Analyse et géométrie

M. Alain CONNES, membre de l'Institut
(Académie des Sciences), professeur

Calcul différentiel quantique et groupes quasi Fuchsiens

J'ai montré cette année dans mon cours comment le calcul différentiel quantique permet d'effectuer des calculs impliquant des fonctions non dérivables et pour lesquels la théorie des distributions est inopérante.

1. Calcul différentiel quantique

Soient $\mathcal{A}$ une algèbre involutive, $(\mathcal{H}, F)$ un module de Fredholm sur $\mathcal{A}$. La différentielle quantique da de $a \in \mathcal{A}$ est définie comme le commutateur : $da = [F, a]$. Par hypothèse $F = F^*$ et $F^2 = 1$. De plus $[F, a]$ est un opérateur compact pour tout $a \in \mathcal{A}$. Les opérateurs compacts dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ jouent le même rôle parmi les opérateurs bornés dans $\mathcal{H}$ que les infinitésimaux parmi les nombres complexes. Ils forment un idéal bilatère, filtré par la notion suivante d'*ordre* d'un opérateur compact :

$$T \text{ est d'ordre } \alpha \text{ ssi } \mu_n(T) = O(n^{-\alpha})$$

où $\mu_n(T) = \text{dist}(T, R_n)$, $R_n = \{\text{opérateur de rang} \leqslant n\}$. On a :

$$\text{Ordre } (T_1 + T_2) \geqslant \text{Inf (Ordre } T_1, \text{ Ordre } T_2)$$

$$\text{Ordre } (T_1 T_2) \geqslant \text{Ordre } T_1 + \text{Ordre } T_2.$$

La trace de Dixmier Tr_ω (cf. mon cours 89-90) est une trace positive sur l'idéal bilatère des opérateurs compacts d'ordre $\geqslant 1$, nulle sur l'idéal des opérateurs d'ordre > 1, on a :

$$\text{Tr}_\omega(T) = 0 \text{ si } \mu_n(T) = o(1/n).$$

Cette trace remplace l'intégrale du calcul différentiel ordinaire.

2. Calcul différentiel quantique sur $\mathbb{R}$ et S^1

Il existe une seule manière de quantifier le calcul différentiel sur la droite réelle $\mathbb{R}$, qui soit invariante par translations et homotéties. Elle est décrite ainsi :

L'algèbre $\mathcal{A} = L^\infty(\mathbb{R})$ des fonctions mesurables bornées sur $\mathbb{R}$ agit par multiplications dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$ et l'opérateur F, $F^2 = 1$, est la transformation de Hilbert :

$$(F\xi)(s) = \frac{1}{\pi i}\int \frac{\xi(t)}{s-t}\,dt \qquad \forall s \in \mathbb{R},\ \xi \in L^2(\mathbb{R}).$$

La différentielle quantique $df = [F, f]$ de $f \in \mathcal{A}$ est donnée par le noyau $k(s,t) = \dfrac{1}{\pi i}\,\dfrac{f(s) - f(t)}{s-t}$.

Le groupe $SL(2, \mathbb{R})$ agit par automorphismes du module de Fredholm $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, F)$, par la représentation :

$$(g^{-1}\xi)(s) = \xi\left(\frac{as+b}{cs+d}\right)(cs+d)^{-1}$$

$$\forall s \in \mathbb{R},\ \xi \in L^2(\mathbb{R}) \text{ et } g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL(2, \mathbb{R}).$$

De manière équivalente le module de Fredholm $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, F)$ est donné par :

$$\mathcal{A} = L^\infty(S^1),\ \mathcal{H} = L^2(S^1),\ F\,e_n = \operatorname{sign}(n)\,e_n \quad (\operatorname{sign}(0) = 1)$$

où e_n est la base orthonormale $e_n(\theta) = \exp(2\pi i n\theta)$ $\forall \theta \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ de $L^2(S^1)$.

La taille de df est reliée à la régularité de f par les résultats suivants :

Le plus petit idéal bilatère d'opérateurs compacts est l'idéal R des opérateurs de rang fini et l'on a (Kronecker) :

(1) $\quad df \in R \Leftrightarrow f$ est une fraction rationnelle.

Le plus grand idéal bilatère d'opérateurs est l'idéal k des opérateurs compacts. Avec $f \in L^\infty(S^1)$ on a (Sarazon) :

(2) $\quad df \in k \Leftrightarrow f$ est d'oscillation moyenne nulle.

(Cela signifie que en désignant par $I(f) = \dfrac{1}{|I|}\int_I f\,d\theta$ la valeur moyenne de f sur tout intervalle I, on a pour $a \to 0$ $\quad M_a(f) \to 0$ avec :

$$M_a(f) = \operatorname*{Sup}_{|I| \leqslant a} \frac{1}{|I|}\int_I |f - I(f)|).$$

Soit enfin, pour $p \in [1, \infty[$, $\mathcal{L}^p$ l'idéal de Schatten :

$$\mathcal{L}^p(\mathcal{H}) = \left\{ T \in k \ ; \ \sum_0^\infty \mu_n(T)^p < \infty \right\}.$$

Nous utiliserons le résultat suivant de V.V. Peller :

$$df \in \mathcal{L}^p \Leftrightarrow \iint |f(x+t) - 2f(x) + f(x-t)|^p \, t^{-2} \, dx \, dt < \infty. \tag{3}$$

On obtient par interpolation réelle un résultat analogue par rapport à l'idéal :

$$\mathcal{L}^{(p,\infty)} = \{T \in k, \ \mu_n(T) = O(n^{-1/p})\}.$$

Comme nous le verrons le plus petit réel p tel que $df \in \mathcal{L}^{(p,\infty)}$ est, pour f valeur au bord d'une fonction holomorphe univalente, la dimension de Hausdorff-Minkowski de $f(S^1) \subset \mathbb{C}$. Notre premier résultat concerne les règles de calcul modulo l'idéal fermé $\mathcal{L}_0^{(p,\infty)} \subset \mathcal{L}^{(p,\infty)}$:

$$\mathcal{L}_0^{(p,\infty)} = \{T \in k, \ \mu_n(T) = o(n^{-1/p})\}.$$

Théorème 1. — a) Soient $p \geq 1$, $f \in L^\infty(S^1)$ *telle que* $df \in \mathcal{L}^{(p,\infty)}$ et $g \in C(S^1)$ *on a alors :*

$$g \, df = (df) \, g \quad \mod \mathcal{L}_0^{(p,\infty)}.$$

b) *Soient* $p \geq 1$, $f_1, \ldots, f_n \in L^\infty(S^1)$, $f_j = f_j^*$ *avec* $df_j \in \mathcal{L}^{(p,\infty)}$. *Soient* K *le spectre joint des* f_i *et* $\varphi \in C^\infty(K)$ *une fonction de classe* C^∞ *sur* K. *On a alors :*

$$d\varphi(f_1, \ldots, f_n) = \Sigma \, \partial_j \varphi(f_1, \ldots, f_n) \, df_j \quad \mod \mathcal{L}_0^{(p,\infty)}.$$

c) *Soient* $p > 1$, $f \in C(S^1)$ *telle que* $df \in \mathcal{L}^{(p,\infty)}$ *et* φ *une fonction holomorphe sur* $K =$ Spectre $f = f(S^1)$. *On a :*

$$|d\varphi(f)|^p = |\varphi'(f)|^p \, |df|^p \quad \mod \mathcal{L}_0^{(p,\infty)}.$$

On notera que les fonctions f qui sont traitées dans a) b) c) sont en général non différentiables. Leur dérivée au sens des distributions f' n'est pas une fonction et l'expression $|f'|^p$ n'a aucun sens comme distribution. Cependant l'*opérateur* $|df|^p$ dans l'espace de Hilbert a un sens, tout comme $\Psi \, |df|)$ où Ψ est une fonction mesurable bornée arbitraire d'une variable réelle. Le théorème 1 montre que modulo $\mathcal{L}_0^{(p,\infty)}$ les règles ordinaires du calcul infinitésimal restent valables.

3. Taille de dZ et dimension de Hausdorff de $Z(S^1)$

Soient $\Omega \subset \mathbb{C}$ un domaine de Jordan borné et $C = \partial\Omega$ sa frontière, qui est par hypothèse une courbe de Jordan. Désignons par $Z \in C(S^1)$ l'homéomorphisme de S^1 sur $C \subset \mathbb{C}$ obtenu comme valeur au bord d'une équivalence conforme du disque unité avec Ω. La fonction $Z \in C(S^1)$ n'est déterminée par la donnée de Ω que modulo l'action de $PSL(2, \mathbb{R})$ sur S^1, mais cela ne modifie pas les valeurs caractéristiques $\mu_n(|dZ|)$. La taille de dZ est reliée à la régularité du domaine Ω par l'énoncé suivant :

Théorème 2. — *Soit $p_0 > 1$, il existe $c > 0$ et $C < \infty$ tels que pour tout domaine de Jordan borné Ω, $\partial\Omega = C$, toute équivalence conforme Z :* Disque $\rightarrow \Omega$ *et tout $p \geqslant p_0$ on ait :*

$$c \int_\Omega \operatorname{dist}(z, C)^{p-2}\, dz\, d\bar{z} \leqslant \operatorname{Trace}(|dZ|^p) \leqslant C \int_\Omega \operatorname{dist}(z, C)^{p-2}\, dz\, d\bar{z}.$$

Il résulte du théorème 2 que la borne inférieure de l'ensemble des $p > 1$, tels que $\operatorname{Trace}(|dZ|^p) < \infty$ est la dimension de Minkowski de la courbe de Jordan $C = \partial\Omega$. Considérons par exemple un nombre complexe c tel que $|1 + (1 - 4c)^{1/2}| < 1$ et soit Ω_c l'ouvert défini par l'itération de la transformation $\varphi_c(z) = z^2 + c$, $z \in \mathbb{C}$:

$$\overline{\Omega}_c = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ \{\varphi_c^n(z)\} \text{ borné}\}.$$

La dimension de Minkowski de la courbe de Jordan $\partial\Omega_c$ est égale à sa dimension de Hausdorff et quand c varie on obtient toutes les valeurs $p \in\ ]1, 2[$.

4. Trace de Dixmier et mesure de Hausdorff

Au lieu des ensembles de Julia mentionnés ci-dessus j'ai étudié dans mon cours les domaines Ω qui apparaissent dans l'uniformisation simultanée des surfaces de Riemann. Rappelons d'abord le théorème de L. Bers. Soient Σ_1 et Σ_2 deux surfaces de Riemann du même genre $g > 1$ et supposons avoir choisi une classe d'homotopie d'homéomorphisme $\Sigma_1 \approx \Sigma_2$ qui renverse l'orientation. Il existe alors un sous-groupe discret $\Gamma \subset PSL(2, \mathbb{C})$ unique à conjugaison près dont l'ensemble des points fixes dans $P_1(\mathbb{C})$ a pour adhérence une courbe de Jordan C et dont l'action dans les deux composantes connexes U_1, U_2 du complémentaire de C est propre et libre et uniformise respectivement Σ_1 et $\overline{\Sigma}_2$ (complexe conjuguée de Σ_2). Le choix de l'homéomorphisme $\Sigma_1 \approx \Sigma_2$ correspond à l'isomorphisme $\pi_1(\Sigma_1) = \Gamma = \pi_1(\overline{\Sigma}_2)$. Le groupe Γ est appelé groupe quasi-Fuchsien. Les résultats de R. Bowen montrent que, à part le cas trivial $\Sigma_1 = \overline{\Sigma}_2$, la dimension de Hausdorff de la courbe de Jordan C est strictement comprise entre 1 et 2.

Le résultat essentiel de mon cours, obtenu en collaboration avec D. Sullivan est alors le suivant :

Théorème 3. — *Soient $\Gamma \subset PSL(2, \mathbb{C})$ un groupe quasi-Fuchsien, $C \subset P_1(\mathbb{C})$ son ensemble limite et $Z \in C(S^1)$ la valeur au bord d'une équivalence conforme du disque unité sur la composante bornée du complément* *de C. Alors dZ est d'ordre 1/p, p étant la dimension de Hausdorff de C et il existe une constante* λ, $0 < \lambda < \infty$ *telle que :*

$$\mathrm{Tr}_\omega\,(f(Z)\,|dZ|^p) = \lambda \int f\, d\Delta_p \qquad \forall f \in C\,(C)$$

où Δ_p *est la mesure de Hausdorff p-dimensionnelle de C.*

Le rôle de la trace de Dixmier Tr_ω dans cette formule est remarquable pour la raison suivante. La classe de mesure naturelle sur C en théorie du potentiel est la classe de mesure *harmonique*. Elle s'obtient à partir du problème de Dirichlet dans le domaine borné Ω, $\partial\Omega = C$. Etant donné un point $p \in \Omega$ il lui correspond une mesure de probabilité μ_p sur C obtenue ainsi : si $f \in C\,(C)$ on prolonge f de manière unique en une fonction $\tilde{f}$ harmonique dans Ω on pose alors :

$$\int f\, d\mu_p = \tilde{f}\,(p).$$

Toutes les mesures μ_p obtenues sont deux à deux équivalentes. Il est alors facile de montrer que toute mesure sur C définie à partir de l'espace de Hilbert $\mathcal{H} = L^2\,(S^1)$ par une formule du type :

$$\int f\, \mathrm{d}\mu = \Psi\,(f\,(Z)) \qquad \forall f \in C\,(C)$$

où Ψ est une forme linéaire *normale*, est automatiquement absolument continue par rapport à la mesure harmonique. Or dès que la dimension de Hausdorff p de C est > 1 on montre que la mesure de Hausdorff Δ_p est *disjointe* de la mesure harmonique. Néanmoins la mesure de Hausdorff Δ_p est, grâce au théorème 3, de la forme

$$\int f\, d\Delta_p = \Psi\,(f\,(Z)) \qquad \forall \in C\,(C)$$

avec $\Psi\,(T) = \mathrm{Tr}_\omega\,(T|dZ|^p)$. C'est donc la *non-normalité* de la trace de Dixmier qui permet d'échapper de la classe de mesure harmonique et qui devient un atout. Comme corollaire du théorème 3 on déduit le comportement asymptotique des meilleures approximations rationnelles de l'équivalence conforme Z pour les groupes quasi-Fuchsiens.

Considérons en effet l'ensemble R_n des fractions rationnelles $P(z)/Q(z)$ ayant au plus n pôles hors du disque unité et posons :

$$\mu_n\,(Z) = \mathrm{dist}\,(Z,\ R_n)$$

où la distance est prise pour la norme du sup :

$$\mathrm{dist}\,(f,\ g) = \operatorname*{Sup}_{z \in S^1} |f(z) - g(z)|.$$

On a alors :

Corollaire 4. — *Soient* Γ, C, p *et* Z *comme dans le théorème 3. On a* $\mu_n \sim \lambda^{1/p}\,(\Delta_p(C))^{1/p}\, n^{-1/p}$ *quand* $n \to \infty$.

La valeur de λ est de l'ordre de $(p - 1)^{1/2}$ quand $p \to 1$ et s'annule pour $p = 1$.

A. C.

Conférences

Ecole d'été des Houches 1992 (juillet) : 8 cours de deux heures sur la géométrie non commutative.

Institut DESY à Hambourg 1992 (septembre) : Modèle standard et structure fine de l'espace temps.

Institut Newton à Cambridge (UK) 1992 (octobre) : Modèle standard et structure fine de l'espace temps.

Société Math. Londres 1992 (octobre) : Transition de phases avec brisure spontanée de symétries.

Académie de Lincei Rome 1993 (avril) : Calcul différentiel quantique et groupes quasi-Fuchsiens.

Dept. de Math. Heidelberg 1993 (mai) : Calcul différentiel quantique et groupes quasi-Fuchsiens.

Publications

A. Connes, M. Gromov and H. Moscovici, Group Cohomology with Lipschitz Control and Higher Signatures, *Geometric and Functional Analysis*, Vol. 3, n° 1 (1993), p. 1-78.