Analyse et géométrie

M. Alain CONNES, membre de l'Institut (Académie des Sciences), professeur

J'ai expliqué dans ma leçon inaugurale comment les notions classiques de 1) la théorie de la mesure ; 2) la topologie des espaces localement compacts et 3) la théorie des courants de de Rham sont remplacées dans le cas non commutatif par 1) les algèbres de von Neumann ; 2) les C^* algèbres ; 3) la cohomologie cyclique. J'ai suivi un plan analogue dans mon cours et faute de temps je n'ai pu traiter que 1) et 2). J'ai donc commencé par la théorie modulaire des algèbres de von Neumann. Comme il ne s'agissait pas d'un public de spécialistes mon but, dans cette partie du cours, était de traiter entièrement la théorie modulaire, avec toutes les démonstrations, dans le cas où l'algèbre de von Neumann M est construite à partir d'une situation géométrique : action d'un groupe par difféomorphismes ou variété feuilletée. On peut dans ce cas, décrire explicitement l'élément générique de M, ainsi que tous les états normaux fidèles sur M de sorte que l'on peut calculer directement tous les groupes d'automorphismes modulaires et vérifier tous les résultats de la théorie modulaire. Dans la deuxième partie du cours j'ai montré comment la C^* algèbre associée à un feuilletage s'introduit de manière nécessaire quand on étudie les propriétés spectrales des opérateurs différentiels sur les variétés non compactes feuilles d'un feuilletage de variété compacte. J'ai ensuite introduit la classe d'Euler longitudinale d'un feuilletage arbitraire comme élément de $K_0(C^*(V, F))$ et montré son invariance par homotopie longitudinale. Le cours s'est terminé avec le théorème de l'indice longitudinal [à valeurs dans $K_0(C^*(V, F))$] et son corollaire pour les feuilletages avec mesure transverse.

I. *Théorie modulaire*

Le but ici est de donner un sens concret aux objets mathématiques fondamentaux de la théorie non commutative de la mesure, tels que 1) algèbres de von Neumann ; 2) états normaux fidèles ; 3) groupes d'automorphismes modulaires ; 4) dérivée de Radon Nikodym.

Soient V une variété, Γ un groupe discret agissant par difféomorphismes sur V. On fait l'hypothèse suivante :

(*) Pour tout $g \in \Gamma$, $g \neq 1$, l'ensemble $\{x \in V,\ gx = x\}$ est négligeable.

Soient X l'ensemble $X = V/\Gamma$ et $p : V \to X$ la projection. On pose $H_\alpha = \ell^2(p^{-1}(\alpha))$ pour tout $\alpha \in X$. Par construction H_α a pour base orthonormale les ϵ_x ; $x \in V$, $p(x) = \alpha$.

Définition. Un opérateur aléatoire $A = (A_\alpha)_{\alpha \in X}$ est une famille $A_\alpha \in \mathcal{L}(H_\alpha)$ d'opérateurs bornés, telle que la fonction :

$$a(x, y) = \langle A_{p(x)}\, \epsilon_x, \epsilon_y \rangle \ ; \quad x, y \in V,\ p(x) = p(y)$$

soit mesurable.

On pose $\|A\| = \text{Sup ess. } \|A_\alpha\|$

Proposition. Soit M l'algèbre involutive des classes (modulo l'égalité presque partout) d'opérateurs aléatoires bornés, munie des opérations :

$$(A + B)_\alpha = A_\alpha + B_\alpha,\ (A^*)_\alpha = A^*_\alpha,\ (AB)_\alpha = A_\alpha B_\alpha$$

C'est une algèbre de von Neumann.

De plus le centre de M s'identifie à l'algèbre commutative $L^\infty(X)$ où X est muni de l'image de la classe de Lebesgue.

Exemples. a) $V = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $\Gamma = \mathbb{Z}$ et $g \cdot x = x + g\theta$ où θ est fixé, $\theta \notin \mathbb{Q}$, alors M est le facteur hyperfini de type II_1.

b) $V = P_1(\mathbb{R})$, $\Gamma = PSL(2, \mathbb{Z})$ agissant par transformations homographiques. Alors M est le facteur hyperfini de type III_1.

Notation. On note $M = L^\infty(V) \rtimes \Gamma$.

On appelle forme quadratique sur un espace de Hilbert H la donnée d'une application q de H dans $[0, +\infty]$ telle que :

a) $q(\xi + \eta) + q(\xi - \eta) = 2q(\xi) + 2q(\eta) \quad \forall\, \xi, \eta \in H$

b) $q(\lambda\, \xi) = |\lambda|^2\, q(\xi)\ \ \forall\, \xi \in H,\ \lambda \in \mathbb{C}$

On suppose de plus que $\text{Dom}\, q = \{\xi \in H,\ q(\xi) < \infty\}$ est dense dans H et que q est semi-continue inférieurement.

Définition. On appelle *forme aléatoire* la donnée d'une famille $(q_{\alpha, \nu})$, $\alpha \in X$, $\nu \in \Lambda^n T_\alpha(X)$ (*) de formes quadratiques sur H_α telle que :

1) $q_{\alpha, \lambda\nu} = |\lambda|\, q_{\alpha, \nu} \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}$

2) $x \mapsto q_{p(x), \nu(x)}(\xi_x)$

est mesurable pour tous $x \mapsto \nu(x)$ et $x \mapsto \xi_x$ mesurables.

On pose alors :

$$\int q = \int_V q_{p(x)}\,(\epsilon_x)$$

On démontre de manière élémentaire le résultat suivant ;

THÉORÈME. 1) Soit q une forme aléatoire et pour tout (α, ν) soit $T_{\alpha,\nu}$ l'opérateur positif (non borné) associé à $q_{\alpha,\nu}$. L'égalité suivante définit, si $\int q = 1$, un état φ_q sur M :

$$\varphi_q\,(A) = \int_V \langle A_{p(x)}\, T^{1/2}_{p(x)}\, \epsilon_x,\ T^{1/2}_{p(x)}\, \epsilon_x \rangle \qquad \forall\, A = (A_\alpha) \in M$$

2) $q \mapsto \varphi_q$ est une bijection entre formes aléatoires q, $\int q = 1$, et états normaux sur M.

3) φ_q est fidèle ssi $T_{\alpha,\nu}$ est non singulier pour presque tout α.

LEMME. Soient M une algèbre de von Neumann et φ un état normal fidèle sur M. Il existe au plus un groupe à un paramètre d'automorphismes σ_t de M vérifiant la condition suivante (K.M.S.).

$\forall x,\ y \in M$, $\exists$ F holomorphe bornée dans $\{z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Im}\, z \in [0,\ 1]\}$ avec $F\,(t) = \varphi\,(\sigma_t\,(x)\, y)$, $F\,(t + i) = \varphi\,(y\, \sigma_t\,(x))$ $\forall t \in \mathbb{R}$.

On dit alors que σ_t est le groupe d'automorphismes modulaires σ_t^φ de φ.

THÉORÈME. Soit $M = L^\infty\,(V) \rtimes \Gamma$.

a) Pour tout état normal fidèle $\varphi = \varphi_q$ sur M, le groupe d'automorphismes modulaires σ_t^φ est donné par :

$$(\sigma_t^\varphi\,(A))_\alpha = T^{it}_{\alpha,\nu}\, A_\alpha\, T^{-it}_{\alpha,\nu} \quad \forall\, A = (A_\alpha) \in M$$

b) Pour tout couple φ, φ' d'états normaux fidèles, il existe un 1-cocycle canonique $u_t = (D\,\varphi' : D\,\varphi)_t$ tel que $\sigma_t^{\varphi'}\,(x) = u_t\, \sigma_t^\varphi\,(x)\, u_t^*$ $\forall\, x \in M$ et on a $u_t = (U_{t,\alpha})$ avec :

$$U_{t,\alpha} = T'^{it}_{\alpha,\nu}\ T^{-it}_{\alpha,\nu}\ \forall\, t \in \mathbb{R}$$

Il en résulte qu'il existe un homomorphisme canonique δ de $\mathbb{R}$ dans Out M = Aut M/Int M

Comme corollaire on étudie et on calcule dans des exemples les invariants :

a) T (M) = Ker δ, b) S (M) = Spectre δ, c) W (M) = action de $\mathbb{R}_+^*$ sur le centre du produit croisé :

$$N = M \rtimes_\delta \mathbb{R}$$

THÉORÈME. Soit $M = L^\infty\,(V) \rtimes \Gamma$. Alors le *flot des poids* W (M) est donné par l'action de $\mathbb{R}_+^*$ sur $L^\infty\,(P/\Gamma)$ où P est l'espace total du fibré principal de groupe $\mathbb{R}_+^*$, de base V, des densités d'ordre 1 sur V.

On en déduit facilement des exemples de facteurs $M = L^\infty(V) \rtimes \Gamma$ de flot des poids donné et en particulier de type III_λ, $\lambda \in]0, 1]$.

Remarque. Les mêmes résultats restent valables si V est une variété sur un corps local K, à cela près que l'on n'obtient seulement les facteurs de type III_λ où $\lambda = q^{-n}$, q étant la caractéristique du corps résiduel.

Complément. Facteurs de type II_1 et correspondances.

Soit N un facteur de type II_1, on appelle correspondance sur N la donnée d'un espace de Hilbert H et de représentations normales π, π' de N et N^o dans H telles que $\pi(x)\,\pi'(y) = \pi'(y)\,\pi(x)$ $\forall x, y \in N$ (i.e. H est un N-bimodule).

Alors que la théorie des représentations de N est triviale il n'en est pas de même de celle des correspondances, l'espace des correspondances a une topologie naturelle et on a les résultats suivants :

Théorème. Pour tout facteur N de type II, soit π_N (resp λ_N) la correspondance obtenue par l'action de N à gauche et à droite dans $L^2(N)$ (resp dans $L^2(N) \otimes L^2(N)$). Soit Γ un groupe discret dont les classes de conjugaison sont infinies et $N = \rho(\Gamma)''$ le commutant de Γ dans $\ell^2(\Gamma)$. Alors :

1) Γ est moyennable ssi π_N est faiblement contenue dans λ_N ;

2) Γ a la propriété T de Kazhdan ssi π_N est isolée.

II. *C^* Algèbre d'un feuilletage et opérateurs elliptiques le long des feuilles*

Soient V une variété compacte et F un sous-fibré intégrable du fibré tangent de V. Par hypothèse $C^\infty(V, F)$ est une sous-algèbre de Lie de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs sur V, on note $\mathcal{D}$ l'algèbre engendrée par $C^\infty(V, F)$ dans l'algèbre des opérateurs différentiels sur V. Pour tout $D \in \mathcal{D}$ le symbole principal $\sigma(D)(\xi)$, $\xi \in T^*(V)$ ne dépend que de la restriction de ξ à F.

Définition. On dit que $D \in \mathcal{D}$ est (longitudinalement) elliptique ssi $\sigma(D)$ est inversible hors de la section 0 de F^*.

Soient L une feuille du feuilletage (V, F), et $\tilde{L}$ son revêtement d'holonomie.

Lemme. Pour $D \in \mathcal{D}$, elliptique, la fermeture de la restriction de D à $C_c^\infty(\tilde{L})$ coïncide avec la restriction de D à $L^2(\tilde{L})$ au sens des distributions.

On associe ainsi à D une famille $(D_L)_{L \in V/F}$ d'opérateurs non bornés fermés dans $L^2(\tilde{L})$, paramétrée par l'espace des feuilles V/F du feuilletage.

Soient G le graphe du feuilletage (V, F) et $k \in C_c^\infty(G)$. Pour tout $L \in V/F$, la convolution par k définit un opérateur borné k_L dans $H_L = L_2(\tilde{L})$. On note $C^*(V, F)$ la C^* algèbre adhérence normique des familles d'opérateurs de la forme (k_L).

THÉORÈME. 1) Soit $D \in \mathcal{D}$, elliptique, d'ordre > 0. Alors $(1 + D^*D)^{-1} \in C^*(V, F)$.

2) Soit $D \in \mathcal{D}$ elliptique. Alors $D(1 + D^*D)^{-1/2}$ est un multiplicateur de $C^*(V, F)$.

COROLLAIRE. Si (V, F) est minimal et $C^*(V, F)$ ne contient aucun idempotent non nul, pour tout D elliptique et tout L le spectre de D_L est connexe (dans $P_1(\mathbb{C})$.

Un exemple important où l'hypothèse est satisfaite est le *flot horocyclique.*

COROLLAIRE. Soient $H = SL(2, \mathbb{R})$, $\Gamma \subset H$ un sous-groupe discret cocompact et a_j, $a_m \in C^\infty(H/\Gamma)$ avec a_m inversible. Soit D l'opérateur différentiel sur $\mathbb{R}$ donné par :

$$(D f)(n) = \sum_0^m a_j\left(\begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) f^{(j)}(n)$$

Le spectre de D dans $L^2(\mathbb{R})$ est une partie connexe de $P_1(\mathbb{C})$.

On montre aussi que le feuilletage de Reeb vérifie la propriété de connexité plus faible :

(*) Toute suite décroissante (e_n), de projecteurs de $C^*(V, F)$ est stationnaire.

On montre ensuite que toute transversale fermée T du feuilletage (V, F) définit un idempotent $e(T) \in C^*(V, F)$. Soit alors $V = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ et F le feuilletage de Kronecker : $dx = \theta\, dy$, $\theta \notin \mathbb{Q}$. En associant un projecteur à chaque géodésique fermée de V on montre que $C^*(V, F)$ contient comme sous-algèbre C (K) où K est le compact de Cantor.

On rappelle ensuite brièvement les propriétés principales des C^* modules et le théorème de stabilisation de Kasparov, ainsi que la K théorie topologique pour les algèbres de Banach.

PROPOSITION. Soient A une C^* algèbre et (ϵ, d) un complexe fini de C^* modules sur A. On suppose (ϵ, d) *quasi exact,* i.e. qu'il existe $s_k : \epsilon^k \to \epsilon^{k-1}$ tel que $ds + sd =$ identité + compact.

1) Alors $d + d^* : \epsilon^{\text{pair}} \to \epsilon^{\text{impair}}$ est un quasiisomorphisme dont la classe dans $K_0(A)$ est appelée classe d'Euler $e(\epsilon, d)$ du complexe.

2) Soient (ϵ, d) et (ϵ', d') deux complexes quasi exacts et T un morphisme $(\epsilon, d) \mapsto (\epsilon', d')$ qui est un isomorphisme en cohomologie, alors $e(\epsilon, d) = e(\epsilon', d')$.

Soit alors (V, F) une variété compacte feuilletée la proposition ci-dessus permet de définir la classe d'Euler longitudinale $e(V, F)$ comme un élément de $K_0(C^*(V, F))$ et on a :

THÉORÈME. $e(V, F)$ est invàriante par équivalence d'homotopie longitudinale.

On donne ensuite des exemples de feuilletages à feuilles contractiles avec $e(V, F) \neq 0$.

PROPOSITION. Soient D un opérateur elliptique longitudinal, ϵ^0 (resp ϵ^1) le C^* module sur $C^*(V, F)$ associé au domaine de D_L (resp à $L^2(\tilde{L})$). L'opérateur D définit un quasi isomorphisme de ϵ^0 dans ϵ^1 dont la classe $\mathrm{Ind}_a(D)$ ne dépend que de la classe de K théorie à support compact définie par le symbole principal σ de D.

On obtient ainsi une application de $K_0(F^*)$ dans $K_0(C^*(V, F))$. Pour la calculer on utilise un plongement $j : V \to \mathbb{R}^N$. Pour $\epsilon > 0$ on pose $T_\epsilon = \{(x, j(x) + \xi) ; x \in V, \xi \in \mathbb{R}^N, \xi \perp j_*(F_x), \|\xi\| < \epsilon\}$. Pour ϵ assez petit T_ϵ est une transversale au feuilletage $F \times \{0\}$ de $V \times \mathbb{R}^N$, d'où une inclusion : $i : C_0(T_\epsilon) \to C^*(V \times \mathbb{R}^N, F \times \{0\}) = C^*(V, F) \otimes C_0(\mathbb{R}^N)$.

THÉORÈME. (C.S.). Soient $A = C^*(V, F)$ et β^{-1} l'isomorphisme de périodicité $K_0(A \otimes C_0(\mathbb{R}^N)) \to K_0(A)$ (N pair). Supposons F Spin^c et soit D_E l'opérateur de Drac longitudinal à coefficients dans un fibré E sur V. On a :

$\mathrm{Ind}_a(D_E) = \beta^{-1} i_* t[E]$

où $t : K^0(V) \to K^0(T_\epsilon)$ est l'isomorphisme de Thom.

Enfin on montre comment le théorème de l'indice pour les feuilletages avec mesure transverse s'en déduit comme corollaire.

A. C.