Analyse et géométrie

M. Alain CONNES, membre de l'Institut (Académie des Sciences), professeur

MODULES DE FREDHOLM MULTIPLICATIFS SUR S^1

I. *Introduction*

La théorie homologique duale de la K théorie topologique, appelée K-homologie et notée K_i (X) (i = 0,1) se décrit (grâce aux travaux de Atiyah, Brown-Douglas-Fillmore et Kasparov) à partir de la notion de module de Fredholm sur l'algèbre A = C (X) des fonctions continues sur X. Le but de mon cours cette année était d'étudier dans le cas particulièrement simple où X = S^1, l'analogue mutiplicatif de la notion de module de Fredholm sur A. La deuxième quantification avec la statistique de Fermi-Dirac permet de construire l'analogue multiplicatif de la classe fondamentale de S^1 en K homologie. Nous montrons ensuite comment construire d'autres modules de Fredholm multiplicatifs sur A à partir des C^* algèbres de V. Jones et A. Ocneanu (*).

II. *Classe fondamentale de S^1 en K homologie*

Elle est donnée par le module de Fredholm (h, D) suivant, $h = L^2(S^1)$, où $A = C(S^1)$ agit par opérateurs de multiplication. L'opérateur non borné D est donnée par $(D\xi)(\theta) = i\,\frac{d\xi}{d\theta}$. On a :

1) $\{a \in A,\ \| [D, a] \| < \infty\}$ dense dans A

2) $\operatorname{Trace}\left((1 + D^2)^{-\frac{\alpha}{2}}\right) < \infty \qquad \forall\, \alpha > 1$

Soit F le signe de l'opérateur autoadjoint D (**) et $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ la base orthonormale de h, $e_n(\theta) = \exp(in\theta)$.

(*) Cette construction est un travail effectué en collaboration avec D. Evans.

(**) Pour la valeur propre O on pose F = +1.

Proposition 1. 1) Pour $a = \Sigma\, a_k e^{ik\theta} \in A$ la norme de Hilbert-Schmidt de $[F,a]$ est égale à $(\Sigma\, |k|\, |a_k|^2)^{1/2}$.

2) Pour $f, g \in A_{1/2}$, (i.e. tels que $[F,f]$ et $[F,g]$ soient des opérateurs de Hilbert-Schmidt) on a :

$$\frac{1}{2}\ \text{Trace}\ (F\, [F, f]\, [F, g]) = \frac{1}{2i\pi} \int_{S^1} f dg.$$

3) La fonctionnelle $\tau\,(f,g)$ définie en 2) est un 1-cocycle cyclique et donc un 2-cocycle d'algèbre de Lie sur l'algèbre de Lie des matrices $M_n\,(A_{1/2})$. L'extension centrale correspondante donne l'algèbre de Kac-Moody de type affine $\hat{g\ell}_n$.

Remarque 2. 1) Pour une variété M de dimension d, la classe fondamentale en K homologie est donnée par l'opérateur de Dirac (qui dépend d'une K-orientation de M) et le cocycle cyclique associé est de dimension d ce qui donne un d + 1 cocycle d'algèbre de Lie sur $M_n\,(C^\infty\,(M))$.

2) La classe fondamentale de S^1 en K homologie *multiplicative* réalise l'extension centrale du *groupe* $GL_n\,(A_{1/2})$ qui correspond à l'extension centrale d'algèbre de Lie donnée dans la proposition 1.3).

III. *Quantification de Fermi-Dirac et module de Fredholm multiplicatif*

Soit $\text{Cliff}_{\mathbb{C}}$ le foncteur de la catégorie des espaces de Hilbert réels et transformations orthogonales dans celle des C^* algèbres et isomorphismes qui associe à l'espace h la C^* algèbre A engendrée par les opérateurs $\gamma\,(\xi)$, $\xi \in h$ avec la présentation : 1) $\gamma\,(\lambda\xi + \mu\eta) = \lambda\gamma(\xi) + \mu\gamma(\eta)\ \forall\lambda, \mu \in \mathbb{R}, \xi, \eta \in h$. 2) $\gamma(\xi) = \gamma(\xi)^*$ 3) $\gamma(\xi)^2 = \|\,\xi\,\|^2$.

En appliquant ce foncteur au module de Fredholm (h, D) ci-dessus on obtient :

a) Une C^* algèbre $A = \text{Cliff}_{\mathbb{C}}\,(h_{\mathbb{R}})$ où $h_{\mathbb{R}}$ est l'espace Euclidien sous-jacent à h.

b) Une action de U (1) sur A par automorphismes $\alpha \to \text{Cliff}_{\mathbb{C}}\,(e^{i\alpha})$.

c) Une action du groupe unitaire $U\,(A)$ par automorphismes de A (qui correspond à la structure de A module de h).

d) Une action σ de $\mathbb{R}$ par automorphismes de A, $\sigma_t = \text{Cliff}_{\mathbb{C}}\,(\exp\,(itD))$.

Dans le langage de la théorie des champs, la C^* algèbre A est l'algèbre des champs, le groupe U (1) est le groupe de jauge de première espèce et l'algèbre $O = A^{U(1)}$ des éléments U (1)-invariants de A est l'algèbre des observables. Le groupe $U\,(A)$ est le groupe de jauge de deuxième espèce, l'action c) de son algèbre de Lie définit une distribution j sur S^1 à valeur dans les dérivations de A et l'action du générateur $\alpha \to e^{i\alpha}$ de π_0 $U(A)$ définit un automorphisme θ de A. La donnée du courant j et de l'automorphisme θ équivaut à c). Enfin $(\sigma_t)_{t \in \mathbb{R}}$ est l'évolution dans le temps du système libre.

IV. *Etats KMS sur A pour le groupe d'automorsphismes* σ_t

Un état ω sur A est dit quasi libre si il vérifie :

1) $\omega\,(\gamma\,(\xi_1) \dots \gamma\,(\xi_n)) = O$ si n est impair ($\xi_i \in h$)

2) $\omega\,(\gamma\,(\xi_1) \dots \gamma\,(\xi_n)) = \sum\limits_J \epsilon_J \prod\limits_k \omega\,(\gamma(\xi_{i_k})\,\gamma\,(\xi_{j_k}))$

où J parcourt l'ensemble des partitions (J_k) de $\{1, \dots, n\}$ en sous-ensembles à 2 éléments $J_k = \{i_k, j_k\}$, $i_k < j_k$ et où ϵ_J est la signature de la permutation $(1,\dots,n) \to (i_1, j_1, i_2, j_2, \dots, i_m, j_m)$, $m = n/2$.

Un tel état est uniquement déterminé par l'opérateur antihermitien Q tel que :

$$\omega\,(\gamma(\xi)\gamma(\eta)) = <\xi, \eta> + i < Q\xi, \eta> \qquad \forall\, \xi, \eta \in h_{\mathbb{R}}.$$

Après avoir explicité les constructions de la théorie de Tomita dans ce cas particulier on redémontre les résultats classiques suivants :

Proposition 3. 1) *Le groupe d'automorphismes modulaires* σ_t *de l'état quasi libre* ω *associé à* Q, $Q^* = -Q$, $\| Q \| \leq 1$, $1 + Q^2$ *injectif est égal à* $\sigma_t = \mathrm{Cliff}_{\mathbb{C}}$ (U (t)) *où* U(t) *est le groupe de transformations orthogonales de générateur*

$$H = -2 \sum_{O}^{\infty} (-1)^n \frac{Q^{2n+1}}{2n+1}$$

2) *Soit* D *un opérateur autoadjoint dans h et* $\sigma_t = \mathrm{Cliff}_{\mathbb{C}}$ (exp (it D)). *Pour tout* $\beta \in [o, \infty]$, *il existe un unique état* KMS_β pour σ_t. *Cet état* ω_β *est quasi libre et* $Q = i\,\dfrac{1 - \exp(-\beta D)}{1 + \exp(-\beta D)}$

On étudie ensuite le cas $\beta = \infty$ (température nulle), on montre l'existence d'état KMS_∞ pour $\sigma_t = \mathrm{Cliff}_{\mathbb{C}}$ (exp(it D)) avec non unicité si Ker D $\neq \{O\}$. On démontre que cet état ω_∞ correspond dans le cas ci-dessus ($h = L^2(S^1)$) à la construction de Dirac de la 2^e quantification (trous de Dirac), ainsi que le critère suivant de quasi équivalence :

Proposition 4. Soient ω_1, ω_2 *les états quasi libres sur A associés à* Q_1 *et* Q_2. *Alors* ω_1 *et* ω_2 *sont quasi équivalents ssi* $T_1 - T_2$ *est un opérateur de Hilbert-Schmidt, où* $T_i = \begin{bmatrix} Q_i & -(1 + Q_i^2)^{1/2} \\ (1 + Q_i^2)^{1/2} & -Q_i \end{bmatrix}$

V. *Termes de Schwinger et* K_2 *algébrique*

Soit ω^∞ l'état pur sur A qui est KMS_∞ pour $(\sigma_t)_{t \in \mathbb{R}}$. La proposition 4 montre que l'action de $U(A)$ sur A laisse ω_∞ quasi invariant. Comme la représentation correspondante est irréductible on obtient une représentation projective π de $U(A)$ dans l'espace de Hilbert h_∞ complété de A pour ω_∞. Cette construction se prolonge à $U(M_n(A))$ pour tout n.

Proposition. 1) *La distribution* j *de* S^1 *à valeurs dans* $\mathrm{Der}(A)$ *définit une distribution* J *de* S^1 *à valeurs opérateurs (non bornés) dans* h_∞ *et pour* $f, g \in A_{1/2}$ *on a* $[J(f), J(g)] = \frac{1}{2}\frac{1}{2i\pi}\int f dg$.

2) *La représentation projective* π *de* $U(M_n(A))$ *définit une extension centrale de ce groupe qui est donnée par le régulateur de Karoubi-Connes* (*) $K_2^{alg}(A) \to \mathbb{C}^*$ *associé au module de Fredholm* (h, D).

On explique en détail pour 1) le rôle des points de Wick $J(f) = \, :j(f):$ dans la construction de $J(f)$ ainsi que l'article de Schwinger où la non commutation des courants $J(f)$, $J(g)$ est exhibée.

VI. *Construction de modules de Fredholm multiplicatifs sur* S^1 *à partir des algèbres de V. Jones et A. Ocneanu*

Pour $\tau \in \,]0, \frac{1}{4}] \cup \{(4\cos^2\frac{\pi}{n})^{-1} ; n = 4,5\ldots\}$ soit A_τ la C^* algèbre de V. Jones, engendrée par les projecteurs e_i, $i \in \mathbb{Z}$ avec pour présentation

1) $e_i e_{i\pm 1} e_i = \tau e_i \ \forall i$, 2) $e_i e_j = e_j e_i$ si $|i - j| \geq 2$.

On note θ le shift $\theta(e_i) = e_{i+2} \ \forall i \in \mathbb{Z}$, $\theta \in \mathrm{Aut}(A_\tau)$. On pose $u = \frac{1}{\tau} e_0 (e_1 - \tau) e_2$ et on définit les éléments $e_{k,\ell} \in A_\tau$ grâce au lemme suivant, obtenu indépendamment par D. Evans.

Lemme. Il existe un unique homomorphisme de l'algèbre de Lie $G\ell(\infty)$ *des matrices, dans l'algèbre de Lie de* A_τ, *tel que :*

a) $e_{1,0} = u$, b) $e_{k,k} = e_{2k} \ \forall k \in \mathbb{Z}$, c) $\theta(e_{k,\ell}) = e_{k+1,\ell+1} \ \forall k, \ell$.

d) $(e_{k,\ell})^* = e_{\ell,k} \ \forall \ell, k \in \mathbb{Z}$.

(*) A Connes et M. Karoubi, Caractère multiplicatif d'un module de Fredholm, C.R. Acad. Sci. Paris, t. 299, p. 963-968 (1984).

Considérons alors la dérivation δ_n de A_τ telle que

$$\delta_n (x) = \sum_k [e_{n+k,\,k}, x]$$

et le groupe à un paramètre $\sigma_t \in \mathrm{Aut}\,(A_\sigma)$ engendré par la dérivation L_o, $L_o (x) = \sum_k k\,[e_{2k}, x]$.

Pour $f \in C^\infty (S^1)$ on note $\hat{f}$ sa transformée de Fourier.

Théorème. Supposons $\tau \geq \dfrac{1}{4}$

1) *L'égalité* $J (f) = \Sigma\, \hat{f} (n)\, \delta_n$ *définit une distribution sur* S^1 *à valeurs dans les dérivations de l'algèbre* A_τ, *qui combinée à l'automorphisme* θ *définit un homomorphisme du groupe* U $(C^\infty (S^1))$ *dans* $\mathrm{Aut}\,(A_\tau)$ (*).

2) *On a* $(\dfrac{d}{dt}\, \sigma_t\, J (f))_{t=o} = - J (f')\ \forall f \in C^\infty (S^1)$

3) *Pour tout* $\beta > 0$ *il existe un unique état* KMS_β *sur* A_τ *pour* $(\sigma_t)_{t \in \mathbb{R}}$, *ces états* ω_β *sont deux à deux quasi équivalents et quasi invariants par l'action de U.*

4) *Pour* $\tau \neq \dfrac{1}{2}$ *la représentation associée à* ω_β *est de type* II_∞, *l'action de la composante neutre de U est faiblement intérieure et définit l'extension centrale étudiée en V de* U_0.

Nous étudions ensuite des représentations analogues sur les C^* algèbres A (Γ) associées par A. Ocneanu à un diagramme de Dynkin de type A, D, E.

Invitations conférences

Congrès IMU Berkeley, U.S.A., août 1986.

Raymond and Beverly Sakler Distinguished Lectures, Tel Aviv, Israël, novembre 1986.

Math. and Physics, Schloss Rindberg, Munich, R.F.A., mars 1987.

Cyclic cohomology workshop, Warwick, Angleterre, avril 1987.

Cyclic cohomology, Oberwolfach, R.F.A., juin 1987.

Visite Institut Steklov, Leningrad, U.R.S.S., juin 1987.

Regulators, Luminy, juillet 1987.

Théorie des champs, Cargèse, juillet 1987.

(*) θ est nécessaire car $\pi_o\,(U) = \mathbb{Z}$.

PUBLICATIONS 1986-1987

Avec M. Rieffel, Yang Mills for non commutative two-tori, Contemporary Mathematics, Operator algebras and Math. Phys., p. 237-267.

Cyclic cohomology and the transverse fundamental class of foliation.

Geometric methods in Operator algebras, M. Pitman research Notes in Math. Series, n° 123, p. 52-145.

Avec H. Moscovici, Transgression du caractère de Chern et cohomologie cyclique, CRAS t. 303, Série I, n° 18 (1986).