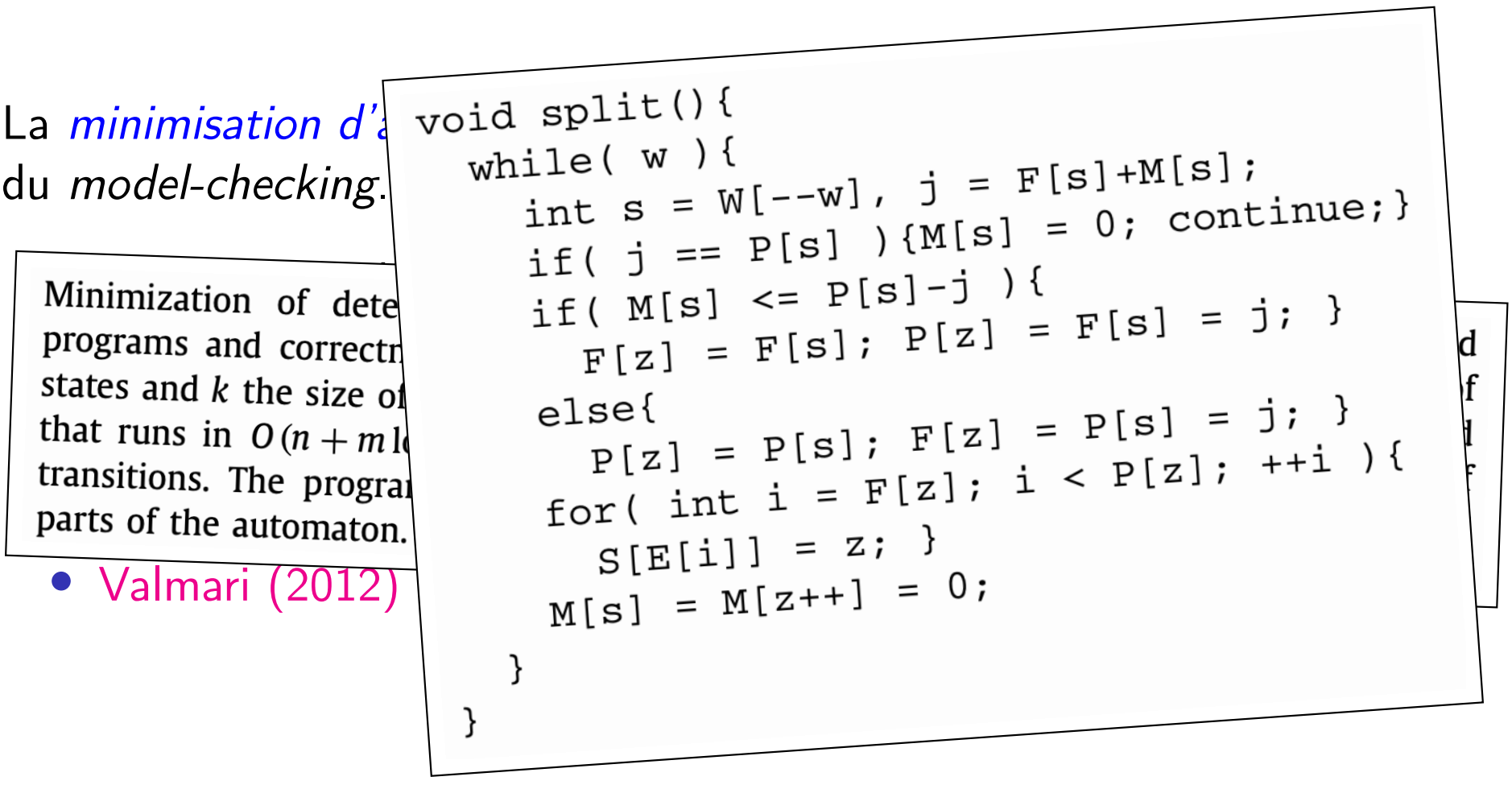
- (1956) une complexité $O(kn^2)$

> Minimization of deterministic finite automata has traditionally required complicated programs and correctness proofs, and taken $O(nk \log n)$ time, where n is the number of states and k the size of the alphabet. Here a short, memory-efficient program is presented that runs in $O(n + m \log m)$, or even in $O(n + m \log n)$, time, where m is the number of transitions. The program is complete with input, output, and the removal of irrelevant parts of the automaton. Its invariant-style correctness proof is relatively short.

- Valmari (2012) propose un algorithme de coût $O(n + m \log n)$

Une application potentielle

La *minimisation d'*
du *model-checking*.



- Valmari (2012)

Une application potentielle

La *minimisation d'automates finis* joue un rôle central dans le domaine du *model-checking*.

- L'algorithme de Moore (1956) a une complexité $O(kn^2)$.
  - *Cai et Paige (1989) le décrivent très clairement.*
- Hopcroft (1971) obtient une borne $O(kn \log n)$.
- Knuutila (2001) affirme que certaines variantes violent cette borne.
- Valmari (2012) propose un algorithme de coût $O(n + m \log m)$.

Une littérature et un algorithme difficiles à maîtriser !

Vérifier la complexité d'*une implémentation réelle* serait utile.

Appendice :
Synthèse semi-interactive d'une fonction de coût

Une spécification pour *bsearch*

Rappelons-nous la fonction *bsearch* de recherche dichotomique d'un élément x dans un segment $[i, j)$ du tableau trié a.

On suppose qu'un *tick*() a été inséré au début de la fonction.

On veut énoncer puis démontrer que

- *bsearch a i j x* exécute $O(\log n)$ *tick*s.

Qu'est-ce que cela signifie ? Qu'est-ce que n ?

Une spécification pour *bsearch*

Rappelons-nous la fonction *bsearch* de recherche dichotomique
d'un élément x dans un segment $[i, j)$ du tableau trié a.

On suppose qu'un *tick*() a été inséré au début de la fonction.

On veut énoncer puis démontrer que

- *bsearch a i j x* exécute $O(\log n)$ *tick*s, où $n = j - i$.

On choisit les paramètres de l'analyse de complexité,
ici la taille du segment de tableau pertinent.

Qu'est-ce que cela signifie ? Qu'est-ce que O ?

Une spécification pour *bsearch*

On veut affirmer qu'*il existe une fonction de coût* f telle que

- *bsearch a i j x* exécute au plus $f(n)$ *tick*s où $n = j - i$;
- $f(n) = O(\log n)$.

Une spécification pour *bsearch*

On veut affirmer qu'*il existe une fonction de coût* f telle que

- *bsearch a i j x* exécute au plus $f(n)$ *tick*s où $n = j - i$;
- $f(n)$ est $O(\log n)$.

Une spécification pour *bsearch*

On veut affirmer qu'*il existe une fonction de coût* f telle que

- *bsearch a i j x* exécute au plus $f(n)$ *tick*s où $n = j - i$;
- f est $O(\log)$.

Une spécification pour *bsearch*

On veut affirmer qu'*il existe une fonction de coût* f telle que

- *bsearch* $a\ i\ j\ x$ exécute au plus $f(n)$ *tick*s où $n = j - i$;
- $f \preceq \log$.

La fonction f est *dominée* asymptotiquement par la fonction log.

Une spécification pour *bsearch*

On veut affirmer qu'*il existe une fonction de coût* f telle que

- *bsearch a i j x* exécute au plus $f(n)$ *tick*s où $n = j - i$;
- $f \preceq \log$.

D'où deux questions :

- comment *synthétiser* f ou une description de f à partir du code ?
- qu'est-ce que la domination asymptotique ?

Synthèse semi-interactive d'une inéquation récursive

```
let rec bsearch a x i j = (* tick(); *)
  if j <= i then -1 else
    let k = i + (j - i) / 2 in
    if x = Array.get a k then k
    else if x < Array.get a k
      then bsearch a x i k
      else bsearch a x (k+1) j
```

```
f (j-i) >= 1 + ??
```

Synthèse semi-interactive d'une inéquation récursive

```
let rec bsearch a x i j = (* tick(); *)
  if j <= i then -1 else
    let k = i + (j - i) / 2 in
    if x = Array.get a k then k
    else if x < Array.get a k
      then bsearch a x i k
      else bsearch a x (k+1) j
```

```
f (j-i) >= 1 + (
              if j <= i then ?? else
                ??
            )
```

Synthèse semi-interactive d'une inéquation récursive

```
let rec bsearch a x i j = (* tick(); *)
  if j <= i then -1 else
    let k = i + (j - i) / 2 in
    if x = Array.get a k then k
    else if x < Array.get a k
      then bsearch a x i k
      else bsearch a x (k+1) j
```

```
f (j-i) >= 1 + (
              if j <= i then ?? else
                ??
            )
```

Synthèse semi-interactive d'une inéquation récursive

```
let rec bsearch a x i j = (* tick(); *)
  if j <= i then -1 else
    let k = i + (j - i) / 2 in
    if x = Array.get a k then k
    else if x < Array.get a k
      then bsearch a x i k
      else bsearch a x (k+1) j
```

```
f (j-i) >= 1 + (
              if (j-i) <= 0 then ?? else
                ??
            )
```

Synthèse semi-interactive d'une inéquation récursive

```
let rec bsearch a x i j = (* tick(); *)
  if j <= i then -1 else
    let k = i + (j - i) / 2 in
    if x = Array.get a k then k
    else if x < Array.get a k
      then bsearch a x i k
      else bsearch a x (k+1) j
```

```
f (j-i) >= 1 + (
              if (j-i) <= 0 then 0 else
                ??
            )
```

Synthèse semi-interactive d'une inéquation récursive

```
let rec bsearch a x i j = (* tick(); *)
  if j <= i then -1 else
    let k = i + (j - i) / 2 in
    if x = Array.get a k then k
    else if x < Array.get a k
      then bsearch a x i k
      else bsearch a x (k+1) j
```

```
f (j-i) >= 1 + (
              if (j-i) <= 0 then 0 else
                0 + ??
            )
```

Synthèse semi-interactive d'une inéquation récursive

```
let rec bsearch a x i j = (* tick(); *)
  if j <= i then -1 else
    let k = i + (j - i) / 2 in
    if x = Array.get a k then k
    else if x < Array.get a k
      then bsearch a x i k
      else bsearch a x (k+1) j
```

```
f (j-i) >= 1 + (
              if (j-i) <= 0 then 0 else
                0 + 1 + ??
            )
```

Synthèse semi-interactive d'une inéquation récursive

```
let rec bsearch a x i j = (* tick(); *)
  if j <= i then -1 else
    let k = i + (j - i) / 2 in
    if x = Array.get a k then k
    else if x < Array.get a k
      then bsearch a x i k
      else bsearch a x (k+1) j
```

```
f (j-i) >= 1 + (
              if (j-i) <= 0 then 0 else
                0 + 1 + max ?? ??
            )
```

Synthèse semi-interactive d'une inéquation récursive

```
let rec bsearch a x i j = (* tick(); *)
  if j <= i then -1 else
    let k = i + (j - i) / 2 in
    if x = Array.get a k then k
    else if x < Array.get a k
      then bsearch a x i k
      else bsearch a x (k+1) j
```

```
f (j-i) >= 1 + (
              if (j-i) <= 0 then 0 else
                0 + 1 + max 0 ??
            )
```

Synthèse semi-interactive d'une inéquation récursive

```
let rec bsearch a x i j = (* tick(); *)
  if j <= i then -1 else
    let k = i + (j - i) / 2 in
    if x = Array.get a k then k
    else if x < Array.get a k
      then bsearch a x i k
      else bsearch a x (k+1) j
```

```
f (j-i) >= 1 + (
              if (j-i) <= 0 then 0 else
                0 + 1 + max 0 (1 + ??)
            )
```

Synthèse semi-interactive d'une inéquation récursive

```
let rec bsearch a x i j = (* tick(); *)
  if j <= i then -1 else
    let k = i + (j - i) / 2 in
    if x = Array.get a k then k
    else if x < Array.get a k
      then bsearch a x i k
      else bsearch a x (k+1) j
```

```
f (j-i) >= 1 + (
              if (j-i) <= 0 then 0 else
                0 + 1 + max 0 (1 + max ?? ??)
            )
```

Synthèse semi-interactive d'une inéquation récursive

```
let rec bsearch a x i j = (* tick(); *)
  if j <= i then -1 else
    let k = i + (j - i) / 2 in
    if x = Array.get a k then k
    else if x < Array.get a k
      then bsearch a x i k
      else bsearch a x (k+1) j
```

```
f (j-i) >= 1 + (
              if (j-i) <= 0 then 0 else
                0 + 1 + max 0 (
                  1 + max (f (k-i)) ??
                )
            )
```

Synthèse semi-interactive d'une inéquation récursive

```
let rec bsearch a x i j = (* tick(); *)
  if j <= i then -1 else
    let k = i + (j - i) / 2 in
    if x = Array.get a k then k
    else if x < Array.get a k
      then bsearch a x i k
      else bsearch a x (k+1) j
```

```
f (j-i) >= 1 + (
              if (j-i) <= 0 then 0 else
                0 + 1 + max 0 (
                  1 + max (f (k-i)) ??
                )
            )
```

Synthèse semi-interactive d'une inéquation récursive

```
let rec bsearch a x i j = (* tick(); *)
  if j <= i then -1 else
    let k = i + (j - i) / 2 in
    if x = Array.get a k then k
    else if x < Array.get a k
      then bsearch a x i k
      else bsearch a x (k+1) j
```

```
f (j-i) >= 1 + (
              if (j-i) <= 0 then 0 else
                0 + 1 + max 0 (
                  1 + max (f ((j-i)/2)) ??
                )
            )
```

Synthèse semi-interactive d'une inéquation récursive

```
let rec bsearch a x i j = (* tick(); *)
  if j <= i then -1 else
    let k = i + (j - i) / 2 in
    if x = Array.get a k then k
    else if x < Array.get a k
      then bsearch a x i k
      else bsearch a x (k+1) j
```

```
f (j-i) >= 1 + (
              if (j-i) <= 0 then 0 else
                0 + 1 + max 0 (
                  1 + max (f ((j-i)/2))
                          (f ((j-i) - (j-i)/2 - 1))
                )
            )
```

Synthèse semi-interactive d'une inéquation récursive

```
let rec bsearch a x i j = (* tick(); *)
  if j <= i then -1 else
    let k = i + (j - i) / 2 in
    if x = Array.get a k then k
    else if x < Array.get a k
      then bsearch a x i k
      else bsearch a x (k+1) j
```

```
f n       >= 1 + (
                if n <= 0 then 0 else
                  0 + 1 + max 0 (
                    1 + max (f (n/2))
                            (f (n - n/2 - 1))
                  )
              )
```

Résolution de l'inéquation récursive

Il reste à *exhiber* une fonction f telle que

$$f(n) \geq 1 + \begin{cases} 0 & \text{si } n \leq 0 \\ 1 + \max(0, 1 + \max(f(\frac{n}{2}), f(n - \frac{n}{2} - 1))) & \text{sinon} \end{cases}$$

et à *démontrer* $f \preceq \log$.

On le fait traditionnellement soit via la *méthode de substitution*, soit via le *Master Theorem*.

La notation O

Pour $f, g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, la notation $f \preceq g$ signifie :

$$\exists k \quad \exists x_0 \quad \forall x \geq x_0 \quad |f(x)| \leq k\,|g(x)|$$

Pour $f, g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, la notation $f \preceq g$ signifie :

$$\exists k \quad \exists x_0 \quad \forall x \geq x_0 \quad |f(x)| \leq k\,|g(x)|$$

On peut la généraliser pour $f, g : A \to B$:

$$\exists k \quad \mathrm{AG}x \quad |f(x)| \leq k\,|g(x)|$$

La notation O

Pour $f, g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, la notation $f \preceq g$ signifie :

$$\exists k \quad \exists x_0 \quad \forall x \geq x_0 \quad |f(x)| \leq k\,|g(x)|$$

On peut la généraliser pour $f, g : A \to B$:

$$\exists k \quad \mathrm{AG}x \quad |f(x)| \leq k\,|g(x)|$$

AG doit être un *filtre*, un objet de type $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ tel que

Pour $f, g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, la notation $f \preceq g$ signifie :

$$\exists k \quad \exists x_0 \quad \forall x \geq x_0 \quad |f(x)| \leq k\,|g(x)|$$

On peut la généraliser pour $f, g : A \to B$:

$$\exists k \quad \mathrm{AG}x \quad |f(x)| \leq k\,|g(x)|$$

AG doit être un *filtre*, un objet de type $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ tel que

$$(\forall x\ P\,x \to Q\,x) \to (\mathrm{AG}x\ P\,x) \to (\mathrm{AG}x\ Q\,x) \qquad \text{covariance}$$

$$(\mathrm{AG}x\ \mathit{True}) \qquad 0\text{-intersection}$$

$$(\mathrm{AG}x\ P\,x) \to (\mathrm{AG}x\ Q\,x) \to (\mathrm{AG}x\ P\,x \wedge Q\,x) \qquad 2\text{-intersection}$$

$$(\mathrm{AG}x\ P\,x) \to (\exists x\ P\,x) \qquad \text{non vide}$$

Il existe en général de nombreux filtres *incomparables*.

Eberl (2016) (2019) formalise le Master Theorem et automatise les preuves de domination.

Guéneau (2019) formalise les filtres et la domination en Coq.

Bibliographie I

Atkey, R. 2011. Amortised resource analysis with separation logic. *Logical Methods in Computer Science 7,* 2 :17.

Carbonneaux, Q., Hoffmann, J., Reps, T., et Shao, Z. 2017. Automated resource analysis with Coq proof objects. In *Computer Aided Verification (CAV)*. Lecture Notes in Computer Science, vol. 10427. Springer, 64–85.

Charguéraud, A. et Pottier, F. 2017. Verifying the correctness and amortized complexity of a union-find implementation in separation logic with time credits. *Journal of Automated Reasoning*.

Clochard, M., Filliâtre, J.-C., et Paskevich, A. 2015. How to avoid proving the absence of integer overflows. In *Verified Software : Theories, Tools and Experiments*. Lecture Notes in Computer Science, vol. 9593. Springer, 94–109.

Crary, K. et Weirich, S. 2000. Resource bound certification. In *Principles of Programming Languages (POPL)*. 184–198.

Danielsson, N. A. 2008. Lightweight semiformal time complexity analysis for purely functional data structures. In *Principles of Programming Languages (POPL)*.

Das, A. et Qadeer, S. 2020. Exact and linear-time gas-cost analysis. In *Static Analysis Symposium (SAS)*. Lecture Notes in Computer Science, vol. 12389. Springer, 333–356.

Dockins, R. et Hobor, A. 2012. Time bounds for general function pointers. In *Mathematical Foundations of Programming Semantics*. Electronic Notes in Theoretical Computer Science, vol. 286. Elsevier, 139–155.

Bibliographie III

Eberl, M., Haslbeck, M. W., et Nipkow, T. 2020. Verified analysis of random binary tree structures. *Journal of Automated Reasoning 64,* 5, 879–910.

Guéneau, A., Jourdan, J.-H., Charguéraud, A., et Pottier, F. 2019. Formal proof and analysis of an incremental cycle detection algorithm. In *Interactive Theorem Proving (ITP)*. Leibniz International Proceedings in Informatics, vol. 141. 18 :1–18 :20.

Haslbeck, M. P. L. et Lammich, P. 2021. For a few dollars more - verified fine-grained algorithm analysis down to LLVM. In *European Symposium on Programming (ESOP)*. Lecture Notes in Computer Science, vol. 12648. Springer, 292–319.

Haslbeck, M. P. L. et Nipkow, T. 2018. Hoare logics for time bounds: A study in meta theory. In *Tools and Algorithms for Construction and Analysis of Systems (TACAS)*. Lecture Notes in Computer Science, vol. 10805. Springer, 155–171.

Hoffmann, J., Marmar, M., et Shao, Z. 2013. Quantitative reasoning for proving lock-freedom. In *Logic in Computer Science (LICS)*. 124–133.

Madhavan, R., Kulal, S., et Kuncak, V. 2017. Contract-based resource verification for higher-order functions with memoization. In *Principles of Programming Languages (POPL)*. 330–343.

Mével, G., Jourdan, J.-H., et Pottier, F. 2019. Time credits and time receipts in Iris. In *European Symposium on Programming (ESOP)*. Lecture Notes in Computer Science, vol. 11423. Springer, 1–27.

Nipkow, T. 2015. Amortized complexity verified. In *Interactive Theorem Proving (ITP)*. Lecture Notes in Computer Science, vol. 9236. Springer, 310–324.

Okasaki, C. 1999. *Purely Functional Data Structures*. Cambridge University Press.

Pilkiewicz, A. et Pottier, F. 2011. The essence of monotonic state. In *Types in Language Design and Implementation (TLDI)*.

Tarjan, R. E. 1985. Amortized computational complexity. *SIAM Journal on Algebraic and Discrete Methods 6*, 2, 306–318.

Zhan, B. et Haslbeck, M. P. L. 2018. Verifying asymptotic time complexity of imperative programs in Isabelle. In *International Joint Conference on Automated Reasoning*.