Analyse et géométrie

M. Alain CONNES, membre de l'Institut (Académie des Sciences), professeur

Mon cours cette année étudiait l'aspect « géométrie différentielle » des espaces généralisés tels que l'espace des feuilles d'un feuilletage. Les aspects « théorie de la mesure » et « topologie » avaient été explorés pendant le cours de 84-85. Le plan est le suivant ;

I. Cycle sur une algèbre
II. Cohomologie cyclique
III. Cohomologie cyclique de l'algèbre d'un feuilletage
IV. Traduction cohomologique du théorème de l'indice longitudinal et classes secondaires

I. *Cycle sur une algèbre*

On appelle *cycle* abstrait de degré n la donnée d'une algèbre (sur $\mathbb{C}$) différentielle graduée $\Omega = \Omega^\circ \oplus \ldots \oplus \Omega^n$ dont la différentielle d vérifie $d^2 = 0$, et d'une trace graduée *fermée* : $\Omega^n \to \mathbb{C}$, notée $\int$. On a donc les propriétés suivantes :

a) $d(\omega\omega') = (d\omega)\,\omega' + (-1)^{\partial\omega}\,\omega d\omega'$,

b) $d^2 = 0$,

c) $\int \omega_2\omega_1 = (-1)^{\partial\omega_1\partial\omega_2} \int\omega_1\omega_2$ et

d) $\int d\omega = 0$

Soit A une algèbre (sur $\mathbb{C}$), on appelle cycle sur A la donnée d'un cycle $(\Omega, d, \int)$ et d'un homomorphisme ρ de A dans Ω°. Nous dirons qu'un cycle sur A est réduit si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

1) Ω est l'algèbre différentielle engendrée par ρ (A)

2) Si $\omega \in \Omega$ et $\int\omega\omega' = 0 \quad \forall\omega' \in \Omega \quad$ alors $\omega = 0$

DÉFINITION 1. *Le caractère d'un cycle sur* A *est la fonctionnelle multilinéaire*

$\tau(a^\circ, a^1, \ldots, a^n) = \int \rho(a^\circ)\, d\rho(a^1) \ldots d\rho(a^n) \qquad \forall a^i \in A$

Tout cycle à même caractère qu'un cycle réduit canoniquement associé et deux cycles réduits ayant même caractère sont isomorphes.

PROPOSITION 2. *Soit* τ *une fonctionnelle* n + 1 *linéaire sur* A *; pour que* τ *soit le caractère d'un cycle il faut et il suffit qu'elle vérifie les deux conditions suivantes :*

α) $\tau(a^1, \ldots, a^n, a^\circ) = (-1)^n \ \tau(a^\circ, \ldots, a^n) \qquad \forall a^i \in A$

β) $\sum_o^n (-1)^j\, \tau(a^\circ, \ldots, a^j a^{j+1}, \ldots, a^{n+1}) + (-1)^{n+1}\, \tau(a^{n+1} a^\circ, \ldots, a^n) = 0$

$\forall a^i \in A$

EXEMPLES. 1) Soient M une variété compacte orientée de classe C^∞, $A = C^\infty(M)$ l'algèbre des fonctions C^∞ à valeurs complexes et posons, avec $n = \dim M$,

$\tau(f^\circ, \ldots, f^n) = \int f^\circ df^1 \wedge df^2 \wedge \ldots \wedge df^n \qquad \forall f^i \in C^\infty(M)$

Si les f^i sont réelles, $f^i = f^{i*}$, la valeur de τ coincide avec le volume orienté de l'intérieur de $f(M) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ où $f(x) = (f^\circ(x), \ldots, f^n(x))\ \forall\, x \in M$. L'unique cycle réduit sur $A = C^\infty(M)$ de caractère τ est le cycle défini par le complexe de Rham : $\Omega^j = C^\infty(M, \wedge^j T^*(M))$ avec la différentielle ordinaire.

2) Prenons $A = \mathbb{C}$ et $\sigma(\lambda_o, \lambda_1, \lambda_2) = \lambda_o \lambda_1 \lambda_2$. Comme σ vérifie α)β) de la proposition 2 c'est le caractère d'un cycle réduit Ω, on a $\Omega^\circ = \mathbb{C}$, $\Omega^1 = \mathbb{C}^2$, $\Omega^2 = \mathbb{C}^2$.

3) Soit H un espace de Hilbert munie d'une structure de A — module à gauche i.e. un homomorphisme de A dans l'algèbre des opérateurs bornés L (H).

Soit $F \in L(H)$ tel que $F^2 = 1$ et posons :

$\Omega^j = \{\Sigma a^\circ [F, a^1] \ldots [F, a^j]\ ;\ a^\circ, \ldots, a^j \in A\}$

On définit $d : \Omega^j \to \Omega^{j+1}$ par $d\omega = F\omega - (-1)^j \omega F$. Comme $F^2 = 1$ on a $d^2 = 0$. De plus $\Omega = \oplus\, \Omega^j$ est une algèbre différentielle graduée. Soit $p \in [1, \infty[$ et soit $L^p(H)$ l'idéal de Schatten dans L (H) des opérateurs compacts T tels que $\Sigma \lambda_n (|T|)^p < \infty$ où (λ_n) est la suite des valeurs propres de la valeur absolue de T. Supposons que :

(*) $\qquad [F, a] \in L^p(H) \qquad \forall a \in A$

Pour tout n entier impair $n \geq p$ l'égalité suivante définit un cycle sur A

$\int \omega = \text{Trace}(\omega) \qquad \forall \omega \in \Omega^n$

4) Soient M une variété de classe C^∞ et $\Gamma \subset \mathrm{Diff}^+(M)$ un groupe de difféomorphismes qui préservent l'orientation. Considérons l'algèbre A produit croisé de l'algèbre $C_c^\infty(M)$ des fonctions C^∞ à support compact, par le groupe Γ. Cela signifie que l'on munit $A = C_c^\infty(M \times \Gamma)$ du produit :

$$(f_1 * f_2)(x, g) = \sum_{g_1 g_2 = g} f_1(x, g_1)\, f_2(x g_1, g_2) \qquad \forall (x, g) \in M \times \Gamma$$

On peut former de la même manière le produit croisé $\Omega^j \times \Gamma$ où Ω^j est l'espace des formes différentielles de degré j sur M et Γ agit sur Ω^j par changement de variables. On définit d en posant $d(\Sigma\, \omega_g U_g) = \Sigma\, (d\omega_g)\, U_g$ où $U_g(x, g') = 0$ si $g' \neq g$ et $U_g(x, g) = 1\ \forall x \in M$. L'invariance de l'intégrale des formes différentielles par changement de variables montre que l'égalité suivante définit un cycle sur A :

$$\int \omega = \int_M \omega(x, e) \text{ où } e \text{ est l'unité de } \Gamma$$

5) Soient A une algèbre de Banach, G un groupe de Lie et $g \to \alpha_g \in \mathrm{Aut}\, A$ une action continue de G sur A (i.e. $g \to \alpha_g(x)$ est continue pour tout $x \in A$). Posons $A = \{x \in A \,;\, g \to \alpha_g(x) \text{ est de classe } C^\infty\}$ et $\Omega^j = A \otimes \wedge^j(\mathrm{Lie}\, G)$ muni de la structure d'algèbre produit tensoriel de A par l'algèbre extérieure. Un élément ω de Ω^j est une forme multilinéaire alternée de Lie G à valeurs dans A. On définit d par l'égalité :

$$d\omega(X_1, \ldots, X_{j+1}) = \sum_{i=1}^{j+1} (-1)^i X_i \omega(X_1, \ldots, \check{X}_i, \ldots, X_{j+1}) + \sum_{i<j} (-1)^{i+j}$$
$$\omega([X_i, X_j], X_1, X_2, \ldots, X_{j+1})$$

où pour $a \in A$, $X \in \mathrm{Lie}\, G$ avec $g(\epsilon) = \exp \epsilon X$ on a $Xa = (g(\epsilon)(a))'_{\epsilon=0}$. On obtient ainsi une algèbre différentielle graduée (Ω, d). De plus, si τ est une trace α invariante sur A et si $\rho \in \wedge^k \mathrm{Lie}\, G$ est cofermé, la fonctionnelle $\int = \tau \otimes \rho$ sur Ω^k est fermée et définit un cycle sur A.

II. *Cohomologie cyclique*

Soient A une algèbre sur $\mathbb{C}$ et M un bimodule sur A. La cohomologie de Hochschild $H^*(A, M)$ est la cohomologie du complexe $(C^n(A, M), b)$ où $C^n(A, M)$ est l'espace des applications n-linéaires de $A \times \ldots \times A$ dans M et :

$$(bT)(a^1, \ldots, a^{n+1}) = a^1 T(a^2, \ldots, a^{n+1}) + \sum_1^n (-1)^j T$$
$$(a^1, \ldots, a^j a^{j+1}, \ldots, a^{n+1}) + (-1)^{n+1} T(a^1, \ldots, a^n)\, a^{n+1}$$

Considérons le bimodule A^*, espace des formes linéaires φ sur A, avec :

$$(a\varphi b)(x) = \varphi(bxa) \qquad \forall a, b, x \in A$$

Toute forme n + 1 linéaire τ sur A définit un élément de $C^n(A, A^*)$ par l'égalité $\tilde{\tau}(a^1, \ldots, a^n)(a) = \tau(a, a^1, \ldots, a^n)$. On note $C^n_\lambda(A)$ l'espace des formes n + 1 linéaires τ sur A telles que :

$$\tau(a^1, \ldots, a^n, a^0) = (-1)^n \tau(a^0, \ldots, a^n) \quad \forall a^i \in A$$

On identifie C^n_λ à un sous-espace de $C^n(A, A^*)$ par l'application $\tau \to \tilde{\tau}$.

LEMME 3. 1) *Pour que τ soit le caractère d'un cycle il faut et il suffit que $\tau \in C^n_\lambda$ et que $b\tau = 0$.*

2) *Pour tout $\varphi \in C^n_\lambda$ on a $b\varphi \in C^{n+1}_\lambda$.*

Par définition la cohomologie du complexe (C^n_λ, b) est la *cohomologie cyclique de* A, notée $H^n_\lambda(A)$.

Etant donnés deux cycles $(\Omega, d, \int)$ et $(\Omega', d', \int')$ leur produit tensoriel est obtenu à partir du produit tensoriel des algèbres différentielles graduées et du produit tensoriel des traces graduées $\int$ et $\int'$.

PROPOSITION 4. *Soient* A *et* B *deux algèbres. Le caractère du produit tensoriel de cycles sur* A *et* B *ne dépend que du caractère de ces cycles : $\tau'' = \tau \# \tau'$. Cette opération définit par passage au quotient une application bilinéaire :*

$$H^n_\lambda(A) \times H^m_\lambda(B) \to H^{n+m}_\lambda(A \otimes B)$$

Pour l'algèbre triviale $A = \mathbb{C}$ il est immédiat que $H^n_\lambda = 0$ si n est impair et $H^n_\lambda = \mathbb{C}$ si n est pair, de plus l'algèbre H^*_λ est engendré par σ (cf. ex. 2).

COROLLAIRE 5. *Pour toute algèbre* A *l'opération $\tau \to \tau \# \sigma = S(\tau)$ définit une application linéaire* S *de $H^n_\lambda(A)$ dans $H^{n+2}_\lambda(A)$.*

Cobordisme des cycles et opérations S, B, I

Considérons une algèbre différentielle (Ω, d), $\Lambda = \bigoplus_{0}^{n+1} \Omega^j$ munie d'une trace graduée de degré n + 1 ; $\omega \in \Omega^{n+1} \to \tau(\omega) \in \mathbb{C}$. L'égalité $\int \omega = \tau(d\omega)\ \forall \omega \in \Omega^n$ définit alors une trace graduée *fermée* de degré n sur Ω, le cycle associé est le *bord* de la chaine (Ω, d, τ).

DÉFINITION 6. *Soient* A *une algèbre* $(\Omega, d, \int)$ *et* $(\Omega', d', \int')$ *deux cycles sur* A, Ω *et* Ω' *sont cobordant s si le cycle* $\Omega \ominus \Omega'$ *est le bord d'une chaine.*

Considérons les opérateurs suivants sur $C(A, A^*)$:

1) $A : C^n \to C^n$, $A\varphi = \sum_\Gamma \epsilon(\sigma) \varphi^\sigma$ où Γ est le groupe des permutations cycliques de n + 1 objets et $\epsilon(\sigma)$ la signature de σ

2) $D : C^n \to C^n$, $D\varphi = \varphi - \epsilon(\lambda) \varphi^\lambda$ où λ est le générateur du groupe Γ

3) $b : C^n \to C^{n+1}$, $b\varphi(x^\circ, \ldots, x^{n+1}) = \sum_{o}^{n} (-1)^j \varphi(x^\circ, \ldots, x^j x^{j+1}, \ldots, x^{n+1}) + (-1)^{n+1} \varphi(x^{n+1} x^\circ, \ldots, x^n)$

4) $b' : C^n \to C^{n+1}$, $b'\varphi(x^\circ, \ldots, x^{n+1}) = \sum_{o}^{n} (-1)^j \varphi(x^\circ, \ldots, x^j x^{j+1}, \ldots, x^{n+1})$

5) $s : C^n \to C^{n+1}$, $s\varphi(x^\circ, \ldots, x^{n-1}) = (-1)^{n-1} \varphi(x^\circ, \ldots, x^{n-1}, 1)$

LEMME 7. *On a* $DA = AD = 0$, $b^2 = b'^2 = 0$, $Ab' = bA$, $Db = b'D$, $b's + sb' = 1$

2) *Posons* $B = AsD$ alors $B^2 = 0$ et $Bb = -bB$

Par construction l'image de $B = AsD$ est dans le noyau C^{n-1}_λ de D, i.e. $BC^{n+1}(A, A^*) \subset C^n_\lambda(A)$, de plus comme $Bb = -bB$ on a $BZ^{n+1} \subset Z^n_\lambda$.

THÉORÈME 8. *Deux cycles sur* A *sont cobordants ssi leurs caractères* τ et τ' *vérifient* $\tau - \tau' \in BZ^{n+1}(A, A^*)$.

Ce résultat détermine l'homologie de l'espace des traces graduées sur l'algèbre différentielle graduée universelle $(\Omega(A), d)$ engendrée par A. Pour tout n, C^n_λ est un sous espace de $C^n(A, A^*)$, de plus (C^*_λ, b) est un sous-complexe de $(C^*(A, A^*), b)$ on obtient ainsi un homomorphisme I de complexes.

THÉORÈME 9. *Pour toute algèbre* A *sur* $\mathbb{C}$ *on a la longue suite exacte :*

$$\xrightarrow{I} H^n(A, A^*) \xrightarrow{B} H^{n-1}_\lambda(A) \xrightarrow{S} H^{n+1}_\lambda(A) \xrightarrow{I} H^{n+1}(A, A^*) \xrightarrow{B} \ldots$$

Cette suite exacte permet de calculer la cohomologie cyclique de A à partir de la cohomologie de Hochschild $H^n(A, A^*)$ et de l'opérateur $I \circ B : H^n(A, A^*) \to H^{n-1}(A, A^*)$. On utilise le bicomplexe suivant, ou bicomplexe (b,B).

$C^{n,m} = C^{n-m}(A, A^*)$, $d_1 = b$, $d_2 = B$

La suite spectrale associée à la première filtration : $n \geq n_o$ n'est pas convergente et le lemme fondamental est la nullité de son terme E_1. La deuxième suite spectrale converge vers $\varinjlim (H^n_\lambda(A), S)$, appelée cohomologie cyclique périodique de A. Son terme E_1 est donné par le complexe $(H^n(A, A^*), I \circ B)$. Enfin on a un accouplement canonique entre la cohomologie cyclique périodique $H^{pair}(A) = \lim (H^{2n}_\lambda(A), S)$ et le groupe de K théorie algébrique $K_o(A)$.

PROPOSITION 10. *Il existe un unique accouplement bilinéaire* $<\ ,\ >$ *entre* $H^{\text{pair}}(A)$ *et* $K_0(A)$ *tel que* :

$$< \tau, e > = \frac{1}{m\,!}\, \tau_q (e, \ldots, e) \qquad \forall \tau \in Z^{2m}_{\lambda}(A),\ e \in \operatorname{Proj}(M_q(A))$$

où τ_q *est le produit de* τ *par la trace sur* $M_q(\mathbb{C})$.

On définit de manière analogue un accouplement entre $H^{\text{impair}}(A)$ et $K_1(A)$.

REMARQUE 1. *Si* A *est une algèbre localement convexe et si l'on ne considère que les formes multilinéaires continues sur* A *tous les résultats ci-dessus restent valables.*

EXEMPLE 12. Soient M une variété compacte et $A = C^{\infty}(M)$ l'algèbre des fonctions de classe C^{∞}. La cohomologie de Hochschild $H^q(A, A^*)$ (en considérant seulement les formes multilinéaires continues) s'identifie à l'espace A_q des courants de dimension q sur M. Au courant C correspond la cochaine φ_C,

$$\varphi_C (f^0, \ldots, f^q) = < C\ , f^0 df^1 \wedge \ldots \wedge df^q > \qquad \forall f^i \in A$$

L'opérateur $I \circ B : H^q \to H^{q-1}$ s'identifie au bord de de Rham et on a

$$H^q_\lambda (A) = \{\text{Courants de dimension } q, \text{fermés}\} \oplus H_{q-2}(M, \mathbb{C}) + H_{q-4}(M, \oplus \ldots$$

$$H^{\text{pair}}(A) = H_{\text{pair}}(M, \mathbb{C}),\ H^{\text{impair}}(A) = H_{\text{impair}}(M, \mathbb{C})$$

III. *Cohomologie cyclique de l'algèbre d'un feuilletage*

Soient (V, F) une variété feuilletée et $A = C^{\infty}_c(G)$ l'algèbre de convolution des densités d'ordre $\frac{1}{2}$ le long des feuilles qui sont de classe C^{∞}_c sur le graphe G de (V, F). La cohomologie cyclique périodique $H^*_{per}(A)$ s'identifie à la cohomologie du bicomplexe (b, B) construit à partir de A. Le résultat principal est la construction d'un homomorphisme canonique « de localisation » λ de $H^*_{per}(A)$ vers la cohomologie $H^*(V, \mathbb{C})$ tordue par l'orientation du fibré transverse τ.

A tout ouvert U de V on associe le feuilletage F_U restriction de F à U et donc la sous-algèbre $C^{\infty}_c(G_U)$ de A, notée A (U). On a un homomorphisme d'inclusion $A(U) \subset A(U')$ pour $U \subset U'$ et on obtient ainsi un préfaisceau Γ_n pour tout n, avec :

$$\Gamma_n (U) = C^n (A(U), A(U)^*)$$

Comme les inclusions sont des homomorphismes d'algèbres, on obtient un bicomplexe (b, B) de préfaisceaux sur V, et donc un complexe triple (b, B, δ)

associé à tout recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ de V, où δ est le cobord de Cech. On choisit $\mathcal{U}$ suffisamment fin pour que tout $U \in \mathcal{U}$ soit un domaine de carte feuilletante. On utilise alors :

1) L'équivalence (au sens de Morita) de l'algèbre A (U) avec $C_c^\infty(U/F)$ où U/F désigne l'espace (séparé) des feuilles de la restriction de F à U.

2) Les résultats de l'exemple 12 pour construire un autre complexe triple Γ ayant même cohomologie que (b, B, δ). Pour $k = 0, 1, \ldots, q = \text{Codim } F$, soit Ω_k le faisceau sur V des courants transverses invariants par holonomie : pour tout ouvert U, $\Omega_k(U)$ est le noyau de la différentielle longitudinale dans l'espace $C^{-\infty}(U, \Lambda^{q-k}\tau^*)$ des sections généralisées du fibré $\Lambda^{q-k}\tau^*$ où τ^* est le dual du fibré transverse τ.

On pose $\Gamma^{n,m,p} = \bigoplus_{U_i \in \mathcal{U}} \Omega_{n-m}(U_0 \cap \ldots \cap U_p)$ et on munit Γ des 3 différentielles $d_1 = 0$, $d_2 =$ bord de de Rham, $d_3 =$ cobord de Cech.

THÉORÈME 13. *Tout sous-fibré* $H \subset TV$ *supplémentaire à* F *(mais non nécessairement intégrable) détermine un morphisme* ρ_H *du complexe triple* (Γ, d_i) *vers* (C, (B, b, δ)) *qui est un isomorphisme en cohomologie, indépendant de H.*

La cohomologie du complexe triple Γ est très facile à déterminer car $d_1 = 0$ et le complexe de faisceaux (Ω_n, bord de de Rham) est une résolution du faisceau ϵ localement constant d'orientation du fibré transverse. Il en résulte que $H^n(\Gamma) = \bigoplus H^{n-2r+q}(V, \epsilon)$ où $q = \text{Codim } F$. De plus, la filtration de $H^n(\Gamma)$ associée à la deuxième suite spectrale du complexe triple Γ correspond à la filtration de $H^*(V, \epsilon)$ associée à la première suite spectrale du bicomplexe (Ω ; bord de de Rham, δ).

COROLLAIRE 14. 1) *Soit* $(C^{n,m}_{\text{loc}}, b, B)$ *le bicomplexe des sections globales des faisceaux associés aux préfaisceaux* $U \to C^{n,m}(A(U))$. *La cohomologie* H^p_{loc} *de ce bicomplexe est canoniquement isomorphe à* $\bigoplus_r H^{p-2r+q}(V, \epsilon)$.

2) *Il existe un homomorphisme canonique* λ_V *de la cohomologie cyclique périodique* $H^p(A) \xrightarrow{\lambda_V} \bigoplus_r H^{p-2r+q}(V, \epsilon)$.

De plus la filtration naturelle de $H^*(A)$ correspond à la filtration ci-dessus de $H^*(V, \epsilon)$.

IV. *Traduction cohomologique du théorème de l'indice longitudinal et classes secondaires*

Soient (V, F) une variété compacte feuilletée, et D un opérateur différentiel longitudinalement elliptique. La construction d'une paramétrix pour D modulo l'algèbre $A = C_c^*(\text{Graphe}(V, F))$ (cf. Section III) lui associe un unique élément de $K_0(A)$ qui ne dépend que de la classe de K théorie du symbole longitudinal σ_D de D. Rappelons (cf. Section II) l'existence d'un accouplement canonique entre cohomologie cyclique périodique $H^{\text{pair}}(A)$ et $K_0(A)$. Le résultat principal est le suivant :

THÉORÈME 15. *Pour tout cocycle cyclique pair* φ *sur* A *on a :*

$$< \varphi, \text{Ind}_a(D) > \, = \, < \lambda_V(\varphi), \text{Td}(F_{\mathbb{C}}) \, \text{ch} \, \sigma_D >$$

où $\text{Td}(F_{\mathbb{C}}) \in H^*(V)$ *est le genre de Todd du complexifié du fibré* F.

La fin du cours a utilisé les résultats du cours 84-85, la cohomologie de Gelfand-Fuchs et le théorème 15 ci-dessus pour démontrer :

THÉORÈME 16. *Soit* (V, F) *une variété de dimension 3 feuilletée par un feuilletage de codimension 1 et* $GV \in H^*(V)$ *la classe de Godbillon-Vey. Si* $GV \neq 0$ *le flot des poids de l'algèbre de von Neumann du feuilletage a une mesure de probabilité invariante, et l'algèbre de von Neumann a une composante non triviale de type III.*

A. C.