Analyse et géométrie

M. Alain CONNES, membre de l'Institut
(Académie des Sciences), professeur

Introduction. — J'ai exploré cette année dans mon cours les liens entre la mécanique statistique quantique et la théorie statistique des nombres premiers. Le point de départ est le lemme 1 ci-dessous et la nouvelle notion d'espace géométrique issue de la géométrie non commutative. Seul l'aspect théorie de la mesure a été étudié et le résultat essentiel est la détermination des états de Gibbs (états vérifiant la condition de Kubo Martin Schwinger) sur la C^* algèbre $\mathcal{H}$ (avec groupe à un paramètre σ_t d'évolution) associée au problème de répartition des nombres premiers. Cette C^* algèbre est l'algèbre de convolution des doubles classes de $P_{\mathbb{Q}}$ relativement au sous-groupe non normal $P_{\mathbb{Z}}$ où P désigne le groupe algébrique des matrices triangulaires. Cette C^* algèbre contient comme sous-algèbre l'algèbre de Hecke (des doubles classes de $GL(2, \mathbb{Q})$ par rapport à $GL(2, \mathbb{Z})$).

Je montre que quand le paramètre β (température inverse) est entre 0 et 1 il y a un seul état KMS_β et qu'il définit un facteur de type III_1. Pour $\beta = 1$ il y a une transition de phase avec brisure spontanée de symétries : l'action du groupe des classes d'idèles sur la C^* algèbre $\mathcal{H}$.

Ces résultats ont été obtenus en collaboration avec J.-B. Bost.

Soit S le foncteur de la catégorie des espaces de Hilbert dans elle-même qui associe à un espace de Hilbert $\mathfrak{h}$ l'espace de Hilbert $S\mathfrak{h} = \oplus S^n\mathfrak{h}$ somme directe des puissances symétriques $S^n\mathfrak{h}$ dotées du produit scalaire tel que :

$$(1) \qquad \langle \xi_1\xi_2\ldots\xi_n, \eta_1\eta_2\ldots\eta_n \rangle = \sum_\sigma \prod_1^n \langle \xi_j, \eta_{\sigma(j)} \rangle$$

où σ parcourt le groupe des permutations de $\{1,\ldots,n\}$. Si T est un opérateur non borné autoadjoint dans $\mathfrak{h}$, ST est l'opérateur non borné autoadjoint tel que

$$(2) \qquad (ST)(\xi_1\ldots\xi_n) = (T\xi_1)\ldots(T\xi_n) \qquad \forall\, \xi_j \in \text{Domaine } T.$$

Si T est traçable et de norme < 1, alors ST est traçable et l'on a

(3) $$\mathrm{Trace}(ST) = \det(1 - T)^{-1}.$$

Pour tout $\xi \in \mathfrak{h}$ on définit un opérateur $b^*(\xi)$ dans $S\mathfrak{h}$ comme la fermeture de l'opérateur de multiplication par ξ :

(4) $$b^*(\xi)\eta = \xi\eta \qquad \forall\, \eta \in S^n\mathfrak{h}.$$

Ces opérateurs et leurs adjoints $b(\xi) = (b^*(\xi))^*$ vérifient les relations de commutation canonique :

(5) $$[b^*(\xi), b(\eta)] = \langle \xi, \eta \rangle \qquad \forall\, \xi, \eta \in \mathfrak{h}.$$

En particulier pour $\mathfrak{h}$ de dimension 1 les opérateurs b^* et b correspondants dans $S\mathfrak{h}$ donnent l'unique représentation irréductible de la relation $bb^* - b^*b = 1$. L'opérateur bb^* admet alors $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{R}$ comme spectre simple et cette écriture caractérise les opérateurs autoadjoints admettant $\mathbb{N}^*$ comme spectre simple.

Le lemme suivant caractérise les opérateurs autoadjoints admettant pour spectre simple le sous-ensemble $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}_+$ formé des nombres premiers. C'est une traduction immédiate du théorème de factorisation d'Euclide.

Lemme 1. — *Soit T un opérateur autoadjoint dans $\mathfrak{h}$. Pour que T admette $\mathcal{P}$ comme spectre simple, il faut et il suffit que ST admette $\mathbb{N}^*$ comme spectre simple.*

L'égalité (3) appliquée à T^{-s}, $Re(s) > 1$, correspond évidemment à la décomposition de la fonction ζ de Riemann en produit Eulérien. Le foncteur S et les relations de commutation canoniques (5) sont les ingrédients essentiels de la deuxième quantification des physiciens théoriciens. Ainsi le lemme 1 suggère de remplacer l'étude du sous-ensemble $\mathcal{P}$ de $\mathbb{R}$ par celle du système dynamique non commutatif constitué par a) l'algèbre (des observables) engendrée par les opérateurs $b(\xi)$, $b^*(\eta)$; $\xi, \eta \in \ell^2(\mathcal{P})$ dans l'espace de Hilbert $\ell^2(\mathbb{N}^*) = S\ell^2(\mathcal{P})$, b) l'évolution σ_t de cette algèbre définie par :

(6) $$\sigma_t(x) = e^{itH_b} x e^{-itH_b} \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

où l'« Hamiltonien » H_b est l'opérateur

(7) $$H_b \varepsilon_n = (\log n)\varepsilon_n$$

dans la base orthonormale canonique ε_n de $\ell^2(\mathbb{N}^*)$. La définition précise de la C^*-algèbre des observables, formée d'opérateurs *bornés* dans $\mathfrak{h}_b = \ell^2(\mathbb{N}^*)$, ainsi que sa structure sont contenues dans la proposition suivante.

Proposition 2. — (1) *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'égalité suivante définit une isométrie μ_n de $\ell^2(\mathbb{N}^*)$ dans $\ell^2(\mathbb{N}^*)$:*

$$\mu_n\, \varepsilon_k = \varepsilon_{kn} \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}^*.$$

(*) ds est une mesure de Haar à gauche sur G.

(2) *La C^*-algèbre $C^*(\mathbb{N}^*)$ engendrée par les opérateurs μ_n, $n \in \mathbb{N}^*$ est le produit tensoriel infini :* $C^*(\mathbb{N}^*) = \bigotimes_{p \in \mathcal{P}} \tau_p$ *des C^*-algèbres τ_p engendrées par μ_p, $p \in \mathcal{P}$.*

(3) *Chaque C^*-algèbre τ_p est isomorphe à la C^*-algèbre de Toeplitz.*

(4) *L'égalité $\sigma_t(x) = e^{itH_b} x e^{-itH_b}$, $x \in C^*(\mathbb{N}^*)$ définit un groupe à un paramètre d'automorphismes de $C^*(\mathbb{N}^*)$.*

Les C^*-algèbres de Toeplitz sont nucléaires, de sorte que la définition du produit tensoriel $\otimes \tau_p$ est non ambiguë. Pour un tel système dynamique non commutatif, une notion essentielle, issue de la mécanique statistique quantique est la suivante.

Définition 3. — *Soient (B, σ_t) une C^*-algèbre unifère munie d'un groupe à un paramètre d'automorphismes, φ un état sur B et $\beta \in]0, \infty[$. On dit que φ vérifie la condition KMS_β relativement à σ_t ssi il existe pour tous x, $y \in B$ une fonction holomorphe $F_{x,y}$ bornée continue au bord dans la bande $\{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Im} z \in [0, \beta]\}$ telle que $F_{x,y}(t) = \varphi(x\sigma_t(y))$* et *$F_{x,y}(t + i\beta) = \varphi(\sigma_t(y)x)$.*

On n'a, en général, ni existence ni unicité d'états KMS_β.

Théorème 4. — (a) *Pour tout $\beta > 0$, il existe un unique état KMS_β sur $C^*(\mathbb{N}^*)$; c'est un produit tensoriel infini $\varphi_\beta = \bigotimes_{p \in \mathcal{P}} \varphi_{\beta,p}$, où $\varphi_{\beta,p}$ est l'état sur l'algèbre de Toeplitz dont la liste des valeurs propres est $\{(1 - p^{-\beta})p^{-n\beta}, n \in \mathbb{N}\}$.*

(b) *Pour $\beta > 1$ l'état φ_β est le type I_∞ et donné par*

$$\varphi_\beta(x) = \zeta(\beta)^{-1} \operatorname{Trace}(e^{-\beta H_b} x) \qquad \forall\, x \in C^*(\mathbb{N}^*).$$

(c) *Pour $\beta = 1$, l'état φ_β est factoriel de type III_1 et donné par :*

$$\varphi_1(x) = \operatorname{Trace}_w(e^{-H_b} x) \qquad \forall\, x \in C^*(\mathbb{N}^*)$$

où Trace_w *est la trace de Dixmier.*

(d) *Pour $0 < \beta \leqslant 1$, l'état φ_β est factoriel de type III_1 et le facteur associé est le facteur d'Araki-Woods R_∞.*

Blackadar avait démontré que φ_1 est factoriel de type III.

Rappelons de plus que la trace de Dixmier d'un opérateur comme $e^{-H}x$ est égale au résidu en $s = 1$, si celui-ci a un sens, de la fonction $s \to \operatorname{Trace}(e^{-sH}x)$. Nous interprétons maintenant la C^*-algèbre $C^*(\mathbb{N}^*)$ en termes adèliques. Soit P le groupe algébrique des matrices triangulaires de la forme $\begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & h \end{bmatrix}$, h inversible. Considérons l'anneau localement compact commutatif A_f

des adèles finies sur $\mathbb{Q}$. Notons R le sous-anneau compact maximal, il est ouvert dans A_f. La proposition suivante identifie $C^*(\mathbb{N}^*)$ à la C^*-algèbre de convolution des fonctions P_R-biinvariantes sur P_{A_f}. Rappelons que si G est un groupe localement compact moyennable, la C^*-algèbre du groupe $C^*(G)$ est la C^*-algèbre engendrée dans l'espace de Hilbert $L^2(G, ds)$ de la représentation régulière gauche de G par l'action de $L^1(G)$ par convolution :

$$(\lambda(f)\xi)(s) = \int_G f(t)\xi(t^{-1}s)dt. \tag{8}$$

Soit ds la mesure de Haar à gauche sur P_{A_f} normalisée par :

$$\int_{P_R} ds = 1. \tag{9}$$

Proposition 5. — (1) *Soient $p \in \mathcal{P}$, $K = \mathbb{Q}_p$, $R = \mathbb{Z}_p$. La fonction caractéristique $1_{P_R} = e$ de l'ouvert $P_R \subset P_K$ définit un idempotent $e \in C^*(P_K)$ et la C^*-algèbre réduite $C^*(P_K)_e$ est canoniquement isomorphe à l'algèbre de Toeplitz τ_p.*

(2) *La C^*-algèbre C^* (P_{A_f}) est le produit tensoriel infini $\bigotimes_{p\in\mathcal{P}} (C^*(P_{\mathbb{Q}_p}), e_p)$.*

(3) *La fonction caractéristique $1_{P_R} = e$ de l'ouvert $P_R \subset P_{A_f}$ définit un idempotent $e \in C^*(P_{A_f})$ et la C^*-algèbre réduite $C^*(P_{A_f})_e$ est canoniquement isomorphe à $C^*(\mathbb{N}^*)$.*

La notion de produit tensoriel infini de couples (B_v, e_v) de C^*-algèbres sans unités et idempotents $e_v = e_v^* \in B_v$ se définit comme limite inductive en utilisant les morphismes $x \to x \otimes e_v$. L'idéal bilatère J engendré par l'idempotent $e \in C^*(P_{A_f})$ n'est pas dense dans $C^*(P_{A_f})$ et les C^*-algèbres considérées ne sont pas équivalentes au sens de Morita. Rappelons qu'un *poids* φ sur une C^*-algèbre B est une application linéaire de $B^+ = \{x \in B \ ; \ x \geqslant 0\}$ dans $[0, +\infty]$. Un poids est dit *semi-fini* ssi $\{x \in B \ ; \ \varphi(x^*x) < \infty\}$ est dense (en norme) dans B et semi-continu inférieurement (s.c.i.) s'il l'est pour la topologie normique sur B^+.

Si G est un groupe localement compact, l'on construit un poids canonique φ sur $C^*(G)$, semi-fini et s.c.i. tel que $\varphi(f) = f(e)$ pour $f \in L^1(G)$ suffisamment régulière. C'est le poids de Plancherel. Quand G n'est pas unimodulaire, ce poids n'est pas une trace. Soit alors Δ le module de G.

$$d(t^{-1}) = \Delta(t)^{-1}dt, \qquad d(ts) = \Delta(s)dt. \tag{10}$$

Le poids de Plancherel φ vérifie la condition KMS_1 relativement au groupe à un paramètre $\sigma_t \in \mathrm{Aut}(C^*(G))$ tel que :

$$\sigma_t(f)(s) = f(s)\Delta(s)^{it} \qquad \forall\, s \in G,\ t \in \mathbb{R}. \tag{11}$$

Les groupes P_K, $K = \mathbb{Q}_p$ et P_{A_f} ne sont pas unimodulaires et le module Δ est donné par l'égalité :

$$\Delta\left(\begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & h \end{bmatrix}\right) = |h| \tag{12}$$

L'idempotent $e \in C^*(P_{A_f})$ (prop. 5) est invariant par le groupe σ_t d'automorphismes modulaires du poids de Plancherel et la restriction de σ_t à l'algèbre réduite $C^*(\mathbb{N}^*) \simeq C^*(P_{A_f})_e$ est identique au groupe d'évolution de la proposition 2.

Théorème 6. — (1) *Pour tout* $\beta > 0$ *il existe (à normalisation près) un unique poids semi-fini s.c.i. et* KMS_β *sur le système dynamique* $(C^*(P_{A_f}), \sigma_t)$.

(2) *Pour* $\beta = 1$, φ_β *est le poids de Plancherel. Le poids* φ_β *est factoriel de type* III_1 *pour* $\beta \in]0, 1]$ *et le facteur associé est le facteur d'Araki-Woods* R_∞.

(3) *La* C^**-algèbre* $C^*(P_{A_f})$ *est canoniquement isomorphe au produit croisé de* $C_0(A_f)$ *par l'action par homothéties du groupe* A_f^* *et pour* $\beta > 1$, *le poids* φ_β *est le poids dual de la mesure* μ_β :

$$\mu_\beta(f) = \zeta(\beta)^{-1} \int_{A_f^*} |j|^\beta f(j) d^*j$$

où d^*j *désigne la mesure de Haar sur* A_f^*. *Ce poids* φ_β *est factoriel de type* $I_\infty (\beta > 1)$.

L'isomorphisme $C^*(P_{A_f}) = C_0(A_f) \rtimes A_f^*$ dépend du choix de l'isomorphisme de Fourier entre A_f et le groupe dual. Pour $f \in C_0(A_f)$ suffisamment régulière la fonction $\beta \to \mu_\beta(f)$ se prolonge en une fonction méromorphe dans $\mathbb{C}$ et l'égalité $\hat{\mu}_\beta = \varphi_\beta$ persiste pour $0 < \beta < 1$.

Etudions maintenant la relation entre les C^*-algèbres $C^*(P_{A_f}) = B$ et $C^*(\mathbb{N}^*) = B_e$ grâce au bimodule Be des fonctions sur P_{A_f}/P_R. Rappelons quelques généralités sur les C^*-modules et les représentations associées. Etant donnée une C^*-algèbre C et un module à droite ε sur C, muni d'une application sesquilinéaire $\varepsilon \times \varepsilon \to C$, notée $\langle \xi, \eta \rangle$; $\xi, \eta \in \varepsilon$, on dit que ε est un C^*-module sur C si les conditions suivantes sont vérifiées :

α) $\langle \xi a, \eta b \rangle = a^* \langle \xi, \eta \rangle b \qquad \forall\, a, b \in C\,;\ \forall\, \xi, \eta \in \varepsilon$

β) $\langle \xi, \xi \rangle \in C^+ \qquad \forall\, \xi \in \varepsilon$

γ) ε est complet pour la norme $\xi \to \| \langle \xi, \xi \rangle \|^{1/2}$.

On note $\mathrm{End}_C(\varepsilon)$ la C^*-algèbre des endomorphismes de ε.

Lemme 7. — *Soient* C *une* C^**-algèbre unifère,* ε *un* C^**-module sur* C, $\sigma_t \in \mathrm{Aut}(C)$ *un groupe à un paramètre d'automorphismes,* φ_β *un état* KMS_β *sur* C, *et* $\mathfrak{h}_{\varphi_\beta}$ *l'espace de Hilbert de la représentation GNS de* C *associée à un* φ_β.

(a) *Soit* $\mathfrak{h}_\beta$ *la complétion de* ε *pour le produit scalaire :* $\langle \xi, \eta \rangle = \varphi_\beta(\langle\langle \xi, \eta \rangle\rangle) \quad \forall\, \xi, \eta \in \varepsilon$.
Alors l'action de $\mathrm{End}_C(\varepsilon)$ *dans* ε *se prolonge par continuité à* $\mathfrak{h}_\beta$.

(b) *Il existe une unique représentation unitaire de* C_0 *dans* $\mathfrak{h}_\beta$ *telle que* $\rho(a)\xi = \xi\sigma_{-i\beta/2}(a) \quad \forall\, \xi \in \varepsilon,\ a \in C$.

La démonstration résulte de l'identification de $\mathfrak{h}$ avec le produit tensoriel de C^* modules $\varepsilon \otimes_C \mathfrak{h}_{\varphi\beta}$.

Considérons alors le C^* module sur $C^*(\mathbb{N}^*)$ obtenu en munissant Be du produit scalaire $\langle \xi, \eta \rangle = \xi^* \eta \in eBe = C^*(\mathbb{N}^*)$, $B = C^*(P_{A_f})$. Pour $\beta \in]0, \infty[$, soit φ_β l'unique état KMS_β sur $C^*(\mathbb{N}^*)$ et $\mathfrak{h}_\beta$ l'espace de Hilbert associé par le lemme 7 au couple $(\varepsilon, \varphi_\beta)$. Le lemme 7 a) montre que la C^*-algèbre $C^*(P_A)$ et donc le groupe P_A sont représentés unitairement dans $\mathfrak{h}_\beta$.

Par construction ε est un espace de fonctions sur l'espace homogène $\Delta = P_{A_f}/P_R$. Pour toute place finie p le quotient $T_p = P_{\mathbb{Q}_p}/P_{\mathbb{Z}_p}$ est l'arbre de $SL(2, \mathbb{Q}_p)$ avec un bout privilégié et Δ est le produit restreint de ces arbres. L'action de P_A sur Δ préserve cette structure. Le sous-groupe $P_\mathbb{Q} \subset P_A$ agit transitivement sur Δ que l'on identifie ainsi à $P_\mathbb{Q}/P_\mathbb{Z}$. Pour tout $\alpha \in \Delta$, soit $\varepsilon_\alpha \in \varepsilon$ la fonction caractéristique de $\{\alpha\} \subset \Delta$.

Lemme 8. — *Soit* $\beta \in]0, +\infty[$. *Les vecteurs* ε_α, $\alpha \in \Delta$, *sont totaux dans l'espace de Hilbert* $\mathfrak{h}_\beta$. *On a* $\| \varepsilon_\alpha \| = 1$ *et le produit scalaire* $\langle \varepsilon_{\alpha'}, \varepsilon_\alpha \rangle$ *est déterminé par la fonction de type positif* $\Psi_\beta(g) = \langle g\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\alpha \rangle_\beta$, $g \in P_\mathbb{Q}$, *donnée par :*

$$\alpha)\ \Psi_\beta(g) = 0 \quad \text{si } g \notin N = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ; n \in \mathbb{Q} \right\}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \Pi p^{-k p \beta} (1 - p^{\beta - 1})(1 - p^{-1})^{-1}$$

où $b = \Pi p^{kp}$ *est la décomposition en facteurs premiers du dénominateur de la fraction irréductible* $n = a/b$.

Pour $\beta = 1$ les vecteurs ε_x, $x \in \Delta$, forment une base orthonormale de $\mathfrak{h}_\beta$, $\beta = 1$ de sorte que $\mathfrak{h}_1 = \ell^2(\Delta)$. En général, la décomposition $\Delta = \cup \Delta_k$, $k \in \mathbb{Q}_+^*$ de Δ en orbites de N : $\Delta_k = N \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \varepsilon_1$ donne une décomposition de $\mathfrak{h}_\beta$ en sous espaces $\mathfrak{h}_{\beta,k}$ deux à deux orthogonaux.

Nous déterminons le commutant de $P_\mathbb{Q}$ dans $\mathfrak{h}_\beta$ grâce à la C^*-algèbre « de Hecke » suivante. Les orbites de l'action de $P_\mathbb{Z}$ à gauche dans $\Delta = P_\mathbb{Q}/P_\mathbb{Z}$ sont finies, leur longueur définit une fonction $\alpha \to \ell(\alpha)$ de Δ dans $\mathbb{N}^*$.

L'algèbre involutive $\mathcal{H}_f$ des fonctions $P_{\mathbb{Z}}$ biinvariantes sur $P_{\mathbb{Q}}$, à support fini dans $P_{\mathbb{Q}}/P_{\mathbb{Z}}$ est définie par :

(a) $(f_1 * f_2)(g) = \sum_{P_{\mathbb{Q}}/P_{\mathbb{Z}}} f_1(g_1)f_2(g_1^{-1}\, g)$

(b) $f^*(g) = \bar{f}(g^{-1})$.

L'algèbre $\mathcal{H}_f$ contient comme sous-algèbre commutative l'algèbre de Hecke des fonctions $PSL(2, \mathbb{Z})$-biinvariantes sur $PGL^+(2, \mathbb{Q})$, car $PGL^+(2, \mathbb{Q})$ agit transitivement sur Δ qui s'identifie à $PGL^+(2, \mathbb{Q})/PSL(2, \mathbb{Z})$.

Pour toute double classe $\gamma \in P_{\mathbb{Z}}\backslash P_{\mathbb{Q}}/P_{\mathbb{Z}}$, soit $\delta(\gamma) = \dfrac{\ell(\gamma)}{\ell(\gamma^{-1})}$ et $e_\gamma \in \mathcal{H}_f$ la fonction caractéristique de $\{\gamma\}$.

Proposition 9. — *Soit* $\beta \in]0, +\infty[$.

1) *L'égalité suivante définit une représentation unitaire* ρ_β *de l'algèbre opposée* $\mathcal{H}_f^{\circ}$ *dans* $\mathfrak{h}_\beta$:
$$\rho_\beta(e_\gamma)\varepsilon_\alpha = \delta(\gamma)^{\beta/2} \sum_{\alpha' \in \alpha\gamma} \varepsilon_{\alpha'}$$

2) $\rho_\beta(\mathcal{H}_f^{\circ})$ *engendre le commutant de l'action de* $P_{\mathbb{Q}}$ *dans* $\mathfrak{h}_\beta$.

3) *La norme de* $\rho_\beta(x)$, $x \in \mathcal{H}_f$ *est indépendante de* β *et définit par complétion une* C^**-algèbre* $\mathcal{H}$ *à laquelle* ρ_β *se prolonge.*

4) *Le vecteur* ε_1 *est séparateur pour* $\rho_\beta(\mathcal{H})''$ *et définit un état* $\varphi_\beta(x) = \langle \rho_\beta(x)\varepsilon_1, \varepsilon_1 \rangle$ *sur* $\mathcal{H}$ *qui est* KMS_β *relativement au groupe d'automorphismes* $\sigma_t \in \mathrm{Aut}(\mathcal{H})$, $\sigma_t(e_\gamma) = \delta(\gamma)^{it} e_\gamma$.

Le sous espace cyclique $\mathfrak{h}_\beta^{(1)} = \overline{\rho_\beta(\mathcal{H})\varepsilon_1}$ est l'espace des vecteurs fixes pour le sous groupe $\mathbb{Z} \subset N \subset P_{\mathbb{Q}}$.

Comme $P_{\mathbb{Q}}$ commute avec $\rho_\beta(\mathcal{H})$, l'action de $\mathbb{Q}^*$ dans $\mathcal{L}(\mathfrak{h}_\beta)$ par automorphismes intérieurs laisse $\rho_\beta(\mathcal{H})$ invariant point par point, de sorte que l'extension de cette action à $A_f^* \subset P_{A_f}$ définit par passage au quotient une action par automorphismes $\theta_j \in \mathrm{Aut}(\mathcal{H})$, indépendante de β, du groupe compact $C = A_f^*/\mathbb{Q}^*$ des classes d'idèles finies. L'action de C sur $\mathcal{H}$ commute avec l'action σ_t de $\mathbb{R}$. La C^*-algèbre $\mathcal{H}^C = \{x \in \mathcal{H} \,;\, \theta_j(x) = x, \forall\, j \in C\}$ des points fixes de C est canoniquement isomorphe à la C^*-algèbre $C^*(\mathbb{N}^*)$. La C^*-algèbre $\mathcal{H}^{\mathbb{R}} = \{x \in \mathcal{H} \,;\, \sigma_t(x) = x, \forall\, t \in \mathbb{R}\}$ est canoniquement isomorphe à la C^*-algèbre $C^*(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ du groupe discret $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Le théorème suivant, montre l'existence d'une transition de phase pour $\beta = 1$, avec brisure spontanée de symétrie, pour le système dynamique non commutatif $(\mathcal{H}, \sigma_t)$.

Théorème 10. — (a) *Pour* $0 < \beta \leqslant 1$, *il existe un unique état* KMS_β *sur* $\mathcal{H}$ *(pour l'évolution* σ_t*) ; cet état est factoriel de type* III_1, *invariant par* C *et sa restriction à* $C^*(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ *est la fonction de type positif* Ψ_β.

(b) *Pour* $\beta > 1$, *les états* KMS_β *sur* $\mathcal{H}$ *et extrémaux sont de type I et paramétrés par les caractères injectifs* $\chi : \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to \mathbb{C}^*$; *la restriction de* $\varphi_{\beta,\chi}$ *à* $C^*(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ *est donnée par l'égalité :*

$$\varphi_{\beta,\chi}(e_\gamma) = \zeta(\beta)^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\beta} \chi(\gamma)^n.$$

L'action du groupe compact C sur l'ensemble des états extrémaux pour $\beta > 1$ est non triviale et est l'action naturelle du groupe de Galois de l'extension abélienne maximale de $\mathbb{Q}$. Pour $\beta = 1$, la représentation de $P_{\mathbb{Q}}$ dans $\mathfrak{h}_1$ est la représentation induite de la représentation triviale de $P_{\mathbb{Z}}$. Qu'elle soit factorielle et de type III a été démontré indépendamment par Binder.

Corollaire 11. — *Pour* $\beta \in]0, 1]$ *la représentation de* $P_{\mathbb{Q}}$ *dans* $\mathfrak{h}_\beta$ *est factorielle de type* III_1. *Elle est réductible et de type* I_∞ *pour* $\beta > 1$.

Bien que l'étude ci-dessus soit limitée à l'aspect « théorie de la mesure » du système dynamique non commutatif $(\mathcal{H}, \sigma_t)$, l'opérateur H_b admet une racine carrée supersymétrique D qui permet de définir sur $\mathcal{H}$ un module θ-sommable et d'en définir la géométrie non commutative. J'étudierai ultérieurement cette géométrie ainsi que l'analogue des résultats ci-dessus pour un corps global arbitraire.

Publication

On the Chern Character of θ Summable Fredholm Modules, *Commun. Math. Phys.* 139, 171-181 (1991).

Produits Eulériens et facteurs de type *III* (avec J.-B. Bost), *C.R.A.S.*, t. 315, Série I, p. 279-289 (1992).

Conférences

Juillet 1991, Cargèse, Ecole d'Eté : New symmetries in physics.

Juillet 1991, Congrès IAMP, Leipzig : Le modèle standard et l'espace temps.

Novembre 1991, Lausanne, Conférence en l'honneur de G. de Rham : L'aspect métrique en géométrie non commutative.

Juin 1992, Heidelberg : Produits Eulériens et facteurs de type *III*.

Juin 1992, Strasbourg : Produits Eulériens et facteurs de type *III*.

Juin 1992, Cambridge (Angleterre) : Produits Eulériens et facteurs de type *III*.