Analyse et géométrie

M. Alain Connes, membre de l'Institut
(Académie des Sciences), professeur

Introduction

En géométrie non commutative un espace géométrique est donné par un triplet spectral $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ où $\mathcal{A}$ désigne une algèbre involutive représentée dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ et où D est un opérateur autoadjoint à résolvante compacte. La condition essentielle est que les commutateurs $[D, a]$ soient bornés pour tout $a \in \mathcal{A}$. On obtient alors une classe de cohomologie cyclique bien définie sur $\mathcal{A}$, dont la dimension est fixée par la croissance des valeurs propres de D et qui représente le caractère de Chern ch $(\mathcal{H}, D)$ en K-homologie de la donnée opératorielle ci-dessus. J'ai montré dans mon cours comment obtenir, en utilisant les résidus de fonctions ζ associées au problème, une formule locale pour la classe de cohomologie cyclique ch $(\mathcal{H}, D)$. J'ai ensuite appliqué ce résultat au triplet spectral associé à l'opérateur hypoelliptique de signature pour le produit croisé d'une variété par son groupe de diffeomorphismes.

La démonstration et l'élaboration de la formule générale comprennent trois étapes essentielles 1) Le calcul pseudodifférentiel pour les triplets spectraux 2) Le spectre de dimension, le résidu de Wodzciki et ses analogues pour les pôles d'ordre supérieur 3) La formule locale et sa renormalisation.

Je donnerai ici un bref résumé des résultats.

I. *Calcul pseudodifférentiel pour les triplets spectraux*

Soit $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ un triplet spectral. Pour tout $s \in \mathbb{R}$ soit $\mathcal{H}^s =$ Domaine $(|D|^s)$ et

$$\mathcal{H}^\infty = \bigcap_{s\geq 0} \mathcal{H}^s, \ \mathcal{H}^{-\infty} = \text{dual de } \mathcal{H}^\infty. \tag{1}$$

On obtient ainsi une échelle d'espaces de Hilbert et pour tout r on définit op^r comme l'espace des opérateurs dans $\mathcal{H}^\infty$ qui sont continus pour tout s :

(2) $$op^r : \mathcal{H}^s \to \mathcal{H}^{s-r}$$

Nous supposerons que pour tout $a \in \mathcal{A}$, a et $[D, a]$ sont dans le domaine de toutes les puissances de la dérivation $\delta = [|D|, \cdot]$.

Lemme 1. — *Alors a et $[D, a]$ sont dans op^0 et de plus,*

$$b - |D| \; b \, |D|^{-1} \in op^{-1} \qquad (b = a \text{ ou } [\mathrm{D}, a]).$$

Il est important de noter que l'hypothèse de régularité ci-dessus équivaut à :

a et $[D, a] \in \cap$ Dom $L^k R^q$, $L(b) = |D|^{-1} [D^2, b]$, $R(b) = [D^2, b] \, |D|^{-1}$.

Lemme 2. — $\bigcap\limits_{k,q}$ Dom $L^k R^q = \bigcap\limits_{n}$ Dom δ^n.

Corollaire 3. — *Avec l'hypothèse ci-dessus on a :*

$$\big[D^2, [D^2, \ldots [D^2, \underbrace{b]] \ldots}_{n}\big] \in op^n \qquad \forall b \in \mathcal{A} \text{ ou } [D, \mathcal{A}].$$

Nous définirons l'ordre des opérateurs par la filtration suivante :

(3) $$P \in OP^\alpha \text{ ssi } |D|^{-\alpha} P \in \cap \text{ Dom } \delta^n.$$

Ainsi $OP^0 = \cap$ Dom δ^n et on a :

$$OP^\alpha \subset op^\alpha \qquad \forall \alpha.$$

Décrivons maintenant le calcul pseudodifférentiel.

Soit ∇ la dérivation : $\nabla(T) = [D^2, T]$, et considérons l'algèbre engendrée par les $\nabla^n(T)$, $T \in \mathcal{A}$ ou $[D, \mathcal{A}]$.

Cette algèbre $\mathcal{D}$ est l'analogue de l'algèbre des opérateurs différentiels.

En fait le Corollaire 3 donne une filtration naturelle de $\mathcal{D}$ par la puissance de ∇ utilisée.

De plus on a :

(4) $$\mathcal{D}^n \subset OP^n.$$

Nous allons développer un calcul pour les opérateurs de la forme :

(5) $$A \, |D|^z \qquad z \in \mathbb{C}, A \in \mathcal{D}.$$

Nous utiliserons la notation $\Delta = D^2$ et commencerons par analyser l'action de $\mathbb{C}$ donnée par :

(6) $$\sigma^{2z} = \Delta^z \cdot \Delta^{-z}.$$

Par construction $\mathcal{D}$ est stable par la dérivation ∇ et :

(7) $$\nabla(\mathcal{D}^n) \subset \mathcal{D}^{n+1}.$$

De plus pour $A \in \mathcal{D}^n$ et $z \in \mathbb{C}$ on a :

(8) $$A\,|D|^z \in OP^{\,n+\mathrm{Re}(z)}.$$

Nous utiliserons le groupe σ^{2z} pour comprendre comment multiplier les opérateurs d'ordre complexe modulo OP^{-k} pour tout k. On a : $\sigma^2 = 1 + \varepsilon$,

(9) $$\varepsilon(T) = \nabla(T)\,\Delta^{-1}.$$

Lemme 4. — *Soit $T \in \mathcal{D}^q$ alors $\varepsilon^k(T) \in OP^{q-k}$* $\quad \forall k \geq 0.$

En effet,

$$\varepsilon^k(T) = \nabla^k(T)\Delta^{-k} \in OP^{q+k}\,\Delta^{-k} \subset OP^{q-k}.$$

Justifions l'expression formelle :

(10) $$\sigma^{2z}(T) = \left(1 + z\,\varepsilon + \frac{z(z-1)}{2!}\,\varepsilon^2 + \ldots\right)(T),$$

qui doit donner $\sigma^{2z}(T)$ modulo OP^{q-k-1} si l'on s'arrête au terme $\varepsilon^k(T)$.

Il s'agit de contrôler le reste de la formule de Taylor :

(11) $$(1+\varepsilon)^{n+1-\alpha} = 1 + (n+1-\alpha)\varepsilon + \frac{(n+1-\alpha)(n-\alpha)}{2!}\,\varepsilon^2 + \ldots +$$

$$(n+1-\alpha)\ldots(n+1-k-\alpha)\,\frac{\varepsilon^{k+1}}{(k+1)!}\cdots + (n+1-\alpha)\ldots(2-\alpha)\frac{\varepsilon^n}{n!} +$$

$$\varepsilon^{n+1}\int_0^1 (n+1-\alpha)\ldots(1-\alpha)\,(1+t\varepsilon)^{-\alpha}\,\frac{(1-t)^n}{n!}\,dt.$$

Le lemme essentiel est le suivant :

Lemme 5. — *Soit $\alpha \in \mathbb{C}$, $0 < \mathrm{Re}\,\alpha < 1$ et $\beta > 0$, $\beta < \alpha = \mathrm{Re}\,\alpha$. alors l'opérateur suivant préserve l'espace OP^r pour tout r :*

$$\Psi = \sigma^{2\beta}\int_0^1 (1+t\varepsilon)^{-\alpha}\,(1-t)^n\,dt.$$

Démonstration. — Il suffit d'exprimer Ψ sous forme d'une intégrale

(12) $$\Psi = \int \sigma^{2is}\,d\mu(s) \qquad \|\mu\| < \infty.$$

Montrons que la transformée de Fourier de la fonction suivante est intégrable

$$u \to \int_0^1 e^{\beta u}\,(1 + t(e^u - 1))^{-\alpha}\,\frac{(1-t)^n}{n!}\,dt. \tag{13}$$

En fait il suffit de vérifier que la fonction suivante est dans l'espace de Schwartz $S(\mathbb{R})$:

$$\varphi_n(u) = (e^u - 1)^{-(n+1)}\, e^{\beta u} \Big(e^{(n+1-\alpha)u} - 1 - (n+1-\alpha)\,(e^u - 1) \tag{14}$$

$$- \frac{(n+1-\alpha)\,(n-\alpha)}{2!}\,(e^u-1)^2 - \ldots - \frac{(n+1-\alpha)\,(n-\alpha)\,\ldots\,(2-\alpha)}{n!}\,(e^u-1)^n\Big),$$

Ce qui est immédiat.

On obtient alors le théorème suivant :

Théorème 6. — Soit $T \in \mathcal{D}^q$ *et* $n \in \mathbb{N}$. *Alors pour tout* $z \in \mathbb{C}$

$$\sigma^{2z}(T) - \left(T + z\,\varepsilon(T) + \frac{z\,(z-1)}{2!}\,\varepsilon^2(T) + \ldots + \frac{z(z-1)\,\ldots\,(z-n+1)}{n!}\,\varepsilon^n(T)\right)$$

$$\in OP^{q-(n+1)}.$$

II. *Spectre de dimension, résidu de Wodzicki et ses analogues pour les pôles d'ordre supérieur*

La notion usuelle de dimension pour les triplets spectraux, donnée par le degré de sommabilité

$$D^{-1} \in \mathcal{L}^{(p,\infty)}, \tag{1}$$

ne donne qu'une borne supérieure de la dimension et ne peut détecter les dimensions des composantes d'un espace construit comme la réunion de composantes de dimensions différentes $(\mathcal{A}_k, \mathcal{H}_k, D_k)$, $k = 1, \ldots, N$,

$$\mathcal{A} = \oplus \mathcal{A}_k,\ \mathcal{H} = \oplus \mathcal{H}_k,\ D = \oplus D_k. \tag{2}$$

Dans un cours précédent nous avons donné la formule suivante pour la classe de Hochschild du caractère :

$$\tau\,(a^0, \ldots, a^p) = \mathrm{Tr}_\omega\,(a^0\,[D, a^1]\,\ldots\,[D, a^p]\,|D|^{-p}). \tag{3}$$

Clairement ce cocycle de Hochschild ne tient pas compte des composantes de plus basses dimensions dans un espace tel que (2).

En fait la notion correcte de dimension n'est pas donnée par un seul nombre réel p mais par un sous-ensemble

(4) $$Sd \subset \mathbb{C}$$

que nous appellerons le *spectre de dimension* du triplet donné. Nous supposerons que Sd est un sous-ensemble discret de $\mathbb{C}$. Cette condition est incorporée de la manière suivante dans la définition de Sd :

Définition 7. — *Un triplet spectral a un spectre de dimension discret Sd, si $Sd \subset \mathbb{C}$ est discret et pour tout élément de l'algèbre $\mathfrak{B}$ engendrée par les $\delta^n(a)$, $a \in \mathcal{A}$, la fonction*

$$\zeta_b(z) = \text{Trace}\,(b|D|^{-z})$$

se prolonge holomorphiquement à $\mathbb{C}\backslash Sd$.

Il n'est pas difficile de vérifier que Sd se comporte de la manière suivante pour les opérations de sommes et produits.

(5) $$Sd\ (\text{Somme de deux espaces}) = \cup Sd(\text{Espaces})$$

(6) $$Sd\ (\text{Produit de deux espaces}) = Sd(\text{Espace}_1) + Sd(\text{Espace}_2).$$

Il est facile de donner de nombreux exemples de triplets spectraux à spectre de dimension discret.

1. *Variétés Riemanniennes* (avec quelques variantes incluant les métriques de Finsler et le remplacement de $|D|$ par $|D|^\alpha$, $\alpha \in\,]0, 1]$).

2. *Variétés à singularités.* En fait les triplets spectraux sont stables par l'opération qui remplace un espace par le cône au-dessus de cet espace.

3. *Espaces discrets et leurs produits par les variétés.* Les triplets spectraux sont bien entendu stables par produits.

4. *Ensembles de Cantor.* Ils sont importants car ils donnent des exemples de spectres de dimention contenant des nombres complexes.

5. *Algèbres des groupes discrets nilpotents.* L'algèbre $\mathcal{A}$ est l'algèbre du groupe discret Γ, dont la nilpotence est nécessaire pour assurer la condition $D^{-1} \in \mathcal{L}^{(p,\infty)}$.

6. *Structure transverse des feuilletages.* Cet exemple et l'exemple très voisin des structures *Diff*-invariantes sur une variété est traité en détail dans un travail en collaboration avec H. Moscovici.

Nous allons étendre le résidu du Wodzicki à notre cadre général. C'est-à-dire, nous allons étendre la trace de Dixmier aux opérateurs $P|D|^{-z}$ d'ordre arbitraire où P est un élément de $\mathfrak{B}$. Introduisons l'algèbre $\Psi^*(\mathcal{A})$ des opérateurs qui ont un développement :

(7) $$P \simeq b_q\,|D|^q + b_{q-1}\,|D|^{q-1} + \dots\,,\ b_q \in \mathfrak{B},$$

où l'égalité avec $\sum_{-N<n\leq q} b_n\,|D|^n$ a lieu modulo OP^{-N}.

Pour vérifier qu'il s'agit d'une algèbre on utilise le Théorème 6 qui donne une identité de la forme :

$$|D|^\alpha\, b \simeq \sum_0^\infty c_{\alpha,k}\, \delta^k\,(b)\,|D|^{\,\alpha-k}, \tag{8}$$

où $c_{\alpha,k}$ est le coefficient de ε^k dans le développement de

$$(1+\varepsilon)^\alpha = \sum_0^\infty \frac{\alpha\,(\alpha-1)\,\ldots\,(\alpha-k+1)}{k!}\,\varepsilon^k, \tag{9}$$

avec $\varepsilon(b) = \delta(b)|D|^{-1}$.

Proposition 8. — *Soit $p<\infty$ le degré de sommabilité de D.*

a) *Pour $P \in \Psi^*(\mathcal{A})$ la fonction $h\,(z) =$ Trace $(P|D|^{-2z})$ est holomorphe pour* Re$z > \frac{1}{2}$(Ordre $P+p$) *et se prolonge en une fonction holomorphe sur le complément d'un sous-ensemble discret de $\mathbb{C}$.*

b) *Soit $\tau_k(P)$ le résidu en 0 de $z^k\,h\,(z)$, $k\geq 0$; alors*

$$\tau_k(P_1P_2-P_2P_1) = \sum_{n>0} \frac{(-1)^{n-1}}{n!}\,\tau_{k+n}\big(P_1\,L^n\,(\mathrm{P}_2)\big),$$

où L est la dérivation $L = 2\log(1+\varepsilon)$.

Dans le cas de spectre simple, la trace $\tau=\tau_0$ est une extension de la trace de Dixmier.

III. *La formule locale et sa renormalisation*

La classe de cohomologie de Hochschild du caractère est donnée par la formule suivante :

$$\varphi_n(a^0,\ldots,a^n) = \lambda_n\,\mathrm{Tr}_\omega(a^0\,[D,a^1]\,\ldots\,[D,a^n]\,|D|^{-n}),\ \forall\, a^j\in\mathcal{A}. \tag{1}$$

Notre formule locale pour la classe de *cohomologie cyclique* du caractère de Chern sera exprimée par un cocycle dans le bicomplexe (b,B) ce qui conduit à utiliser la normalisation suivante au lieu de λ_n

$$\mu_n = (-1)^{[n/2]}\,(n!)^{-1}\,\lambda_n = \sqrt{2i}\;\frac{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}{n!} \qquad \text{(pour } n \text{ impair).} \tag{2}$$

Enonçons maintenant le résultat. Soit $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ un triplet spectral à spectre de dimension discret avec $D^{-1} \in \mathcal{L}^{(p,\infty)}$. Nous utiliserons les notations suivantes :

$$da = [D, a], \; \forall a \text{ opérateur dans } \mathcal{H}. \tag{3}$$

$$\nabla(a) = [D^2, a] \; ; \; a^{(k)} = \nabla^k(a), \; a \text{ opérateur dans } \mathcal{H}. \tag{4}$$

Théorème 9. — a) *La formule suivante définit un cocycle dans le bicomplexe* (b, B) *de l'algèbre* $\mathcal{A}$:

$$\varphi_n(a^0, \ldots, a^n) = \sqrt{2i} \sum_{q \geq 0,\, k_j \geq 0} c_{n,k,q}\, \tau_q\left(a^0 (da^1)^{(k_1)} \ldots (da^n)^{(k_n)} |D|^{-(n+2\Sigma k_j)}\right),$$

où

$$c_{n,k,q} = (-1)^{k_1+\ldots+k_n} (k_1! \ldots k_n!)^{-1}\, \Gamma^{(q)}\left(k_1 + \ldots + k_n + \frac{n}{2}\right) \times \frac{1}{q!}\left((k_1+1)(k_1+k_2+2)\ldots(k_1+\ldots+k_n+n)\right)^{-1},$$

où $\Gamma^{(q)}$ *est la dérivée d'ordre* q *de la fonction* Γ.

b) *La classe de cohomologie du cocycle* (φ_n), *n impair, dans* $HC^{\text{impair}}(\mathcal{A})$ *coïncide avec le caractère de Chern* $ch\,(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$.

Il est important de noter que le terme $\tau_q(T_{n,k})$ avec coefficient $c_{n,k,q}$ dans la somme ci-dessus s'annule quand :

$$n + \sum k_j > p. \tag{5}$$

Cela implique en particulier que la somme impliquée dans le Théorème 8 n'a qu'un nombre fini de termes. Cela implique également :

$$\varphi_n = 0, \qquad \text{si} \qquad n > p. \tag{6}$$

On utilise alors le procédé de renormalisation sous la forme de soustraction d'un cobord au cocycle ci-dessus pour éliminer les nombres transcendants qui apparaissent dans le développement de Taylor de la fonction Γ. On obtient ainsi la variante suivante du Théorème 9.

Théorème 10. — *Les énoncés du Théorème 9 sont valables pour le cocycle* φ'_n *donné par la formule :*

$$\varphi'_n(\alpha^0, \ldots, \alpha^n) =$$

$$\sqrt{2\pi i} \sum_{k,q} \frac{(-1)^{|k|}}{k_1! \ldots k_n!}\, \alpha_k\, \frac{1}{q!}\, \sigma_{m-q}(m)\, \tau_q\left(a^0 (da^1)^{(k_1)} \ldots (da^n)^{(k_n)} |D|^{-(2|k|+n)}\right),$$

avec $m = |k| + \frac{n-1}{2}$, $\alpha_k^{-1} = (k_1+1)(k_1+k_2+2) \ldots (k_1+\ldots+k_n+n)$

et σ défini par

$$\prod_{l=0}^{m-1}\left(z+\frac{(2l+1)}{2}\right)=\sum z^j\,\sigma_{(m-j)}\,(m).$$

A. C.

Conférences à l'étranger

1) Non commutative geometry and its applications, conférence d'une semaine à TREST Republique Tchèque, 2 conférences sur le modèle standard ; 5-12 mai 1995.

2) Fields distinguished Lectures, Hecke algebras, type III factors and phase transitions with spontaneous symmetry breaking ; 9, 10 et 11 juin 1995 au Fields Institute (Canada).

3) 3 conférences au séminaire « Cyclic cohomology workshop » du Fields Institute ; 13, 14, 15 juin 1995.

Publications

Non commutative geometry, Academic Press (1994), livre de 700 pages.

A. Connes et C. Rovelli, Von Neumann algebra automorphisms and time-thermodynamics relation in generally covariant quantum theories, *Class. Quantum Grav.* **11** (1994), 2899-2917.

P. Baum, A. Connes et N. Higson, Classifying space for proper actions and K-theory of group C^*-algebras, *Contemporary Math.* Vol. 167 (1994), 241-291.