Analyse et géométrie

M. Alain Connes, membre de l'Institut
(Académie des Sciences), professeur

Algèbres de Hopf, Cohomologie Cyclique et Théorème de l'Indice transverse

1. Introduction. Dans mon cours, cette année, j'ai résolu le problème de calcul (par une formule locale) de l'indice des opérateurs transversalement hypoelliptiques pour les feuilletages. A l'occasion j'ai introduit la cohomologie cyclique pour les algèbres de Hopf.

Le point de départ de ce travail est la formule de l'indice locale pour les triplets spectraux démontrée dans un cours antérieur. Soit $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ un triplet spectral dont le spectre de dimension est discret et simple, ce qui est le cas pour la classe fondamentale transverse d'un feuilletage, supposons de plus que la dimension est impaire, on a alors :

Théorème. a) *L'égalité* $⨍ P = \mathrm{Res}_{z=0}$ Trace $(P|D|^{-z})$ *définit une trace sur l'algèbre engendrée par* $\mathcal{A}$, $[D, \mathcal{A}]$ *et* $|D|^z$, $z \in \mathbb{C}$. b) *La formule suivante n'a qu'un nombre fini de termes non nuls et définit les composantes* $(\varphi_n)_{n=1,3\dots}$ *d'un cocycle du bicomplexe* (b, B) *de l'algèbre* $\mathcal{A}$,

$$\varphi_n(a^0,\dots,a)^n = \sum_k c_{n,k} ⨍ a^0[D, a^1]^{(k_1)}\dots[D, a^n]^{(k_n)}|D|^{-n-2|k|}$$

$\forall a^j \in \mathcal{A}$ *où* $T^{(k)} = \nabla^k(T)$, $\nabla(T) = D^2T - TD^2$ *et où* k *est un multi-indice,*

$$c_{n,k} = (-1)^{|k|}\sqrt{2i}(k_1!\dots k_n!)^{-1}(k_1+1)^{-1}\dots(k_1+k_2+\dots+k_n+n)^{-1}\Gamma\left(|k|+\frac{n}{2}\right),$$

$|k| = k_1 + \dots + k_n$. c) *L'accouplement de la classe de cohomologie cyclique* $(\varphi_n) \in HC^*(\mathcal{A})$ *avec* $K_1(\mathcal{A})$ *donne l'indice de Fredholm de* D *à coefficients dans* $K_1(\mathcal{A})$.

Bien que cette formule se réduise facilement à celle d'Atiyah-Singer quand D est l'opérateur de Dirac sur une variété spinorielle, le calcul explicite de tous les termes impliqués dans le cocyle $\mathrm{ch}_*(D)$ pour la classe fondamentale transverse des feuilletages, est une tache insurmontable sans un nouvel outil. Par exemple même pour les feuilletages de codimension un, le calcul explicite occupe environ une centaine de pages.

Dans mon cours, j'ai adapté la cohomologie cyclique aux algèbres de Hopf et montré que l'on obtient ainsi le principe de calcul qui permet de traiter le cas général. L'on construit pour chaque valeur n de la codimension du feuilletage une algèbre de Hopf $\mathcal{H}(n)$, et on montre que tout le calcul s'effectue au sein du complexe cyclique de $\mathcal{H}(n)$.

Nous calculons cette cohomologie cyclique et obtenons la cohomologie de Gelfand-Fuchs.

2. Notations

Soit M une variété de dimension n. Soit $F(M)$ le fibré des repères de M, en coordonnées locales

(1) $$x^\mu \quad \mu = 1,\dots, n \text{ pour } x \in U \subset M.$$

Un repère de coordonnées x^μ, y_j^μ est le jet d'ordre 1 d'une application

(2) $$j : \mathbb{R}^n \to M,\ j(t) = x + yt \qquad \forall t \in \mathbb{R}^n$$

où $(yt)^\mu = y_i^\mu t^i \qquad \forall t = (t^i) \in \mathbb{R}^n$.

Soit φ un difféomorphisme local de M, il agit sur $F(M)$ par

(3) $$\varphi, j \to \varphi \circ j = \widetilde{\varphi}\,(j)$$

ce qui remplace x par $\varphi(x)$ et y par $\varphi'(x)y$ où

(4) $$\varphi'(x)^\alpha_\beta = \partial_\beta\, \varphi(x)^\alpha \quad \text{où} \quad \varphi(x) = (\varphi(x)^\alpha).$$

On a une action canonique de $GL^+(n, \mathbb{R})$ sur F^+ donnée par

(5) $$(g, j) \to j \circ g,\ g \in GL^+(n, \mathbb{R}),\ j \in F^+.$$

Soit Y_i^j le champ de vecteurs sur F^+ qui engendre l'action de $GL^+(n,\mathbb{R})$,

(6) $$Y_i^j = y_i^\mu \frac{\partial}{\partial y_j^\mu} = y_i^\mu\, \partial_\mu^j.$$

L'action de Diff^+ sur F^+ préserve la 1-forme à valeurs dans $\mathbb{R}^n$,

(7) $$\alpha^j = (y^{-1})^j_\beta\, dx^\beta.$$

Soit Γ une connection affine sans torsion et ω la 1-forme correspondante,

(8) $$\omega_j^l = (y^{-1})^l_\mu\, (dy_j^\mu + \Gamma^\mu_{\alpha,\beta}\, y_j^\alpha\, dx^\beta).$$

Soient X_i les champs de vecteurs horizontaux sur F^+ associés à la connection Γ,

(9) $$X_i = y_i^\mu\, (\partial_\mu - \Gamma^\beta_{\alpha,\mu}\, y_j^\alpha\, \partial_\beta^j).$$

Pour $\psi \in \mathrm{Diff}^+$, la 1-forme $\widetilde{\psi}^*\omega$ définit une autre connection affine sans torsion Γ' dont les champs de vecteurs horizontaux X_i' vérifient

(10) $$X_i' = \widetilde{\varphi}_* \, X_i \circ \widetilde{\psi}, \ \varphi = \psi^{-1}.$$

Quand ω est la connection plate $\Gamma = 0$ on obtient

(11) $$\Gamma' = \psi'(x)^{-1} \, d\psi'(x), \ \Gamma^{\mu}_{\alpha,\beta} = (\psi'(x)^{-1})^{\mu}_{\rho} \, \partial_{\beta} \, \partial_{\alpha} \, \psi^{\rho}(x).$$

3. L'algèbre de Hopf $\mathscr{H}(n)$

Soit alors Γ un pseudogroupe de difféomorphismes partiels, préservant l'orientation

(12) $$\psi\colon \mathrm{Dom}\, \psi \to \mathrm{Im}\, \psi$$

où le domaine, Dom ψ et l'image, Im ψ sont des ouverts de M. Par fonctorialité de la construction de $F(M)^+$, soient $\widetilde{\psi}$ les difféomorphismes correspondants de $F^+(M)$.

Soit $\mathscr{A} = C_c^\infty(F^+) \rtimes \Gamma$ le produit croisé de F^+ par l'action de Γ sur F^+. Ce produit croisé est engendré linéairement par les monomes,

(13) $$f\, U_\psi^*, \ f \in C_c^\infty(\mathrm{Dom}\, \psi)$$

avec le produit,

(14) $$f_1 \, U^*_{\psi_1} f_2 \, U^*_{\psi_2} = f_1 \, (f_2 \circ \widetilde{\psi}_1) \, U^*_{\psi_2\psi_1}.$$

L'action canonique de $GL^+(n,\mathbb{R})$ sur $F(M)^+$ commute avec l'action de Γ et se prolonge canoniquement au produit croisé $\mathscr{A}$. On obtient les dérivations suivantes de $\mathscr{A}$,

(15) $$Y_i^j (f\, U_\psi^*) = (Y_j^i f) \, U_\psi^*.$$

Les champs de vecteurs X_i sur $F^+(M)$ se prolongent à $\mathscr{A}$ par la formule,

(16) $$X_i \, (f\, U_\psi^*) = X_i\,(f) \, U_\psi^*.$$

Le calcul du commutateur donne,

(17) $$X_i - U_\psi X_i U_\psi^* = -\gamma_{ij}^k \, Y_k^j$$

où les fonctions γ_{ij}^k sont,

(18) $$\gamma_{ij}^k = y_i^\mu \, y_j^\alpha \, (y^{-1})_\beta^k \, \Gamma^\beta_{\alpha\mu},$$
$$\Gamma^{\mu}_{\alpha,\beta} = (\psi'(x)^{-1})^{\mu}_{\rho} \, \partial_{\beta} \, \partial_{\alpha} \, \psi^{\rho}(x).$$

Pour $a,\, b \in \mathscr{A}$ on a

(19) $$X_i\,(ab) = X_i\,(a)\, b + a \, X_i\,(b) + \delta_{ij}^k\,(a) \; Y_k^j\,(b)$$

où les opérateurs δ_{ij}^k dans $\mathscr{A}$ sont définis par,

(20) $$\delta_{ij}^k\,(f\, U_\psi^*) = \gamma_{ij}^k f\, U_\psi^*.$$

Les γ_{ij}^k sont caractérisés par l'égalité

(21) $$\widetilde{\psi}^* \, \omega - \omega = \gamma_{jk}^i \, \alpha^k = \gamma\alpha.$$

L'égalité $\widetilde{\psi_2\psi_1}^*\ \omega - \omega = \widetilde{\psi_1}^*\ (\widetilde{\psi_2}^*\ \omega - \omega) + (\widetilde{\psi_1}^*\ \omega - \omega)$ montre que chaque δ_{ij}^k est une dérivation de l'algèbre $\mathscr{A}$,

(22) $$\delta_{ij}^k\,(ab) = \delta_{ij}^k\,(a)\,b + a\ \delta_{ij}^k\,(b).$$

Considérons les opérateurs,

(23) $$\delta_{ab,i_1\ldots i_n}^c = [X_{i_1},\ldots[X_{i_n},\ \delta_{ab}^c]\ldots].$$

Ils sont tous de la forme,

(24) $$T\ (f\,U_\psi^*) = h\,f\,U_\psi^*$$

où $h = h^\psi$ est une fonction dépendant de ψ.

En particulier ils commutent deux à deux,

(25) $$[\delta_{ab,i_1\ldots i_n}^c,\ \delta_{ab,i_1,\ldots,i_m}^c] = 0.$$

On notera que quitte à remplacer la variété M par une réunion disjointe d'ouverts d'un recouvrement de M, et $\mathscr{A}$ par une algèbre équivalente au sens de Morita, on se ramène toujours au cas où la connection de départ est plate. Il en résulte que les générateurs Y_j^i, X_i, engendrent l'algèbre de Lie du groupe affine et que l'espace vectoriel engendré par les Y_j^i, X_i, $\delta_{ab,i_1\ldots i_n}^c$ forme une algèbre de Lie. On notera $\mathscr{H}$ son algèbre enveloppante que l'on dote du coproduit dicté par son action sur $\mathscr{A}$,

(26) $$h,\ a \to h(a),\ h \in \mathscr{H},\ a \in \mathscr{A}$$

et la règle,

(27) $$h(ab) = \sum h_{(0)}\,(a)\ h_{(1)}\,(b) \qquad \forall a,\ b \in \mathscr{A} \quad \text{où} \quad \Delta h = \sum h_{(0)} \otimes h_{(1)}.$$

On obtient alors les égalités,

(28) $$\Delta Y_i^j = Y_i^j \otimes 1 + 1 \otimes Y_i^j$$

(29) $$\Delta X_i = X_i \otimes 1 + 1 \otimes X_i + \delta_{ij}^k \otimes Y_k^j$$

(30) $$\Delta \delta_{ij}^k = \delta_{ij}^k \otimes 1 + 1 \otimes \delta_{ij}^k.$$

Ces règles jointes à l'égalité,

(31) $$\Delta(h_1 h_2) = \Delta h_1\ \Delta h_2 \qquad \forall h_j \in \mathscr{H}$$

déterminent le coproduit dans $\mathscr{H}$. On vérifie que $\mathscr{H}$ possède une antipode S, on obtient ainsi une algèbre de Hopf $\mathscr{H}(n)$ ne dépendant que de la codimension n, et qui agit sur tout produit croisé,

(32) $$\mathscr{A} = C_c^\infty(F) \rtimes \Gamma.$$

L'essentiel du cours a consisté à analyser l'algèbre de Hopf $\mathscr{H}(n)$, puis à calculer sa cohomologie cyclique. On commence par déterminer la sous-algèbre commutative $\mathscr{H}_c$ engendrée par les $\delta_{ij,i_1\ldots i_n}^k$.

Proposition. *L'algèbre de Hopf $\mathscr{H}_c$ est la duale de l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie $\mathscr{A}_0$ des champs de vecteurs dans $\mathbb{R}^n$, qui s'annulent à l'ordre 2 en zéro.*

On démontre ensuite que l'algèbre de Hopf $\mathcal{H}(n)$ se déduit canoniquement par un procédé découvert par G. Kac, de la décomposition suivante du groupe G des difféomorphismes de $\mathbb{R}^n$. Considérons les sous-groupes non normaux G_1 et G_2, où G_1 est le groupe affine et G_2 est le sous-groupe des difféomorphismes de la forme $\psi(x) = x + o(x)$. Tout élément g de G se décompose de manière unique en $g = k\,h$ avec $k \in G_1$ et $h \in G_2$.

Il en résulte en particulier que l'on a un accouplement naturel entre $\mathcal{H}(n)$ et l'algèbre $\mathcal{H}_* = C_c^\infty(G_1) \rtimes G_2$ produit croisé par l'action de G_2. La forme volume canonique sur le fibré des repères de $\mathbb{R}^n$ définit alors une trace τ_0 sur $\mathcal{H}_*$, qui est invariante à droite et vérifie l'égalité suivante pour l'action à gauche de $\mathcal{H}(n)$,

$$\tau_0\,(y\,(a)\,b) = \tau_0\,(a\,\widetilde{S}(y)\,(b)) \qquad \forall a, b \in \mathcal{H}_*,\ y \in \mathcal{H} \tag{33}$$

où l'involution $\widetilde{S}$ se déduit de l'antipode S en utilisant le module du groupe G_1 qui est non unimodulaire.

4. Cohomologie Cyclique et Algèbres de Hopf

En général, étant donnée une algèbre de Hopf $\mathcal{H}$ on peut dualiser la construction du complexe de Hochschild $C^n\,(\mathcal{H}^*, \mathbb{C})$ où $\mathbb{C}$ est le bimodule sur $\mathcal{H}^*$ donné par l'augmentation, i.e. la counité de $\mathcal{H}^*$. Cela donne les opérations suivantes : $\mathcal{H}^{\otimes(n-1)} \to \mathcal{H}^{\otimes n}$, qui définissent un espace cosimplicial

$$\begin{aligned}
&\delta_0\,(h^1 \otimes \ldots \otimes h^{n-1}) = 1 \otimes h^1 \otimes \ldots \otimes h^{n-1},\\
&\delta_j\,(h^1 \otimes \ldots \otimes h^{n-1}) = h^1 \otimes \ldots \otimes \Delta\,h^j \otimes \ldots \otimes h^{n-1},\\
&\delta_n\,(h^1 \otimes \ldots \otimes h^{n-1}) = h^1 \otimes \ldots \otimes h^{n-1} \otimes 1,\\
&\delta_i\,(h^1 \otimes \ldots \otimes h^{n+1}) = h^1 \otimes \ldots\, \varepsilon\,(h^{i+1}) \otimes \ldots \otimes h^{n+1},\ 0 \leq i \leq n.
\end{aligned} \tag{34}$$

Bien entendu, ces opérations n'utilisent pratiquement que la structure de coalgèbre et il est remarquable que cet espace cosimplicial possède une structure cyclique, i.e. une opération τ_n telle que,

$$\begin{aligned}
&\tau_n\,\delta_i = \delta_{i-1}\,\tau_{n-1} \quad 1 \leq i \leq n, \quad \tau_n\,\delta_0 = \delta_n\\
&\tau_n\,\sigma_i = \sigma_{i-1}\,\tau_{n+1} \quad 1 \leq i \leq n, \quad \tau_n\,\sigma_0 = \sigma_n\,\tau_{n+1}^2\\
&\tau_n^{n+1} = 1_n.
\end{aligned} \tag{35}$$

L'action de τ_n est donnée par,

$$\tau_n(h^1 \otimes \ldots \otimes h^n) = (\Delta^{n-1}\,\widetilde{S}\,(h^1))\;h^2 \otimes \ldots \otimes h^n \otimes 1 \tag{36}$$

où l'on utilise le produit dans $\mathcal{H}^{\otimes n}$ et l'involution $\widetilde{S}$. Il n'est pas trivial de vérifier directement que $(\tau_n)^{n+1} = 1$.

On définit alors la cohomologie cyclique d'une algèbre de Hopf comme la cohomologie du module cyclique ainsi obtenu. On la calcule dans de nombreux exemples, le résultat principal est le calcul pour l'algèbre de Hopf $\mathcal{H}(n)$, ce qui donne la cohomologie de Gelfand-Fuchs.

On développe ensuite la théorie des classes caractéristiques pour l'action d'une algèbre de Hopf sur une C^* algèbre A ce qui donne un morphisme $\underline{\theta}$ de la cohomologie cyclique de $\mathscr{H}$ dans celle de A.

5. Le théorème de l'indice

Passons au calcul de l'indice. Soit Q l'opérateur de signature hypoelliptique sur le fibré des repères F^+. Il agit sur le produit tensoriel

(37) $$\mathscr{H} = L^2\,(F^+,\, v) \otimes E$$

où E est la représentation de $SO(n)$,

(38) $$E = \Lambda\, P_n \otimes \Lambda\, \mathbb{R}^n\,,\, P_n = S^2\, \mathbb{R}^n.$$

L'opérateur Q est la somme graduée,

(39) $$Q = (d_v^* \mathrm{d}_v - d_v\, d_v^*) \oplus (d_H + d_H^*).$$

Théorème. *Il existe pour tout entier n un polynome universel* $L_n \in H^*\,(WSO_n)$ *tel que*

$$Ch_*\,(Q) = \underline{\theta}\,(L_n).$$

On termine enfin par des calculs explicites du polynome L_n.

Conférences

Septembre 97, 3 cours de 1 heure à la conférence sur la cohomologie cyclique et K-théorie à ICTP Trieste.

Septembre 97, 1 cours de 2 heures à la conférence sur la Géométrie non commutative de Lisbonne.

Octobre 97, Rome 1 cours de 1 heure.

Novembre 97, 1 séminaire de physique à MIT.

Novembre 97, 1 cours de 2 heures pour Current development in Mathematics à Harvard.

Décembre 97, 1 cours de 1 heure à la conférence sur la Géométrie non commutative de Strasbourg.

Mars 98, 3 cours de 1 heure à la conférence sur la conjecture de Baum-Connes.

Mars 98, 1 cours de 1 heure à la conférence de physique de Vietri.

Avril 98, 1 cours de 1 heure au colloquium de la société mathématique britanique à Manchester.

Avril 98, 3 cours de 1 heure à Temple University.

Mai 98, Nambodiri lectures à Chicago (3 cours).

Mai 98, 1 cours de 1 heure à Harvard.

Mai 98, 1 cours de 1 heure au Courant Institute.

Mai 98, 1 cours de 1 heure à Rutgers.

Mai 98, 1 cours de 1 heure à Stony Brook.

Juin 98, 1 cours de 1 heure à la conférence sur la cohomologie cyclique de Munster.

Juin 98, 4 cours de 1 heure à l'école d'été des Houches.

Juin 98, 1 cours de 1 heure à Leipzig.

Publications. Noncommutative Geometry : The Spectral Aspect. Les Houches Session LXIV, Elsevier 1998, p. 643-685.

Noncommutative geometry and matrix theory JHEP (1998) 003.

Distinctions. Docteur Honoris Causa de Rome Tor Vergata, Octobre 97.