Analyse et géométrie

M. Alain Connes, membre de l'Institut
(Académie des Sciences), professeur

Formules explicites, formules de trace et réalisation spectrale des zéros de la fonction zéta

1. Introduction. J'avais mis en évidence dans mon cours 96-97 le rôle de l'espace des classes d'adèles sur un corps global k dans l'interprétation spectrale des zéros des fonctions L. L'interprétation des formules explicites de Riemann-Weil comme formule de trace restait au niveau formel car les opérateurs impliqués n'étaient traçables que dans le troisième terme $\mathcal{H}$ de la suite exacte d'espaces de Hilbert,

$$0 \to \mathcal{H}_0 \to \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H} \to 0, \tag{1}$$

où $\mathcal{H}_0 = \mathrm{L}^2_\delta(X)_0$ est un espace de fonctions de carré sommable sur X vérifiant les 2 conditions linéaires

$$f(0) = 0, \qquad \int f\,dx = 0, \tag{2}$$

où $\mathcal{H}_1 = L^2_\delta(C_k)$ est la représentation régulière du groupe C_k des classes d'idèles et où C_k agit sur X par multiplication.

La suite exacte (1) est analogue à celle des formes différentielles paires et impaires sur une surface de Riemann compacte Σ, où $\mathcal{H}_0$ désigne l'espace de Sobolev des formes de degré pair orthogonales aux formes harmoniques et $\mathcal{H}_1$ l'espace des formes de degré 1 de carré intégrable, la flèche de $\mathcal{H}_0$ dans $\mathcal{H}_1$ étant la somme $d + d^*$ où d^* est l'adjoint de la différentielle de de Rham d.

La formule de trace énoncée au niveau formel dans 96-97 est l'analogue de la formule de Lefchetz, mais cette analogie formelle se heurte aux problèmes suivants :

(α) La suite exacte (1) dépend d'un exposant de Sobolev δ et les zéros des fonctions L n'apparaissent dans $\mathscr{H}$ que si $\delta > 1$. La valeur δ donne alors une borne *a priori* sur les multiplicités, de sorte qu'aucune valeur naturelle de δ ne peut être fixée.

(β) La condition de transversalité dans la formule de Lefchetz de Atiyah-Bott n'autorise que des fonctions test h sur le groupe C_k qui s'annulent au voisinage de 1.

(γ) L'espace X étant non séparé le décompte des orbites périodiques est rendu délicat par l'existence de points dont l'isotropie n'est pas un sous-groupe fermé de C_k.

(δ) Le point $0 \in X$ est fixe par l'action de C_k et il faut montrer qu'il ne contribue pas à la formule de trace.

Tous ces problèmes sont déjà présents, ainsi que l'absence de traçabilité de l'opérateur

$$(3) \qquad U(h) = \int_{C_k} h(u)\, U(u)\, d^*u$$

(où $h \in \mathscr{S}(C_k)$ et $(U(u)\xi)(x) = \xi(u^{-1}x)$, $\forall x \in X,\ u \in C_k)$

dans le cadre semi-local suivant : Soit S un ensemble fini de places du corps global k et soit $O_S^* \subset k^*$ le sous-groupe,

$$(4) \qquad O_S^* = \{q \in k\ ; \quad |q_v| = 1 \quad \forall v \notin S\}.$$

Soient alors $A_S = \prod_{v \in S} k_v$ et $X_S = A_S / O_S^*$ le quotient de A_S par l'action de O_S^* par multiplication. Le groupe $C_S = \left(\prod_{v \in S} k_v^*\right) / O_S^*$ agit sur X_S par multiplication.

Les résultats principaux de mon cours sont :

(A) La résolution des problèmes (α) (β) (γ) (δ) ci-dessus dans le cas semi-local.

(B) La démonstration de l'implication FT $\Rightarrow$ RH où FT désigne la formule de trace globale et RH l'hypothèse de Riemann pour les fonctions L de Hecke.

Seule la version semi-locale de la formule de trace est démontrée.

Nous avons donné deux démonstrations de la formule de trace semi-locale. La première est analogue à celle de la formule de trace de Selberg. La deuxième s'appuie sur le calcul différentiel quantique introduit dans un cours antérieur.

La démonstration de l'implication FT $\Rightarrow$ RH consiste à prouver la positivité de la distribution de Weil sur le groupe C_k comme limite faible de distributions de type positif.

2. Formule de trace semi-locale

Soient k un corps global et S un ensemble fini de places de k, contenant toutes les places infinies. Soit O_S^* le groupe défini ci-dessus. Il est cocompact dans J_S^1 où

$$J_S = \prod_{v \in S} k_v^* \tag{5}$$

et,

$$J_S^1 = \{j \in J_S,\ |j| = 1\}. \tag{6}$$

Le groupe quotient $C_S = J_S / O_S^*$ joue le même rôle que C_k, et agit sur le quotient X_S de $A_S = \prod_{v \in S} k_v$ par O_S^*.

Pour prendre un exemple simple, on considère $k = \mathbb{Q}$, alors que S est l'ensemble des trois places 2, 3, et ∞. On vérifie dans cet exemple que la topologie de X_S n'est pas de type I car le groupe $O_S^* = \{\pm 2^n 3^m \,;\, n,\, m \in \mathbb{Z}\}$ agit ergodiquement sur $\{0\} \times \mathbb{R} \subset A_S$.

On normalise la mesure de Haar $d^* \lambda$ de C_S par

$$\int_{|\lambda| \in [1,\Lambda]} d^* \lambda \sim \log \Lambda \qquad \text{quand } \Lambda \to \infty, \tag{7}$$

et la mesure de Haar $d^* \lambda$ de J_S de telle sorte qu'elle coïncide avec celle de C_S sur un domaine fondamental D pour l'action de O_S^* sur J_S.

Soit $L^2(X_S)$ l'espace de Hilbert séparé complété de l'espace de Bruhat-Schwartz $\mathcal{S}(A_S)$ pour la structure pré-hilbertienne donnée par

$$\|f\|^2 = \int \left| \sum_{q \in O_S^*} f(qx) \right|^2 |x| \, d^*x \tag{8}$$

où l'intégration est effectuée sur un domaine fondamental D pour l'action de O_S^* sur J_S. L'on montre que l'intégrale est convergente en estimant

$$\int_{u_i \geq 0, \Sigma u_i = -\mathrm{Log}|x|} \prod du_i \tag{9}$$

Soit $U(g)$ l'opérateur

$$(U(g)\xi)(x) = \xi(g^{-1}x) \qquad \forall x \in A_S \tag{10}$$

La même formule, avec $x \in X_S$, définit son action sur $L^2(X_S)$. Soit $h \in \mathcal{S}(C_S)$ une fonction support compact, $U(h) = \int h(g) U(g) dg$ l'opérateur correspondant dans $L^2(X_S)$.

La transformation de Fourier F sur $\mathcal{S}(A_S)$ se prolonge en un opérateur unitaire sur l'espace de Hilbert $L^2(X_S)$, on a en effet

Lemme 1. *a) Pour tous $f_i \in \mathcal{S}(A_S)$ la série $\Sigma_{O_S^*} \langle f_1, U(q) f_2 \rangle_A$ de produits scalaires dans $L^2(A_S)$ converge géométriquement sur le groupe abélien O_S^*. De plus, sa somme est égale au produit scalaire de f_1 et f_2 dans l'espace de Hilbert $L^2(X_S)$.*

b) Soit $\alpha = \prod \alpha_v$ un caractère du groupe additif A_S et F la transformation de Fourier correspondante. L'application $f \to F(f)$, $f \in \mathcal{S}(A_S)$ se prolonge uniquement en un opérateur unitaire dans l'espace de Hilbert $L^2(X_S)$.

Soit alors P_Λ le projecteur orthogonal sous le sous-espace,

$$P_\Lambda = \{\xi \in L^2(X_S)\ ;\ \xi(x) = 0 \qquad \forall x,\ |x| > \Lambda\}. \tag{11}$$

Par construction P_Λ est l'opérateur de multiplication par la fonction ρ_Λ, où $\rho_\Lambda(x) = 1$ si $|x| \leq \Lambda$, et $\rho(x) = 0$ si $|x| > \Lambda$. Cela donne un « cutoff » infrarouge et pour obtenir un « cutoff » ultraviolet on utilise $\hat{P}_\Lambda = F P_\Lambda F^{-1}$ où F désigne la transformation de Fourier (Lemme 1) qui dépend du choix du caractère $\alpha = \prod \alpha_v$. Soit

$$R_\Lambda = \hat{P}_\Lambda P_\Lambda. \tag{12}$$

Le résultat principal est le suivant :

Théorème 2. *Soient A_S et $\alpha = \prod \alpha_v$ comme ci-dessus. Soit $h \in \mathcal{S}(C_S)$ une fonction à support compact. Alors quand $\Lambda \to \infty$, on a*

$$\text{Trace } (R_\Lambda\ U(h)) = 2h(1) \log' \Lambda + \sum_{v \in S} \int'_{k_v^*} \frac{h(u^{-1})}{|1-u|}\, d^* u + o(1)$$

où $2\log'\Lambda = \displaystyle\int_{\lambda \in C_S,\ |\lambda| \in [\Lambda^{-1},\ \Lambda]} d^*$, *chaque k_v^* est plongé dans C_S par $u \to (1, 1, \ldots, u, \ldots, 1)$ et où la partie finie $\int'$ est uniquement déterminée par l'unique distribution sur k_v qui coïncide avec $\dfrac{du}{|1-u|}$ pour $u \neq 1$ et dont la transformée de Fourier relative à α_v s'annule en 1.*

Soit G un groupe modulé. L'algèbre $\mathcal{A}$ de convolution des fonctions sur G est munie d'un calcul différentiel quantique canonique en considérant sa représentation régulière dans $L^2(G)$ et l'opérateur H de multiplication par le signe de $Log(|g|)$.

On pose alors

$$\text{đ}\, h = [H, h] \qquad \forall h \in \mathcal{A}. \tag{13}$$

Prenons alors $G = C_k$.

On démontre que $R_\Lambda\ U(h)$ est unitairement équivalent à un opérateur, agissant dans $L^2(C_S)$, et ayant la forme suivante

$$P_{[1,\Lambda^2]}\, \tilde{h} + \frac{1}{2}\, P_{[0,\Lambda^2]}\, U^{-1}\, (\text{đ}\ U)\, \tilde{h} \tag{14}$$

où pour $a,\ b \in \mathbb{R}_+$, $P_{[a,b]}$ désigne le projecteur orthogonal donné, la multiplication par la fonction caractéristique de

(15) $$\{g \in C_S\ ;\ |g| \in [a,b]\},$$

où $\tilde{h}(g) = |g|^{-1/2}\ h(g^{-1})\ \forall g \in C_S$ et où U est un multiplicateur unitaire de $\mathscr{A}$ de la forme $U = \prod_{v \in S} U_v$.

3. La Formule de trace globale

Le groupe abélien A des adèles de k est identifié à son dual de Pontrjagin par l'accouplement

(16) $$\langle a,\ b\rangle = \alpha(ab)$$

ou $\alpha : A \to U(1)$ est un caractère non trivial qui s'annule sur $k \subset A$. Deux tels caractères α et α' sont reliés par k^*

(17) $$\alpha'\ (a) = \alpha(qa) \qquad \forall a \in A.$$

Il en résulte que les transformations de Fourier correspondantes sur A sont reliées par

(18) $$\hat{f}' = \hat{f}_q.$$

Ceci est une raison supplémentaire pour diviser par les fonctions de la forme $f - f_q$, i.e., de considérer l'espace quotient X.

Commençons par le cas où k est de caractéristique positive.

Soit S_0 un ensemble fini de places de k, tel que pour tout $S \supset S_0$ on ait $mod(C_S) = mod(C_k) = q^{\mathbb{Z}}$ et que tout domaine fondamental D pour l'action de O_S^* sur J_S, le produit $D \times \prod R_v^*$ soit un domaine fondamental pour l'action de k^* sur J_k.

Les projecteurs $\hat{P}_\Lambda$ et P_Λ commutent avec la décompostion de $L^2(X_S)$ en somme directe, indexée par les caractères χ_0 of $C_{S,1}$,

(19) $$L^2_{\chi_0} = \{\xi \in L^2(X_S)\ ;\ \xi(a^{-1}x) = \chi_0(a)\ \xi(x),\ \forall x \in X_S,\ a \in C_{S,1}\}$$

Lemme 3. *Soit χ_0 un caractère de $C_{S,1}$. Alors pour Λ assez grand $\hat{P}_\Lambda$ et P_Λ commutent dans l'espace de Hilbert $L^2_{\chi_0}$.*

On obtient alors le corollaire suivant du théorème 2 dans le cas de caractéristique positive.

Corollaire 4. *Soit Q_Λ le projecteur orthogonal sur le sous-espace de $L^2(X_S)$ engendré par les $f \in \mathcal{S}(A_S)$ tels que $f(x)$ et $\hat{f}(x)$ s'annulent pour $|x| > \Lambda$. Soit $h \in \mathcal{S}(C_S)$ une fonction à support compact. Alors quand $\Lambda \to \infty$, on a*

$$\operatorname{Trace}\,(Q_\Lambda\; U(h)) = 2h(1)\log' \Lambda + \sum_{v=S} \int'_{k_v^*} \frac{h(u^{-1})}{|1-u|}\, d^*u + o(1)$$

ou $2\log'\Lambda = \int_{\lambda \in C_S,\, |\lambda| \in [\Lambda^{-1}, \Lambda]} d^*\lambda$, *et les notations sont celles du théorème 2.*

La démonstration du lemme montre en fait que les sous-espaces B_Λ se stabilisent très rapidement, et que l'application naturelle $\xi \to \xi \otimes 1_R$ de $L^2(X_S)$ vers $L^2(X_S')$ pour $S \subset S'$ envoie B_Λ^S surjectivement sur $B_\Lambda^{S'}$.

Passons au cas global. On désigne par $L^2(X)$ l'espace de Hilbert $L^2_\delta(X)$ du cours 96-97 pour la valeur triviale $\delta = 0$. Soit de plus Q_Λ le projecteur orthogonal sur le sous-espace B_Λ de $L^2(X)$ engendré par les $f \in \mathcal{S}(A)$ qui s'annulent ainsi que leur transformée de Fourier pour $|x| > \Lambda$. La démonstration du lemme montre que pour S et Λ assez grands, l'application $\xi \to \xi \otimes 1_R$ de $L^2(X_S)\chi$ envoie B_Λ^S surjectivement sur B_Λ.

La formule de trace globale est alors

$$\operatorname{Trace}\,(Q_\Lambda\; U(h)) = 2h(1)\log' \Lambda + \sum_{v} \int'_{k_v^*} \frac{h(u^{-1})}{|1-u|}\, d^*u + o(1) \tag{20}$$

avec les notations ci-dessus.

Théorème 5. *Soient k un corps global de caractéristique non-nulle et Q_Λ le projecteur orthogonal sur le sous-espace de $L^2(X)$ engendré par les $f \in \mathcal{S}(A)$ tels que $f(x)$ et $\hat{f}(x)$ s'annulent pour $|x| > \Lambda$. Soit $h \in \mathcal{S}(C_k)$ une fonction support compact. Les conditions suivantes sont équivalents :*

a) Quand $\Lambda \to \infty$, on a

$$\operatorname{Trace}\,(Q_\Lambda\; U(h)) = 2h(1)\log' \Lambda + \sum_{v} \int'_{k_v^*} \frac{h(u^{-1})}{|1-u|}\, d^*u + o(1)\,;$$

b) Toutes les fonctions L sur k satisfont l'Hypothèse de Riemann.

Si k est un corps global de caractéristique nulle on n'a plus la commutation des projecteurs P_Λ et $\hat{P}_\Lambda$ à cause des places archimédiennes. Pour résoudre ce problème on se concentre sur le cas de la place réelle. On a alors les deux projecteurs orthogonaux P_Λ et $\hat{P}_\Lambda$ dans $L^2(\mathbb{R})$, avec $\hat{P}_\Lambda = F\,P_\Lambda\,F^{-1}$ pour la transformation de Fourier associée au caractère $x \to \exp(ix)$ de $\mathbb{R}$. Le point clef, dû à Landau, Pollack et Slepian est la commutation de P_Λ et $\hat{P}_\Lambda$ avec l'opérateur différentiel du second ordre,

$$\Delta_\Lambda = -\,\partial(\Lambda^2 - x^2)\,\partial + \Lambda^2\, x^2. \tag{21}$$

Plus précisément on démontre,

Lemme 6. *L'opérateur Δ_Λ défini sur $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ est symétrique, ses indices de défaut sont tous deux égaux à quatre et il admet une unique extension autoadjointe qui commute à la fois avec P_Λ et $\hat{P}_\Lambda$.*

En posant $U = 2\,P_\Lambda - 1$, $V = 2\hat{P}_\Lambda - 1$ on obtient une représentation du groupe produit libre de deux groupes $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ à 2 éléments, c'est-à-dire du groupe dihedral. Les représentations irréductibles de ce groupe sont indexées par les orbites de l'involution $z \to \bar{z}$ dans le dual de Pontrjagin $U(1) = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$ du groupe $\mathbb{Z}$.

La décomposition en somme directe de représentations irréductibles de la représentation π_Λ associée à $(P_\Lambda, \hat{P}_\Lambda)$ s'obtient en diagonalisant l'opérateur $(P_\Lambda$ $\hat{P}_\Lambda\, P_\Lambda$ dans $L^2([-\Lambda, \Lambda])$ et l'on a,

(22) Les valeurs propres de $P_\Lambda\, \hat{P}_\Lambda\, P_\Lambda$ sont simples et de la forme

$$1 > \lambda_0 > \lambda_1 \ldots > \lambda_n > \lambda_{n+1}, \qquad \lambda_n \to 0 \quad n \to \infty.$$

(23) Le vecteur propre de $P_\Lambda\, \hat{P}_\Lambda\, P_\Lambda$ associé à λ_n est la n-ième fonction sphéroïdale, i.e. la n-ième fonction propre de l'opérteur Δ_Λ restreint à l'intervalle $L^2([-\Lambda, \Lambda])$.

J'ai passé un temps considérable dans le cours à décrire les propriétés qualitatives connues des fonctions sphéroïdales.

J'ai montré en particulier que pour n fixe et $\Lambda \to \infty$ on a

$$\Psi_n\,(\Lambda) \to D_n \tag{24}$$

où D_n est la n-ième fonction de Hermite-Weber.

La démonstration existant dans la littérature, due à Sips, était erronée.

Le comportement des valeurs propres $\lambda_n(\Lambda)$ fait apparaître un régime de transition entre les valeurs $\lambda_n(\Lambda)$ égales à 1 à l'ordre Λ^{-N} pour tout N lorsque

$$n \ll \frac{4\,\Lambda^2}{2\,\pi} \tag{25}$$

et des valeurs de $\lambda_n(\Lambda)$ égales à 0 à l'ordre de Λ^{-N} pour tout N lorsque,

$$n \gg \frac{4\,\Lambda^2}{2\,\pi}. \tag{26}$$

La taille de l'intervalle de transition est de l'ordre de $\log \Lambda$ et j'ai montré que les vecteurs propres correspondants donnent une contribution négligeable à l'expression,

(27) $$\text{Trace } (Q_\Lambda \ U(h)).$$

Ceci permet d'obtenir l'analogue du théorème 5 dans le cas de caractéristique zéro.

A.C.

Conférences

Septembre 98, cours de 1 heure à la conférence sur la fonction zéta de Riemann à l'institut Schrödinger de Vienne.

Octobre-Novembre 98, 20 heures de cours à l'université de Columbus Ohio (USA).

Novembre 98, 1 séminaire de mathématiques à Harvard.

Novembre 98, 1 séminaire de mathématiques et un séminaire de physique à Penn-State.

Décembre 98, 1 cours à la rencontre entre physiciens et mathématiciens de Strasbourg.

Janvier 99, 3 cours de 1 heure, Landau-Lectures Jérusalem.

Janvier 99, 1 conférence pour l'ouverture de l'institut mathématique de Beyrouth.

Mai 99, 1 cours à Harvard (conférence Atiyah-Singer-Bott-Hirzebruch).

Mai 99, 1 cours de 1 heure au MIT en physique.

Mai 99, 1 cours de 1 heure au Minnowbrook symposium sur la structure de l'espace-temps.

Juin 99, 1 conférence en ouverture du Arbeitstagung de Bonn.

Juin 99, 2 conférences à Oxford (Colloquium et séminaire).

Juin 99, 1 cours à la conférence de géométrie Noncommutative de Bonn.

Publications

A. Connes, D. Kreimer, Hopf algebras, renormalization and Noncommunitative geometry.

Comm. Math. Phys. 199 (1998) 203-242.

A. Connes, H. Moscovici, Hopf algebras, cyclic cohomology and the transverse index theorem.

Comm. Math. Phys. 198 (1998) 199-246.

A. Connes, Trace formula in noncommutative geometry and the zeros of the Riemann zeta function.

Sel. math., New ser. 5 (1999) 29-106.