

Analyse et géométrie

M. Alain CONNES, membre de l'Institut
(Académie des sciences), professeur

COURS : LE SITE ARITHMÉTIQUE

1. Introduction

Mon cours cette année a pour objet le site arithmétique qui est un topos de Grothendieck muni d'un faisceau structurel. Les résultats ont été obtenus en collaboration avec C. Consani [11], [12], [13].

Dans [4, 5] nous avons montré que, si l'on divise l'espace des classes d'idèles $\mathbb{Q}^\times \backslash \mathbb{A}_\mathbb{Q}$ de \mathbb{Q} par le sous-groupe compact maximal $\widehat{\mathbb{Z}}^*$ du groupe des classes d'idèles, on obtient, en considérant l'action induite de \mathbb{R}_+^\times sur $X_\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^\times \backslash \mathbb{A}_\mathbb{Q} / \widehat{\mathbb{Z}}^*$, la distribution $N(u)$, $u \in [1, \infty)$, qui détermine à son tour, en utilisant la formule de Hasse-Weil dans la limite $q \rightarrow 1$, la fonction zêta complète de Riemann. Cependant, ce qui manquait encore jusqu'à présent, afin d'adapter les idées géométriques d'André Weil, était d'obtenir la structure géométrique appropriée sur $X_\mathbb{Q}$.

La découverte très récente du site arithmétique résout cette difficulté en dévoilant l'espace prévu dans le cadre de la géométrie algébrique. La définition de ce site est extrêmement simple (voir définition 2.1) puisqu'elle implique seulement l'ensemble \mathbb{Z} des nombres entiers et les trois opérations de base de sup, somme et produit des entiers. Sur cette structure de base très simple il faut ensuite mettre en œuvre deux concepts mathématiques sophistiqués : à savoir celui de topos en géométrie algébrique et de structure de caractéristique 1 en algèbre. Ces deux théories donnent la structure cherchée sur $X_\mathbb{Q}$ qui apparaît comme l'espace des points du site arithmétique définis sur \mathbb{R}_+^{\max} , le semicorps tropical qui joue le rôle de $\overline{\mathbb{F}}_p$ en caractéristique 1 et possède un groupe à un paramètre d'automorphismes de Frobenius. Ceci résout la principale difficulté centrée sur l'existence d'un espace géométrique supportant les formules explicites en théorie des nombres. Nous montrons ensuite que le carré du site arithmétique a un sens et son faisceau structurel implique une algèbre formée des polygones de Newton muni des opérations d'enveloppe convexe de l'union et de somme. Le résultat principal est la construction d'une famille à un paramètre réel $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ de correspondances $\Psi(\lambda)$ qui jouent le rôle des correspondances de Frobenius de l'approche de Weil. Ainsi, bien que la

structure sous-jacente au site arithmétique soit dénombrable et n'admette aucun groupe à un paramètre d'automorphismes, elle admet un semi-groupe $\Psi(\lambda)$ de correspondances qui permettent de transposer en partie l'approche de Weil.

2. Le site arithmétique

Soit $\mathbb{Z}_{\max} := (\mathbb{Z} \cup \{-\infty\}, \max, +)$ le semi-corps des entiers tropicaux doté de l'opération $n \vee m := \sup(n, m)$ qui joue le rôle de l'addition et de l'addition $n, m \mapsto n + m$ qui joue le rôle de la multiplication. Les opérations sur \mathbb{Z} sont étendues à \mathbb{Z}_{\max} par les règles :

$$n \vee -\infty = -\infty \vee n = n, \forall n \in \mathbb{Z}, \quad n - \infty = -\infty + n = -\infty, \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Le semi-anneau \mathbb{Z}_{\max} possède une action canonique du monoïde multiplicatif \mathbb{N}^\times des entiers positifs non-nuls donnée par les endomorphismes $\text{Fr}_k \in \text{End}(\mathbb{Z}_{\max})$:

$$\mathbb{N}^\times \rightarrow \text{End}(\mathbb{Z}_{\max}) \quad k \mapsto \text{Fr}_k(n) := kn. \quad (1)$$

On note $\widehat{\mathbb{N}^\times}$ le topos des ensembles dotés d'une action de \mathbb{N}^\times . Il est le dual de la petite catégorie ayant un seul objet $\{*\}$ dont les endomorphismes forment le semigroupe \mathbb{N}^\times .

Définition 2.1 *Le site arithmétique $(\widehat{\mathbb{N}^\times}, \mathbb{Z}_{\max})$ est le topos $\mathcal{T} := \widehat{\mathbb{N}^\times}$ muni du faisceau structurel $\mathcal{O} := \mathbb{Z}_{\max}$, considéré comme un semi-anneau dans le topos.*

Les endomorphismes $\text{Fr}_k \in \text{End}(\mathbb{Z}_{\max})$ comme dans (1) sont les analogues, en caractéristique 1, de l'endomorphisme de Frobenius en caractéristique p et, dans la notation multiplicative, ils sont définis par la règle $\text{Fr}_k(x) = x^k$ qui donne un endomorphisme injectif de R pour tout semi-anneau simplifiable R de caractéristique 1, i.e. dans lequel $1 + 1 = 1$.

Le résultat suivant donne une description algébrique des points du topos \mathcal{T} .

Théorème 2.2 *La catégorie des points du topos $\mathcal{T} = \widehat{\mathbb{N}^\times}$ est équivalente à la catégorie des groupes totalement ordonnés, isomorphes à des sous-groupes non triviaux H de $(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}_+)$, et des morphismes injectifs de groupes ordonnés.*

La structure de semi-anneau de \mathbb{Z}_{\max} donne aux fibres du faisceau structurel \mathcal{O} du topos $\widehat{\mathbb{N}^\times}$ une structure de semi-anneau. Plus précisément on a

Théorème 2.3 *Au point du topos $\widehat{\mathbb{N}^\times}$ associé au groupe ordonné de rang un H , la fibre de $\mathcal{O} := \mathbb{Z}_{\max}$ est canoniquement isomorphe au semi-anneau $H_{\max} := (H \cup \{-\infty\}, \max, +)$.*

Ainsi, de même qu'un schéma algébrique est un espace annelé (d'un type particulier), le site arithmétique $(\widehat{\mathbb{N}^\times}, \mathbb{Z}_{\max})$ est un topos (semi)annelé. Le théorème 2.3 ci-dessus montre que l'on n'a besoin d'aucune autre structure sur le topos \mathcal{T} pour obtenir la structure de semi-anneau sur les fibres du faisceau structurel \mathcal{O} aux points de $\widehat{\mathbb{N}^\times}$.

Cette structure géométrique très simple de topos (semi)annelé a les propriétés requises pour obtenir la fonction de comptage de la « courbe » (recherchée) sous-jacente à la géométrie des nombres premiers. En particulier, on obtient que la

fonction zêta de type Hasse-Weil associée est la fonction zêta de Riemann complète. Tout d'abord on a le résultat suivant :

Théorème 2.4 *L'ensemble des points du site arithmétique $(\widehat{\mathbb{N}}^\times, \mathbb{Z}_{\max})$ sur \mathbb{R}_+^{\max} s'identifie au quotient de l'espace de classes d'adèles $\mathbb{Q}^\times \backslash \mathbb{A}_\mathbb{Q}$ de \mathbb{Q} par l'action de $\widehat{\mathbb{Z}}^*$. L'action des automorphismes de Frobenius Fr_λ de \mathbb{R}_+^{\max} sur ces points correspond à l'action du groupe des classes d'idèles sur le quotient de $\mathbb{Q}^\times \backslash \mathbb{A}_\mathbb{Q}$ par l'action de $\widehat{\mathbb{Z}}^*$.*

Pour calculer la distribution $N(u)$ qui « compte » le nombre de points fixes de l'action du flot de Frobenius sur les points de $(\widehat{\mathbb{N}}^\times, \mathbb{Z}_{\max})$ sur \mathbb{R}_+^{\max} , on définit l'action $\vartheta_u \xi(x) = \xi(u^{-1}x)$ du groupe des classes d'idèles $G = \text{GL}_1(\mathbb{A}_\mathbb{Q}) / \text{GL}_1(\mathbb{Q})$ sur les fonctions à valeurs complexes sur l'espace des classes d'adèles $\mathbb{Q}^\times \backslash \mathbb{A}_\mathbb{Q}$ et on utilise la version distributionnelle de la formule des traces sous la forme

$$\text{Tr}_{\text{distr}} \left(\int_G h(u) \vartheta(u) d^*u \right) = \sum_{v \in \Sigma_\mathbb{Q}} \int_{\mathbb{Q}_v^\times} \frac{h(u^{-1})}{|1-u|} d^*u. \quad (2)$$

On renvoie à [2, 15, 3] pour un traitement détaillé. On applique la formule de trace (2) en prenant la fonction test h de la forme $h(u) = g(|u|)$ et le support de la fonction g contenu dans $(1, \infty)$. Dans le côté gauche de (2) on effectue d'abord l'intégration sur le noyau $\widehat{\mathbb{Z}}^*$ du module $|\cdot| : G \rightarrow \mathbb{R}_+^\times$. Au niveau géométrique, cette opération consiste à prendre le quotient de l'espace des classes d'adèles par l'action de $\widehat{\mathbb{Z}}^*$. On note ϑ_u l'action induite sur ce quotient. Par construction cette action ne dépend que de $|u| \in \mathbb{R}_+^\times$. Pour obtenir $N(u)$ on considère la trace distributionnelle d'une expression de la forme $\int_{\mathbb{R}_+^\times} g_x(u) \vartheta_u d^*u$, avec $g_x(u) = u \delta_x(u)$ de sorte que $\int_{\mathbb{R}_+^\times} g_x(u) \vartheta_u d^*u = \vartheta_x$. Cela montre que l'on considère simplement un nombre d'intersection. Ensuite, on considère le côté droit de (2), c'est-à-dire les termes

$$\int_{\mathbb{Q}_v^\times} \frac{h(u^{-1})}{|1-u|} d^*u. \quad (3)$$

Dans ce qui suit, je vais décrire à un niveau qualitatif, les orbites périodiques de l'action du flot de Frobenius sur les points de $(\widehat{\mathbb{N}}^\times, \mathbb{Z}_{\max})$ sur \mathbb{R}_+^{\max} qui correspondent aux divers termes figurant dans la formule de la distribution $N(u)$. On considère l'action du groupe des classes d'idèles $G = \text{GL}_1(\mathbb{A}_\mathbb{Q}) / \text{GL}_1(\mathbb{Q}) = \widehat{\mathbb{Z}}^* \times \mathbb{R}_+^\times$ sur l'espace des classes d'adèles $\mathbb{Q}^\times \backslash \mathbb{A}_\mathbb{Q}$. Les orbites périodiques qui contribuent à la formule de Lefschetz sur l'espace des classe d'adèles de \mathbb{Q} correspondent, pour chaque place v de \mathbb{Q} , aux adèles $a = (a_w) \in \mathbb{A}_\mathbb{Q}$ qui sont nulles en v , i.e. telles que $a_v = 0$. Cette condition garde un sens dans le quotient de l'espace des classes d'adèles de \mathbb{Q} par $\widehat{\mathbb{Z}}^*$ et ne dépend pas du choix d'un relèvement d'une classe donnée. Je vais maintenant expliquer plus en détail sa signification en termes des points associés de $(\widehat{\mathbb{N}}^\times, \mathbb{Z}_{\max})$ sur \mathbb{R}_+^{\max} et de la place v de \mathbb{Q} .

– À la place archimédienne $v = \infty$ de \mathbb{Q} , la condition d'annulation ci-dessus signifie que le point correspondant α du topos est fixé par l'action des Frobenius : $\text{Fr}_\lambda(\alpha) = \alpha, \forall \lambda \in \mathbb{R}_+^\times$. Ainsi, il en résulte que les points de $(\widehat{\mathbb{N}}^\times, \mathbb{Z}_{\max})$ sur \mathbb{R}_+^{\max} qui correspondent à $v = \infty$ sont les points de $(\widehat{\mathbb{N}}^\times, \mathbb{Z}_{\max})$ définis sur le plus petit semi-

anneau $\mathbf{B} := \{0,1\} \subset \mathbb{R}_+^{\max}$ de caractéristique un. À la place archimédienne de \mathbb{Q} le terme correspondant à (3) donne la distribution $\kappa(u)$

$$\int_1^\infty \kappa(u) f(u) d^*u = \int_1^\infty \frac{u^2 f(u) - f(1)}{u^2 - 1} d^*u + cf(1), \quad c = \frac{1}{2}(\log \pi + \gamma) \quad (4)$$

ici $\gamma = -\Gamma'(1)$ est la constante d'Euler. La distribution $\kappa(u)$ est positive sur $(1, \infty)$ et, par construction, elle est donnée par $\kappa(u) = \frac{u^2}{u^2-1}$.

– À une place finie $v = p$ de \mathbb{Q} , où p est un nombre premier, la condition $a_p = 0$ implique que la classe α de a dans le quotient $X_{\mathbb{Q}}$, vérifie $\text{Fr}_\lambda(\alpha) = \alpha, \forall \lambda \in p^{\mathbb{Z}}$. La condition $a_p = 0$ est en fait mieux comprise en termes du semi-anneau local $K = H_{\max}$ associé au point correspondant de $\widehat{\mathbb{N}^\times}$ par le théorème 2.3. Dans ces termes, cela signifie tout simplement que l'application de Frobenius $x \mapsto x^p$ est un automorphisme de $K = H_{\max}$. On remarque que cette condition ne dépend que du point du topos $\widehat{\mathbb{N}^\times}$ sur lequel le point de $(\widehat{\mathbb{N}^\times}, \mathbb{Z}_{\max})$ au-dessus de \mathbb{R}_+^{\max} est situé. Cette invariance de K sous l'action de Frobenius en p implique évidemment que l'image du morphisme local sur \mathbb{R}_+^{\max} est invariant par Fr_p . Pour les points non dégénérés, l'équation $\text{Fr}_p(\alpha) = \alpha$ est suffisante pour garantir l'annulation $a_p = 0$, mais pour les points dégénérés (ceux définis sur \mathbf{B}), elle ne suffit pas pour assurer $a_p = 0$.

À une place finie de \mathbb{Q} , et pour chaque nombre premier p on obtient la contribution

$$\int'_{\mathbb{Q}_p^\times} \frac{h(u^{-1})}{|1-u|} d^*u = \sum_{m=1}^\infty \log p \, g(p^m). \quad (5)$$

Des calculs ci-dessus on déduit que $N(u)$ est la *distribution* somme des deux termes :

$$N(u) := \frac{d}{du} \varphi(u) + \kappa(u). \quad (6)$$

Le terme discret $\frac{d}{du} \varphi(u)$ est donné par la dérivée, au sens des distributions, de la fonction

$$\varphi(u) = \sum_{n < u} n \Lambda(n) \quad (7)$$

ici $\Lambda(n)$ est la fonction de von-Mangoldt prenant la valeur $\log p$ aux puissances p^ℓ de nombres premiers et zéro autrement. Le terme continu $\kappa(u)$ est fourni par (4).

Le prochain objectif est donc celui de développer une théorie de (co)homologie de Weil appropriée pour donner l'interprétation de la distribution $N(u)$ du site arithmétique $(\widehat{\mathbb{N}^\times}, \mathbb{Z}_{\max})$ comme dans (6), en termes de l'action du Frobenius sur cette (co)homologie.

3. Le carré du site arithmétique

Le carré du site arithmétique sur le semi-corps $\mathbb{B} = (\{0,1\}, \max, \times)$ a deux versions : non réduite et réduite. Dans les deux cas, le topos sous-jacent est $\widehat{\mathbb{N}^\times}$. Le faisceau structurel dans le cas non réduit est $\mathbb{Z}_{\max} \otimes_{\mathbb{B}} \mathbb{Z}_{\max}$ et, dans le cas réduit

est le semi-anneau simplifiable canoniquement associé à $\mathbb{Z}_{\max} \otimes_{\mathbb{B}} \mathbb{Z}_{\max}$. On détermine ce dernier semi-anneau comme le semi-anneau des polygones de Newton $\text{Conv}_{\leq}(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ avec les opérations d'enveloppe convexe de l'union et de somme. Sur les deux versions de ce site, il y a une action canonique de $\widehat{\mathbb{N}^{\times 2}}$ par endomorphismes $\text{Fr}_{n,m}$.

Définition 3.1 *Le carré non réduit $(\widehat{\mathbb{N}^{\times 2}}, \mathbb{Z}_{\max} \otimes_{\mathbb{B}} \mathbb{Z}_{\max})$ du site arithmétique $(\widehat{\mathbb{N}^{\times}}, \mathbb{Z}_{\max})$ est le topos $\widehat{\mathbb{N}^{\times 2}}$ muni du faisceau structurel $\mathbb{Z}_{\max} \otimes_{\mathbb{B}} \mathbb{Z}_{\max}$, considéré comme un semi-anneau dans le topos.*

Étant donné un ensemble partiellement ordonné J , soit $\text{Sub}_{\leq}(J)$ l'ensemble des sous-ensembles $E \subset J$ qui sont héréditaires, c'est à dire tels que $x \in E \Rightarrow y \in E$, $\forall y \leq x$. Alors $\text{Sub}_{\leq}(J)$, doté de l'opération $E \oplus E' := E \cup E'$ est un \mathbb{B} semi-module.

Proposition 3.2 (i) *Soit $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ muni de l'ordre partiel $(a, b) \leq (c, d) \Leftrightarrow a \leq b \ \& \ c \leq d$. Alors on a un isomorphisme canonique de \mathbb{B} -modules*

$$\mathbb{Z}_{\max} \otimes_{\mathbb{B}} \mathbb{Z}_{\max} \simeq \text{Sub}_{\leq}(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}).$$

(ii) *Sur le \mathbb{B} -module $S = \mathbb{Z}_{\max} \otimes_{\mathbb{B}} \mathbb{Z}_{\max}$ il existe une unique multiplication bilinéaire telle que, en utilisant la notation multiplicative où q est une variable formelle, on ait*

$$(q^a \otimes_{\mathbb{B}} q^b)(q^c \otimes_{\mathbb{B}} q^d) = q^{a+c} \otimes_{\mathbb{B}} q^{b+d}. \quad (8)$$

(iii) *La multiplication (8) fait de $\mathbb{Z}_{\max} \otimes_{\mathbb{B}} \mathbb{Z}_{\max}$ un semi-anneau de caractéristique 1.*

(iv) *La formule suivante définit une action de $\mathbb{N}^{\times} \times \mathbb{N}^{\times}$ par endomorphismes sur $\mathbb{Z}_{\max} \otimes_{\mathbb{B}} \mathbb{Z}_{\max}$*

$$\text{Fr}_{n,m}(\sum q^a \otimes_{\mathbb{B}} q^b) := \sum q^{na} \otimes_{\mathbb{B}} q^{mb}.$$

Le produit dans le semi-anneau \mathbb{Z}_{\max} donne un morphisme de semi-anneaux $\mu: (\mathbb{Z}_{\max} \otimes_{\mathbb{B}} \mathbb{Z}_{\max}) \rightarrow \mathbb{Z}_{\max}$, qui est défini sur les tenseurs simples par $\mu(q^a \otimes_{\mathbb{B}} q^b) = q^{a+b}$. En composant l'action des endomorphismes de Frobenius avec la diagonale (donnée par le produit μ), on obtient les correspondances de Frobenius $\Psi(\lambda) = \mu \circ \text{Fr}_{n,m}$ pour les valeurs rationnelles $\lambda = n/m$.

Proposition 3.3. *Soient $r = n/m$, $q > 1$ et $m_r: \mathbb{Z}_{\max} \otimes_{\mathbb{B}} \mathbb{Z}_{\max} \rightarrow \mathbb{R}_+^{\max}$ donnée par*

$$m_r\left(\sum (q^{n_i} \otimes_{\mathbb{B}} q^{m_i})\right) = q^{\alpha}, \alpha = \sup(rn_i + m_i)$$

Alors, à isomorphisme canonique près de leurs images, les morphismes $\mu \circ \text{Fr}_{n,m}$ et m_r sont égaux.

La proposition 3.3 permet d'étendre la définition des correspondances de Frobenius aux nombres λ réels positifs arbitraires. Ces correspondances sont réalisées sous la forme de courbes sur le carré du topos et elles sont obtenues à partir du cas rationnel en utilisant une approximation diophantienne. On note $\mathbb{Z}_{\max}^- \subset \mathbb{Z}_{\max}$ le sous semi-anneau $\mathbb{Z}_{\max}^- := \{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq 0\} \cup \{-\infty\}$.

Proposition 3.4 (i) Soient $\lambda \in \mathbb{R}_+^\times$ et $q > 1$, alors la formule suivante définit un homomorphisme $\mathcal{F}(\lambda, q) : \mathbb{Z}_{\max} \otimes_{\mathbb{B}} \mathbb{Z}_{\max} \rightarrow \mathbb{R}_+^{\max}$,

$$\mathcal{F}(\lambda, q) \left(\sum (q^{n_i} \otimes_{\mathbb{B}} q^{m_i}) \right) = q^\alpha, \alpha = \sup(\lambda n_i + m_i).$$

(ii) Le semi-anneau $\mathcal{R}(\lambda) := \mathcal{F}(\lambda, q)(\mathbb{Z}_{\max}^- \otimes_{\mathbb{B}} \mathbb{Z}_{\max}^-)$ est indépendant, à isomorphisme canonique près, de $q > 1$.

(iii) Les semi-anneaux $\mathcal{R}(\lambda)$ et $\mathcal{R}(\lambda')$, pour $\lambda, \lambda' \notin \mathbb{Q}_+^\times$, sont isomorphes si et seulement si $\lambda' = \lambda$ ou $\lambda' = 1/\lambda$.

Soit R un semi-anneau sans diviseur de zéro et soit $\iota : R \rightarrow \text{Frac}R$ le morphisme canonique vers le semi-corps des fractions. Il n'est pas vrai en général que ι soit injective. On appelle $\iota(R)$ le semi-anneau réduit de R .

Définition 3.5 On définit $\text{Conv}_{\leq}(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ comme l'ensemble des parties convexes fermées C de \mathbb{R}^2 enveloppes convexes d'un nombre finis de translatés $(a_i, b_i) - Q$ avec $Q := \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ et $a_i, b_i \in \mathbb{Z}$.

L'ensemble $\text{Conv}_{\leq}(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ est un semi-anneau pour les opérations d'enveloppe convexe de l'union et de somme.

Proposition 3.6 (i) Le semi-anneau $\text{Conv}_{\leq}(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ est simplifiable.

(ii) Le morphisme $\gamma : \mathbb{Z}_{\max} \otimes_{\mathbb{B}} \mathbb{Z}_{\max} \simeq \text{Sub}_{\leq}(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \rightarrow \text{Conv}_{\leq}(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ donné par l'enveloppe convexe est égal à l'homomorphisme $\iota : \mathbb{Z}_{\max} \otimes_{\mathbb{B}} \mathbb{Z}_{\max} \rightarrow \iota(\mathbb{Z}_{\max} \otimes_{\mathbb{B}} \mathbb{Z}_{\max})$.

(iii) Soit R un semi-anneau simplifiable et $\rho : \mathbb{Z}_{\max} \otimes_{\mathbb{B}} \mathbb{Z}_{\max} \rightarrow R$ un homomorphisme de semi-anneaux tel que $\rho^{-1}(\{0\}) = \{0\}$. Alors, il existe une unique homomorphisme de semi-anneaux $\rho' : \text{Conv}_{\leq}(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \rightarrow R$ tel que $\rho = \rho' \circ \gamma$.

Définition 3.7 Le carré réduit $(\widehat{\mathbb{N}^{\times 2}}, \text{Conv}_{\leq}(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}))$ du site arithmétique $(\widehat{\mathbb{N}^{\times}}, \mathbb{Z}_{\max})$ est le topos $\widehat{\mathbb{N}^{\times 2}}$ muni du faisceau structurel $\text{Conv}_{\leq}(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$, considéré comme un semi-anneau dans le topos.

Composition des correspondances de Frobenius

Définition 3.8 Une correspondance réduite sur le site arithmétique $(\widehat{\mathbb{N}^{\times}}, \mathbb{Z}_{\max})$ est un triplet (R, ℓ, r) où R est un semi-anneau simplifiable $\ell, r : \mathbb{Z}_{\max}^- \rightarrow R$ sont des morphismes de semi-anneaux tels que $\ell^{-1}(\{0\}) = \{0\}$, $r^{-1}(\{0\}) = \{0\}$, et R est engendré par $\ell(\mathbb{Z}_{\max}^-)r(\mathbb{Z}_{\max}^-)$.

Par construction (cf. proposition 3.4), la correspondance de Frobenius donne une correspondance réduite $\Psi(\lambda) := (R, \ell(\lambda), r(\lambda))$,

$$R := \mathcal{R}(\lambda), \ell(\lambda)(q^n) := \mathcal{F}(\lambda, q)(q^n \otimes 1), r(\lambda) := \mathcal{F}(\lambda, q)(1 \otimes q^n).$$

On détermine la loi de composition des correspondances de Frobenius et on montre qu'elle est donnée par la loi de produit dans \mathbb{R}_+^* avec une nuance subtile dans le cas de deux nombres irrationnels dont le produit est rationnel.

La composition $\Psi(\lambda) \circ \Psi(\lambda')$ des correspondances de Frobenius est obtenue comme l'action gauche et droite de \mathbb{Z}_{\max}^- sur le semi-anneau réduit du produit tensoriel $\mathcal{R}(\lambda) \otimes_{\mathbb{Z}_{\max}^-} \mathcal{R}(\lambda')$. Pour énoncer le résultat général, on introduit la

déformation suivante Id_ε de la correspondance identique. Soit $\text{Germ}_{\varepsilon=0}(\mathbb{R}_+^{\max})$ le semi-anneau des germes de fonctions continues d'un voisinage de $0 \in \mathbb{R}$ à valeurs dans \mathbb{R}_+^{\max} , dotées des opérations ponctuelles. Soit \mathcal{R}_ε le sous-semi-anneau de $\text{Germ}_{\varepsilon=0}(\mathbb{R}_+^{\max})$ engendré, pour $q > 1$ fixé, par q et $\text{Fr}_{1+\varepsilon}(q) = q^{1+\varepsilon}$. Le semi-anneau \mathcal{R}_ε est indépendant, à isomorphisme canonique près, du choix de $q > 1$.

Définition 3.9 *La déformation tangentielle de la correspondance identique est donnée par le triplet $(\mathcal{R}_\varepsilon, \ell_\varepsilon, r_\varepsilon)$ avec $\ell_\varepsilon(q^n) := \text{Fr}_{1+\varepsilon}(q^n)$ et $r_\varepsilon(q^n) := q^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.*

Théorème 3.10 *Soient $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\lambda\lambda' \notin \mathbb{Q}$. La composition des correspondances de Frobenius est alors donnée par*

$$\Psi(\lambda) \circ \Psi(\lambda') = \Psi(\lambda\lambda').$$

La même égalité est vérifiée si λ et λ' sont rationnels. Lorsque λ, λ' sont irrationnels et $\lambda\lambda' \notin \mathbb{Q}$ on a

$$\Psi(\lambda) \circ \Psi(\lambda') = \Psi(\lambda\lambda') \circ \text{Id}_\varepsilon = \text{Id}_\varepsilon \circ \Psi(\lambda\lambda')$$

avec Id_ε la déformation tangentielle de la correspondance identique.

4. Sur la notion d'algèbre absolue

Dans la dernière partie de mon cours, j'ai exposé les résultats de [13] qui montrent comment la mise en œuvre en arithmétique de la notion catégorique de \mathbb{S} -algèbre en théorie de l'homotopie, en termes de Γ -anneaux discrets de Segal, permet d'unifier plusieurs tentatives poursuivies ces dernières années afin de préciser le sens de « l'algèbre absolue », pour les applications en théorie des nombres et en géométrie algébrique. Dans notre travail précédent, nous avons rencontré et utilisé au moins trois catégories aptes à gérer cette unification : à savoir la catégorie des monoïdes comme dans [4, 5], la catégorie des hyperanneaux de [5, 6, 9] et enfin la catégorie des semi-anneaux de [1, 8, 11, 12, 13]. De plus, N. Durov dans [14] a développé une géométrie sur \mathbb{F}_1 adaptée aux applications à la théorie d'Arakelov en utilisant les monades comme des généralisations des anneaux classiques. Le résultat principal de [13] montre que toutes les structures et les constructions ci-dessus peuvent être naturellement englobées dans une théorie qui est bien connue en théorie de l'homotopie, à savoir la théorie des \mathbb{S} -algèbres et des Γ -ensembles de Segal. La catégorie des Γ -ensembles pointés est une catégorie monoïdale, symétrique, fermée et la théorie des schémas généralisés développée par B. Töen et M. Vaquié s'applique directement. L'avantage fondamental d'avoir unifié les différentes tentatives réalisées récemment pour développer un concept approprié d'algèbre absolue à l'aide du concept bien établi de \mathbb{S} -algèbre est que cette dernière notion est à la base de la théorie de l'homologie cyclique topologique qui peut être comprise comme l'homologie cyclique sur la base absolue \mathbb{S} à condition d'utiliser une catégorie appropriée de modèles de Quillen. Notre objectif à long terme est d'utiliser l'homologie cyclique sur la base absolue \mathbb{S} et le site arithmétique pour obtenir une interprétation globale des fonctions L des variétés arithmétiques.

Références

- [1] A. Connes, *The Witt construction in characteristic one and Quantization*. Noncommutative geometry and global analysis, 83-113, Contemp. Math., 546, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2011.
- [2] A. Connes. *Trace formula in noncommutative geometry and the zeros of the Riemann zeta function*, *Selecta Math. (N.S.)*, 5(1), 1999, 29-106.
- [3] A. Connes, M. Marcolli *Noncommutative Geometry, Quantum Fields, and Motives*, Colloquium Publications, vol. 55, American Mathematical Society, 2008.
- [4] A. Connes, C. Consani, *Schemes over \mathbb{F}_1 and zeta functions*, *Compositio Mathematica* 146 (6), (2010) 1383-1415.
- [5] A. Connes, C. Consani, *From monoids to hyperstructures: in search of an absolute arithmetic*, in Casimir Force, Casimir Operators and the Riemann Hypothesis, de Gruyter (2010), 147-198.
- [6] A. Connes, C. Consani, *The hyperring of adèle classes*, *Journal of Number Theory* 131 (2011) 159-194.
- [7] A. Connes, C. Consani *On the arithmetic of the BC-system*, *J. Noncommut. Geom.* 8 (2014), no. 3, 873-945.
- [8] A. Connes, C. Consani, *Characteristic one, entropy and the absolute point*, "Noncommutative Geometry, Arithmetic, and Related Topics", the Twenty-First Meeting of the Japan-U.S. Mathematics Institute, Baltimore 2009, JHUP (2012), 75-139.
- [9] A. Connes, C. Consani, *The universal thickening of the field of real numbers*, *Advances in the Theory of Numbers*, Fields Institute Communications 77 (2015).
- [10] A. Connes, C. Consani, *Cyclic homology, Serre's local factors and the λ -operations*; *J. K-Theory* 14 (2014), no. 1, 1-45.
- [11] A. Connes, C. Consani, *The Arithmetic Site*, *Comptes rendus mathématiques Ser. I* 352 (2014), 971-975.
- [12] A. Connes, C. Consani, *Geometry of the Arithmetic Site*, *Adv. Math.* 291, 2016, 274-329.
- [13] A. Connes, C. Consani, *Absolute algebra and Segal's Γ -sets*, *J. Number Theory*, 162, 2016, 518-551.
- [14] N. Durov, *New approach to Arakelov Geometry*, arXiv:0704.2030.
- [15] R. Meyer. *On a representation of the idele class group related to primes and zeros of L-functions*, *Duke Math. J.* 127, n. 3 (2005), 519-595.
- [16] C. Soulé. *Les variétés sur le corps à un élément*, *Mosc. Math. J.* 4(1) 2004, 217-244.

CONFÉRENCES

15-19 septembre 2014, 7th International Workshop DICE2014, Castello Pasquini / Castiglioncello. Une conférence : « Quanta of Geometry ».

18 septembre 2014, Colloquio Galileiano, Università di Pisa. Une conférence : « The Music of Shapes ».

Novembre 2014, une conférence à Munich, « Quanta of geometry ».

Novembre 2014, Trimestre « Noncommutative Geometry and its Applications », Hausdorff Institute (25 novembre). Une conférence : « The Arithmetic Site II ».

Novembre 2014, Trimestre « Noncommutative Geometry and its Applications », Hausdorff Institute (26 novembre). Une conférence : « Towards a Weil Cohomology ».

Décembre 2014, une conférence à Bonn, *Bethe lecture* : « Geometry and the Quantum ».

Mars 2015, six conférences à Vienne, Erwin Schrodinger Institute.

Mai 2015, cinq conférences à Ohio State University, Columbus, Ohio, États-Unis.
« Workshop on topological cyclic homology ».

Juin 2015, une conférence à Oberwolfach.

PUBLICATIONS

CHAMSEDDINE A.H., CONNES A. et MUKHANOV V., « Geometry and the quantum: basics », *Journal of High Energy Physics*, n° 12, 2014, 098, DOI : 10.1007/JHEP12(2014)098.

CHAMSEDDINE A.H., CONNES A. et MUKHANOV V., « Quanta of Geometry: Noncommutative Aspects », *Physical Review Letters*, vol. 114, n° 9, 2015, 091302, DOI : 10.1103/PhysRevLett.114.091302.

CONNES A. et CONSANI C., « The Arithmetic Site », *Comptes rendus mathématiques*, vol. 352, n° 12, décembre 2014, 971-975, DOI : 10.1016/j.crma.2014.07.009.

CONNES A. et CONSANI C., « Geometry of the arithmetic site », *Adv. Math*, 291, 2016, 274-329.

CONNES A. et CONSANI C., « Absolute algebra and Segal's Gamma sets », *J. Number Theory*, 162, 2016, 518-551.

CONNES A. et CONSANI C., « The Scaling Site », *C.R. Math. Acad. Sci. Paris*, 354, 2016, n° 1, 1-6.

