Analyse et géométrie

M. Alain Connes, membre de l'Institut
(Académie des Sciences), professeur

Caractérisation spectrale des variétés

1. Introduction

J'ai donné cette année dans mon cours la solution d'un problème que j'avais formulé il y a quelques années et qui donne une caractérisation spectrale des variétés Riemanniennes.

2. Les axiomes et la caractérisation

Les cinq conditions, en dimension p, sont

(1) La valeur caractéristique μ_n de la résolvante de D vérifie $\mu_n = O(n^{-1/p})$.

(2) $[[D, a], b] = 0 \qquad \forall a,\ b \in \mathcal{A}$.

(3) Pour tout $a \in \mathcal{A}$, a et $[D, a]$ appartiennent au domaine de δ^m, pour tout entier m où δ est la dérivation : $\delta(T) = [|D|,\ T]$.

(4) Il existe un cycle de Hochschild $c \in Z_p\ (\mathcal{A},\ \mathcal{A})$ tel que $\pi_D\,(c) = 1$ pour p impair, alors que pour p pair, $\pi_D\,(c) = \gamma$ est une $\mathbb{Z}/2$ graduation.

(5) Le $\mathcal{A}$-module $\mathcal{H}_\infty = \cap\ \mathrm{Dom}\ D^m$ est projectif de type fini. De plus l'égalité suivante le dote d'une structure hermitienne $(\ |\ )$: $\langle \xi, a\eta \rangle = ⨍ a(\xi|\eta)\ |D|^{-p}$, $\forall a \in \mathcal{A}$, $\forall \xi,\ \eta \in \mathcal{H}_\infty$.

L'application π_D est définie par

$$\text{(2.1)} \qquad \pi_D\,(a^0 \otimes a^1 \otimes \ldots \otimes a^p) = a^0[D, a^1] \ldots [D, a^p], \qquad \forall a^j \in \mathcal{A}.$$

Le symbole $⨍$ représente la trace de Dixmier.

Théorème 2.1. *Soit* $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ *un triplet spectral, avec* $\mathcal{A}$ commutative*, vérifiant les cinq conditions ci-dessus, on suppose que :*

— *la régularité (3) est vérifiée par tous les endomorphismes de* $\mathcal{H}_\infty$;

— *le cycle de Hochschild c est antisymétrique.*

Il existe alors une variété compacte orientée X telle que $\mathcal{A}$ *soit l'algèbre* $C^\infty(X)$ *des fonctions de classe* C^∞ *sur X.*

De plus toute variété compacte orientée apparaît de cette manière. On a aussi la variante suivante qui ne suppose plus la régularité forte, définie ainsi :

Définition 2.2. *Un triplet spectral est* fortement régulier *si tous les endomorphismes du* $\mathcal{A}$*-module* $\mathcal{H}_\infty$ *appartiennent au domaine de* δ^m*, pour tout entier m.*

Théorème 2.3. *Soit* $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ *un triplet spectral, avec* $\mathcal{A}$ *commutative, vérifiant les cinq conditions ci-dessus, avec c antisymétrique. On suppose que la multiplicité de l'action de* $\mathcal{A}''$ dans $\mathcal{H}$ *est* $2^{p/2}$. *Il existe alors une variété compacte X* (*spin*^{c}) *telle que* $\mathcal{A} = C^\infty(X)$.

Cette hypothèse de multiplicité est une forme faible de la dualité de Poincaré qui était la condition (6) de ma formulation du problème. J'avais montré dans un cours antérieur que l'opérateur D est alors un opérateur de Dirac. La condition de réalité sélectionne ensuite les variétés spinorielles et l'action spectrale sélectionne la connection de Levi-Civita.

Il y a trois étapes dans la démonstration :

a) Montrer que le spectre X de l'algèbre $\mathcal{A}$ est suffisamment *grand i.e.* que l'image d'une « carte locale » a_α contient un ouvert de $\mathbb{R}^p$.

b) Montrer que la mesure spectrale des $a_\alpha^j\,(j > 0)$ sur une « carte locale » est la mesure de Lebesgue.

c) Appliquer l'estimation de l'obstruction de Voiculescu sur les unités quasi-centrales et en déduire que les « cartes locales » sont localement injectives.

3. Topologie de $\mathcal{A}$

Le lemme suivant montre que le triplet spectral $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ est uniquement déterminé par $(\mathcal{A}'', \mathcal{H}, D)$ où $\mathcal{A}''$ est l'algèbre de von Neumann commutative fermeture faible de $\mathcal{A}$.

Lemme 3.1. *Soit* $T \in \mathcal{A}''$. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) $T \in \mathcal{A}$

(2) $[D, T]$ *est borné et* T *et* $[D, T]$ *sont dans le domaine de* δ^m*, pour tout entier m*

(3) T *est dans le domaine de* δ^m*, pour tout entier m*

(4) $T\mathcal{H}_\infty \subset \mathcal{H}_\infty$

On utilise l'égalité :

$$|D|^m T\xi = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \delta^k(T)|D|^{m-k}\xi, \qquad \forall \xi \in \mathrm{Dom}|D|^m \tag{3.1}$$

On montre alors que $\mathcal{A}$ est une algèbre de Fréchet avec les semi-normes sous-multiplicatives

$$p_k(xy) \leq p_k(x)p_k(y), \qquad \forall x, y \in \mathcal{A} \tag{3.2}$$

associées à la condition de régularité,

$$p_k(x) = \|\rho_k(x)\|, \ \rho_k(x) = \begin{pmatrix} x & \delta(x) & \cdots & \delta^k(x)/k! \\ 0 & x & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & x & \delta(x) \\ 0 & \cdots & 0 & x \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

où ρ_k est une représentation de $\mathcal{A}$.

Le Lemme 3.1 donne des estimés de Sobolev. Soient η_μ des générateurs du $\mathcal{A}$-module $\mathcal{H}_\infty$, on définit les normes de Sobolev sur $\mathcal{A}$ par

$$\| a \|_s^{\mathrm{sobolev}} = (\sum_\mu \| (1+D^2)^{s/2} a\eta_\mu \|^2)^{1/2}, \quad \forall a \in \mathcal{A} \tag{3.4}$$

On a

Proposition 3.2.

(1) *Munie des normes* (3.4), $\mathcal{A}$ *est un espace de Fréchet nucléaire séparable.*

(2) *On a des estimés de Sobolev de la forme*

$$p_k(a) \leq c_k \| a \|_{s_k}^{\mathrm{sobolev}}, \ p_k([D,a]) \leq c'_k \| a \|_{s'_k}^{\mathrm{sobolev}}, \qquad \forall a \in \mathcal{A} \tag{3.5}$$

avec $c_k < \infty$, $c'_k < \infty$ *et des suites* $s_k > 0$, $s'_k > 0$.

(3) *Le spectre* $X = \mathrm{Spec}(\mathcal{A})$ *est métrisable.*

(4) *Tout* $T \in \mathrm{End}_{\mathcal{A}}\, \mathcal{H}_\infty$ *agit continûment dans* $\mathcal{H}_\infty$ *et définit un opérateur borné dans* $\mathcal{H}$.

(5) *L'isomorphisme algébrique* $\mathcal{H}_\infty = e\mathcal{A}^n$ *est topologique.*

(6) *L'application* $(a, \xi) \mapsto a\xi$ *et le produit à valeurs dans* $\mathcal{A}$ *sont des applications continues* $\mathcal{A} \times \mathcal{H}_\infty \to \mathcal{H}_\infty$ *et* $\mathcal{H}_\infty \times \mathcal{H}_\infty \to \mathcal{A}$.

On a de plus la stabilité par calcul fonctionnel démontrée par Varilly et Rennie :

Proposition 3.3. *Soient* $a_j = a_j^*$, *n éléments auto-adjoints de* $\mathcal{A}$ *et* $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{C}$ *une fonction de classe* C^∞ *définie sur un voisinage du spectre des* a_j. *Alors* $f(a_1, \ldots, a_n) \in A$ *appartient à* $\mathcal{A} \subset A$.

4. Fonctions implicites et cartes locales

Soit $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ un triplet spectral vérifiant les cinq conditions du §2.

Lemme 4.1. *Soit $\mathcal{B}$ l'algèbre des endomorphismes of $\mathcal{H}_\infty$. On a une décomposition finie de la forme*

$$[D,a] = \sum \delta_j(a)\, \gamma_j, \qquad \forall a \in \mathcal{A}, \tag{4.1}$$

où $\gamma_j \in \mathcal{B}$ et les δ_j sont des dérivations

$$\delta_j(a) = i(\xi_j \,|\, [D,a]\xi_j), \qquad \forall a \in \mathcal{A}, \tag{4.2}$$

pour $\xi_j \in \mathcal{H}_\infty$.

Par hypothèse le cycle c est de la forme :

$$c = \sum_\alpha a_\alpha^0\, \omega_\alpha, \;\; \omega_\alpha = \sum_\beta \varepsilon(\beta) 1 \otimes a_\alpha^{\beta(1)} \otimes \cdots \otimes a_\alpha^{\beta(p)} \tag{4.3}$$

où l'on peut supposer que les a_α^μ sont auto-adjoints pour $\mu > 0$. Le module projectif de type fini $\mathcal{H}_\infty$ sur $\mathcal{A}$ est de la forme $\mathcal{H}_\infty = e\mathcal{A}^n$, où $e \in M_n(\mathcal{A})$ est un idempotent auto-adjoint. La trace $\tau = \mathrm{Tr}(e) = \sum e_{jj} \in \mathcal{A}$ détermine uniquement les projecteurs $p_j \in \mathcal{A}$ associés à la dimension j de la fibre, par l'égalité

$$\tau = \mathrm{Tr}(e) = \sum j\, p_j \quad \sum p_j = 1. \tag{4.4}$$

On note que $p_0 = 0$. On définit une espérance conditionnelle $E_{\mathcal{A}}$: $\mathrm{End}_{\mathcal{A}}(\mathcal{H}_\infty) \to \mathcal{A}$, par

$$E_{\mathcal{A}}(T) = \sum_{j>0} \frac{1}{j}\, p_j \;\sum T_{kk}, \qquad \forall\, T = (T_{kl}) \in eM_n(\mathcal{A})e \tag{4.5}$$

On définit alors $\rho_\alpha \in \mathcal{A}$ par

$$\rho_\alpha = i^{\frac{p(p+1)}{2}}\, E_{\mathcal{A}}(\gamma \sum_\beta \varepsilon(\beta)[D, a_\alpha^{\beta(1)}] \cdots [D, a_\alpha^{\beta(p)}]). \tag{4.6}$$

On pose

$$C_\alpha = \{x \in X \,|\, \rho_\alpha(x) = 0\} \tag{4.7}$$

et on désigne par $U_\alpha = C_\alpha^c$ son complément *i.e.* l'ouvert où ρ_α ne s'annule pas.

Lemme 4.2. *Les U_α forment un recouvrement ouvert de $X =$* $\mathrm{Spec}(\mathcal{A})$.

On utilise alors le lemme suivant :

Lemme 4.3. *Soit $\mathcal{A}$ commutative, et $a = (a^j)$, p éléments auto-adjoints de $\mathcal{A}$. Soit χ un caractère de $\mathcal{A}$, et $\delta_j \in \mathrm{Der}\mathcal{A}$ des dérivations telles que*

— *chaque δ_j s'exponentie ;*

— *le déterminant de la matrice $\chi(\delta_j(a^k))$ n'est pas nul.*

Alors l'image par a de tout voisinage de χ dans $\mathrm{Spec}(\mathcal{A})$ *contient un voisinage de* $a(\chi)$ *dans* $\mathbb{R}^p$. *Il existe de plus une famille de classe* C^∞, $\sigma_t \in \mathrm{Aut}(\mathcal{A})$, $t \in \mathbb{R}^p$, *un voisinage* Z *de* χ *dans* $X = \mathrm{Spec}(\mathcal{A})$ *et* W *de* $0 \in \mathbb{R}^p$ *tels que, pour tout* $\kappa \in Z$, *l'application* $t \mapsto a(\kappa \circ \sigma_t)$ *soit un diffeomorphisme, dépendant continûment de* κ, *de* W *avec un voisinage de* $a(\kappa)$ *dans* $\mathbb{R}^p$.

5. Dérivations dissipatives

Commençons par la propriété de *dissipativité* des dérivations. On a en effet :

Lemme 5.1. *Supposons que les dérivations de la forme* (4.2) *s'exponentient. Alors, pour tout* $h = h^* \in \mathcal{A}$, *le commutateur* $[D, h]$ *est nul là où* h *atteint son maximum. Réciproquement, cette propriété entraîne que les dérivations* $\pm\delta_j$ *de la forme* (4.2) *sont dissipatives i.e.*

(5.1.) $$\|x + \lambda\delta_j(x)\| \geq \|x\|, \qquad \forall x \in \mathcal{A},\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

On notera que la commutativité de $[D, h]$ avec h et l'auto-adjonction de D ne suffisent pas à entraîner la conclusion du Lemme 5.1. En effet considérons le triplet spectral

(5.2.) $$\mathcal{A} = C^\infty([0,\ 1]),\ \mathcal{H} = L^2([0,\ 1]) \otimes \mathbb{C}^2,\ D = \begin{pmatrix} 0 & \partial_x \\ -\partial_x & 0 \end{pmatrix}$$

avec la condition au bord

(5.3.) $$\mathrm{Dom}\ D = \{\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \mid \xi_1(0) = 0,\ \xi_2(1) = 0\}$$

Pour tout $h \in \mathcal{A}$ on a $[D, h] = \partial_x h \gamma_1$,

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi $[D, h]$ commute avec h. Mais pour $h(x) = x$ le maximum est en $x = 1$ et $[D, h]$ ne s'annule pas en ce point.

Un point crucial est la détermination du symbole principal de $|D|$ sous la forme,

Proposition 5.2. *Soit* $h = h^* \in \mathcal{A}$, *alors on a pour la convergence en norme dans* $\mathcal{H}$:

(5.4) $$\lim_{\tau\to\infty} \tau^{-1} e^{i\tau h} |D| e^{-i\tau h}\xi = |[D,h]|\xi\ , \qquad \forall \xi \in \mathrm{Dom}\ D.$$

Remarque 5.3. La Proposition 5.2 montre que, sous l'hypothèse de régularité,

(5.5) $$[|[D,\ h]|,\ [D,\ a]] = 0, \qquad \forall h = h^*,\ a \in \mathcal{A}.$$

Si l'on fait l'hypothèse de régularité forte de la Définition 2.2 on obtient

(5.6) $$[D,\ h]^2 \in \mathcal{A}, \qquad \forall h = h^* \in \mathcal{A}.$$

On montre de plus que la régularité suffit à assurer la propriété de dissipativité du Lemme 5.1.

Théorème 5.4. *Soit* $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ *un triplet spectral régulier, vérifiant la condition d'ordre un. Alors pour tout* $h = h^* \in \mathcal{A}$*, le commutateur* $[D, h]$ *s'annule là où* h *atteint son maximum, i.e. pour toute suite* $b_n \in \mathcal{A}$, $\|b_n\| \leq 1$*, de support tendant vers* $\{\chi\}$, $|\chi(h)|$ *maximum, on a*

$$\|[D, h]b_n\| \to 0.$$

Corollaire 5.5. *Soit* $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ *un triplet spectral avec* $\mathcal{A}$ *commutative vérifiant les cinq conditions du §2. Les dérivations* $\pm\delta_j$ *du Lemme 4.1 sont dissipatives.*

Cela résulte du Théorème 5.4 et du Lemme 5.1.

Corollaire 5.6. *Soit* $h = h^* \in \mathcal{A}$*. Le symbole principal de l'opérateur*

$$\mathrm{Grad}(h) = [D^2, h] \tag{5.7}$$

est nul là où h *atteint son maximum.*

6. Dérivations auto-adjointes

Nous dirons qu'un opérateur borné A est régulier si il appartient au domaine de δ^m pour tout m.

Proposition 6.1. *Soit* A *un opérateur régulier. Alors l'opérateur* $H = A^*DA$ *de domaine* Dom D *est essentiellement auto-adjoint. Le domaine de la fermeture de* H *est l'ensemble des* $\xi \in \mathcal{H}$ *pour lesquels* $A^*DA(1+\varepsilon|D|)^{-1}\xi$ *converge en norme pour* $\varepsilon \to 0$*. La limite des* $A^*DA(1+\varepsilon|D|)^{-1}\xi$ donne $\overline{H}\xi$.

On applique ce résultat aux endomorphismes du $\mathcal{A}$-module $\mathcal{H}_\infty$ qui sont de rang un, pour obtenir un opérateur de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}$.

Lemme 6.2. *Soit* $\xi, \eta \in \mathcal{H}_\infty$*, la formule suivante définit un endomorphisme du* $\mathcal{A}$*-module* $\mathcal{H}_\infty$:

$$T_{\xi,\eta}(\zeta) = (\eta|\zeta)\xi, \qquad \forall \zeta \in \mathcal{H}_\infty \tag{6.1}$$

où $(\eta|\zeta)$ *est le produit à valeurs dans* $\mathcal{A}$*. On a*

$$T_{a\xi,\, b\eta} = ab^* T_{\xi,\eta}, \qquad \forall a, b \in \mathcal{A}, \quad T^*_{\xi,\eta} = T_{\eta,\xi} \tag{6.2}$$

Le résultat principal est le suivant :

Théorème 6.3. *Soit* $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ *un triplet spectral fortement régulier, avec* $\mathcal{A}$ *commutative, vérifiant les cinq conditions du §2. Alors toute dérivation de* $\mathcal{A}$ *de la* *forme* (4.2) *i.e.* $\delta_0(a) = i(\xi|[D, a]\xi)$, $\forall a \in \mathcal{A}$, *est le générateur d'un groupe à un paramètre d'automorphismes* $\sigma_t \in \mathrm{Aut}(\mathcal{A})$ *tels que*

— $\partial_t \sigma_t(a) = \delta_0(\sigma_t(a))$.

— *L'application* $(t, a) \in \mathbb{R} \times \mathcal{A} \mapsto \sigma_t(a) \in \mathcal{A}$ est continue.

On peut alors montrer directement la continuité absolue des mesures $\sigma_t^*(\lambda)$ par rapport à λ. Nous dirons qu'une mesure μ est fortement équivalente à υ si et seulement si il existe $c > 0$ tel que $c\upsilon \leq \mu \leq c^{-1}\upsilon$.

Proposition 6.4. *Soit* $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$, δ_0 *et* σ_t *comme dans le Théorème 6.3. Alors pour tout* $t \in \mathbb{R}$ la mesure λ de

$$\int a d\lambda = \fint a|D|^{-p}, \qquad \forall a \in C(X). \tag{6.3}$$

est fortement équivalente à ses transformées par σ_t.

7. Multiplicité spectrale

La mesure (6.3) est localement équivalente à la mesure spectrale de la représentation de $A = C(X)$ dans $\mathcal{H}$. On a en effet :

Lemme 7.1. *Pour tout ouvert* $V \subset X$ *les mesures suivantes sont fortement équivalentes :*

— *la restriction* $\lambda|_V$ *à* V *de la mesure* λ *de* (6.3) ;

— *la restriction à* V *de la mesure spectrale associée à un vecteur* $\xi \in \mathcal{H}^\infty$ *pour lequel* (ξ, ξ) *est strictement positif sur* $\overline{V}$.

On a de plus

Théorème 7.2. *Soit* $V \subset U_\alpha$ *un ouvert et* $a_\alpha^j|_V$ *la restriction des* $a_\alpha^j \in \mathcal{A}$ *au sous-espace* $1_V \mathcal{H} \subset \mathcal{H}$. *Alors*

— *la mesure spectrale jointe des* $a_\alpha^j|_V$ *est la mesure de Lebesgue sur* $s_\alpha(V)$;

— *la multiplicité spectrale* $m_{ac}(y)$ *vérifie*

$$m_{ac}(y) \geq n(y) = \#\{s_\alpha^{-1}(y) \cap V\}, \qquad \forall y \in s_\alpha(V), \tag{7.1}$$

presque partout pour la mesure de Lebesgue.

8. Forme locale des estimés $\mathcal{L}^{(p,1)}$

L'obstruction de Voiculescu relative à un idéal J d'opérateurs compacts est donnée par

$$k_J(\{a_j\}) = \liminf_{A \in \mathcal{R}_1^+, A \uparrow 1} \max \|[A, a_j]\|_J \tag{8.1}$$

où $\mathcal{R}_1^+$ est l'ensemble partiellement ordonné des opérateurs positifs de rang fini, de norme ≤ 1, dans $\mathcal{H}$.

Théorème 8.1. *Il existe une constante finie κ_p telle que pour tous $a_j \in \mathcal{A}$ et tout compact $K \subset X$ on ait, avec $J = \mathcal{L}^{(p,1)}$, l'inégalité*

$$\kappa_J(\{a_j\, 1_K\}) \leq \kappa_p \max \|\delta(a_j)\|_\infty (\lambda(K))^{1/p} \tag{8.2}$$

où :

$$\lambda(K) = \inf_{b \in \mathcal{A}^+,\, b 1_K = 1_K} \int\!\!\!\!\!- \, b|D|^{-p}.$$

Corollaire 8.2. *Il existe $C < \infty$ tel que la multiplicité spectrale $m^V_{\mathrm{ac}}(x)$ du spectre absolument continu de la restriction $a^j_\alpha|_V$ des a^j_α, à $1_V \mathcal{H}$ vérifie :*

$$m^V_{\mathrm{ac}}(x) \leq C, \qquad \forall x \in W = s_\alpha(V) \tag{8.3}$$

Corollaire 8.3. *Il existe $m < \infty$ tel que*

$$\#(s_\alpha^{-1}(x) \cap V) \leq m, \qquad \forall x \in W = s_\alpha(V) \tag{8.4}$$

9. Théorème de Reconstruction

On utilise le Corollaire 8.3 ainsi que l'existence de suffisamment d'automorphismes de $\mathcal{A}$ pour démontrer le lemme clef suivant :

Lemme 9.1. *Pour tout point $\chi \in X$ il existe p éléments auto-adjoints $x^\mu \in \mathcal{A}$ et une famille, de classe C^∞, $\tau_t \in \mathrm{Aut}(\mathcal{A})$, $t \in \mathbb{R}^p$, $\tau_0 = \mathrm{id}$, tels que*

— *les x^μ définissent un homéomorphisme d'un voisinage de χ avec un ouvert de $\mathbb{R}^p$;*

— *l'application $t \mapsto h(t) = \chi \circ \tau_t$ est un homéomorphisme d'un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^p$ avec un voisinage de χ ;*

— *l'application $x \circ h$ est un difféomorphisme local.*

Il en résulte alors

Lemme 9.2. *L'algèbre $\mathcal{A}$ est localement l'algèbre des restrictions de fonctions C^∞* sur $\mathbb{R}^p$ *à un ouvert borné de $\mathbb{R}^p$.*

En utilisant ce lemme, l'on montre que l'on peut doter le spectre X de $\mathcal{A}$ d'une unique structure de variété compacte lisse telle que $\mathcal{A} = C^\infty(X)$.

Conférences

Septembre 2007, 1 conférence à Oberwolfach.

Octobre 2007, 1 conférence à NYU, New York.

Octobre 2007, 1 conférence à Rutgers.

Octobre 2007, 1 conférence à ICTP, Trieste.

Mai 2008, 5 conférences à Vanderbilt (Fifth Spring Institute in Non-commutative Geometry and Operator Algebras).

Mai 2008, 1 conférence à l'IHÉS (50^{e} anniversaire).

Mai 2008, 3 conférences à Toronto (Fields Lectures).

Publications

A. Connes, M. Marcolli, *Noncommutative Geometry, Quantum Fields, and Motives*, Colloquium Publications, Vol. 55, American Mathematical Society, 2008.

A. Connes, C. Consani, M. Marcolli, *Fun with* $\mathbb{F}_1$. A paraître dans JNT.