

ANNUAIRE du **COLLÈGE DE FRANCE** 2016 - 2017

Résumé des cours et travaux

117^e
année



COLLÈGE
DE FRANCE
— 1530 —

PHYSIQUE STATISTIQUE

Bernard DERRIDA

Membre de l'Institut (Académie des sciences),
professeur au Collège de France

Mots-clés : physique statistique, thermodynamique, fluctuation macroscopique

La série de cours et séminaires « Modèles stochastiques de particules en physique hors d'équilibre » est disponible, en audio et/ou en vidéo, sur le site internet du Collège de France (<https://www.college-de-france.fr/site/bernard-derrida/course-2016-2017.htm>).

ENSEIGNEMENT – MODÈLES STOCHASTIQUES DE PARTICULES EN PHYSIQUE HORS D'ÉQUILIBRE

Depuis une vingtaine d'années de nombreux modèles microscopiques ont été proposés pour étudier le transport de chaleur ou de particules à travers des systèmes étendus. Le cours 2016-2017 a eu pour but de faire le point sur plusieurs progrès récents et sur des questions restées ouvertes. Pour certains systèmes, comme les modèles de gaz sur réseau, on dispose depuis le début des années 2000 d'une théorie macroscopique, la « théorie des fluctuations macroscopiques », qui peut être vue comme une généralisation d'une dynamique de Langevin à des systèmes étendus. Cette théorie permet de comprendre l'existence de corrélations à longue portée, de calculer les fonctions de grandes déviations de courant et de densité, de prédire des transitions de phase. Lorsque la comparaison est possible, comme dans le cas des modèles d'exclusion, elle est en accord avec des calculs faits à partir de descriptions microscopiques. Des modèles plus naturels de transport, comme des systèmes mécaniques qui conservent à la fois l'énergie et l'impulsion, sont plus difficiles à aborder malgré certaines avancées récentes majeures.

COURS

Cours du 9 janvier 2017

Après avoir rappelé les lois de Fourier et de Fick qui, combinées avec les lois de conservation de l'énergie ou du nombre de particules, aboutissent aux équations de

la chaleur ou de la diffusion, ce premier cours a décrit les modèles les plus anciens, comme ceux reposant sur l'idée d'un libre parcours moyen dans un gaz, permettant de déduire ces lois. Il a ensuite montré comment la formule de Kubo permet de déduire les coefficients de transport à partir des corrélations temporelles de courant mesurées à l'équilibre. Les modèles les plus simples de fluides ou de solides (comme le gaz parfait ou le solide harmonique) ne vérifient pas la loi de Fourier : en effet celle-ci prévoit un courant d'énergie inversement proportionnel à la longueur du système, tandis que pour ces modèles trop simples le transport (des atomes pour le gaz parfait et des phonons pour le solide harmonique) est balistique et le courant ne dépend pas de la longueur du système. De manière surprenante, de nombreuses simulations ont montré qu'en basse dimension (dimensions 1 et 2) la loi de Fourier n'est pas non plus vérifiée même pour des gaz de particules en interaction ou des solides anharmoniques. On observe en effet pour ces systèmes une loi de Fourier anormale, c'est-à-dire un courant d'énergie proportionnel à une puissance négative non entière de la longueur du système.

Cours du 16 janvier 2017

Le deuxième cours a été consacré aux modèles unidimensionnels de solides isolants. On peut décrire l'expression du flux de chaleur comme la moyenne du travail de la force exercée sur un atome par son voisin de gauche. La difficulté est que (contrairement aux systèmes à l'équilibre), on ne dispose pas d'expression explicite de la mesure stationnaire. Seulement dans le cas de la chaîne harmonique avec des thermostats représentés par des forces de Langevin, cette mesure stationnaire qui est gaussienne peut être calculée. Le problème de la chaîne harmonique est que les différents modes n'interagissent pas entre eux, ce qui fait que pour une chaîne périodique la dynamique ne permet pas l'équilibration. Dans le cas de la chaîne anharmonique la question de l'atteinte de l'équilibre et de l'équipartition de l'énergie entre les modes remonte au milieu des années 1950 avec la chaîne de Fermi-Pasta-Ulam. Certaines chaînes anharmoniques, comme la chaîne de Toda, sont intégrables et possèdent ainsi une infinité de quantités conservées ce qui, comme la chaîne harmonique, l'empêche de s'équilibrer. En dehors de ces cas intégrables, on observe en général dans les simulations de chaînes anharmoniques une loi de Fourier anormale avec comme principales caractéristiques : un courant qui décroît comme une loi de puissance non entière de la taille, un profil de température non linéaire même lorsque les températures des thermostats sont proches, des corrélations de courant qui décroissent algébriquement, des fluctuations qui s'amortissent avec une loi de diffusion où le laplacien est remplacé par un laplacien fractionnaire. Le cours s'est terminé en mentionnant certains modèles introduits au cours des dernières années comme la chaîne HCME, qui sont des chaînes harmoniques auxquelles on rajoute un élément stochastique en échangeant à des temps aléatoires les impulsions de sites voisins. Ces chaînes d'oscillateurs, plus simples que les chaînes anharmoniques, conservent l'énergie et l'impulsion et présentent la plupart des caractéristiques de la loi de Fourier anormale.

Cours du 23 janvier 2017

Les systèmes diffusifs, comme par exemple les modèles de gaz sur réseau, sont une classe de systèmes qui vérifient la loi de Fourier. Depuis une quinzaine d'années

on dispose d'une théorie assez complète, la théorie macroscopique des fluctuations, permettant de comprendre les fluctuations et les grandes déviations de courant et de densité de ces systèmes diffusifs. Après avoir décrit quelques exemples de systèmes diffusifs : les modèles d'exclusion, les marcheurs indépendants, le modèle KMP (Kipnis, Presutti, Marchioro), le cours a essentiellement porté sur la détermination des coefficients de transport qui sont les seules caractéristiques d'un système donné, qu'on a besoin de connaître dans le cadre de cette théorie des fluctuations macroscopiques. Trois méthodes peuvent être envisagées pour déterminer ces coefficients de transport : (i) mesurer le courant dans un système ouvert en contact à ses deux extrémités avec des thermostats à des températures voisines, (ii) mesurer pour un système à l'équilibre les fluctuations de courant, (iii) mesurer le courant induit par un champ (de pesanteur ou électrique dans le cas du transport de particules). Pour certains systèmes, les modèles gradients, le courant d'énergie s'écrit sous la forme d'un gradient ce qui rend la détermination des coefficients de transport très facile. Pour les systèmes non-gradients, on ne sait en général pas déterminer de manière exacte les coefficients de transport. En utilisant le principe de minimisation de la création d'entropie, on dispose néanmoins d'une méthode variationnelle permettant de déterminer ces coefficients de manière approximative.

Cours du 30 janvier 2017

L'hydrodynamique fluctuante permet de décrire les propriétés à grande échelle des systèmes diffusifs à travers l'évolution bruitée de deux champs : la densité et le courant qui sont liés par une loi de conservation. Il n'est pas toujours facile de déduire les équations de l'hydrodynamique fluctuante à partir d'un modèle microscopique. Ceci est néanmoins possible pour des modèles suffisamment simples comme l'exclusion symétrique et relativement facile à faire pour des marcheurs indépendants. Après avoir introduit les différentes propriétés des systèmes diffusifs que l'on peut déterminer en utilisant l'hydrodynamique fluctuante (quasi-potentiel, trajectoires d'apparition et de relaxation des fluctuations, fonctions de grande déviation du courant, celles des profils de densité empiriques) le quatrième cours a permis de montrer comment les profils moyens de densité ou les corrélations des fluctuations de densité peuvent être obtenus. La limite d'un grand système se traduit par une limite de faible bruit au niveau de l'hydrodynamique fluctuante. Dans cette limite, comme on le voit facilement dans le cas d'une équation de Langevin dans la limite d'un faible bruit, le problème se réduit le plus souvent à trouver la trajectoire qui minimise une certaine action. On peut ainsi utiliser les outils de la mécanique analytique et du principe de moindre action. Les cas particuliers d'un double puits où l'idée d'une trajectoire optimale n'est pas suffisante ou celui d'un système hors d'équilibre où le quasi-potentiel est non analytique ont également été discutés.

Cours du 6 février 2017

En reprenant le cas de l'équation de Langevin dans la limite d'un faible bruit, le cinquième cours a commencé par montrer comment écrire les équations de Hamilton-Jacobi pour le quasi-potentiel. Dans le cadre de la théorie macroscopique des fluctuations, la non-localité de ce quasi-potentiel est directement liée à la présence de corrélations à longue portée. Pour les systèmes à l'équilibre, on sait

exprimer le quasi-potentiel à partir de l'énergie libre. En dehors de l'équilibre on ne sait en général pas calculer le quasi-potentiel, à l'exception de quelques modèles comme l'exclusion symétrique. On peut néanmoins écrire les équations de Hamilton-Jacobi satisfaites par ce quasi-potentiel. Le cours s'est terminé en montrant comment dans le cas de l'exclusion symétrique, le quasi-potentiel peut être calculé à partir de l'expression des poids donnés par l'ansatz matriciel, ce qui permet de vérifier que les équations de Hamilton-Jacobi sont bien satisfaites.

Cours du 13 février 2017

Le sixième cours a été entièrement consacré aux fonctions de grandes déviations associées à des mesures empiriques de densité ou de courant. En commençant une fois encore par l'exemple de l'équation de Langevin dans la limite d'un faible bruit, il a été montré que sous certaines conditions (comme la convexité du carré de la force) le profil optimal associé à une mesure empirique est indépendant du temps. Des exemples ont été présentés où ces conditions ne sont pas satisfaites, comme dans le cas d'un double puits de potentiel, donnant lieu à des calculs de type instanton. Ces idées ont ensuite été appliquées, en utilisant à nouveau la théorie macroscopique des fluctuations, pour obtenir les fonctions de grande déviation de courant de systèmes diffusifs.

SÉMINAIRES

The Fermi-Pasta-Ulam problem: old ideas, recent results, open problems

Giancarlo Benettin (université de Padoue, Italie), le 9 janvier 2017

L'une des idées directrices de la physique statistique est que la dynamique interne de systèmes composés d'un grand nombre de degrés de liberté est suffisamment chaotique pour permettre d'atteindre un équilibre décrit par les ensembles statistiques introduits par Boltzmann et Gibbs. En 1954, Fermi, Pasta et Ulam publièrent le résultat de simulations numériques effectuées avec l'un des tous premiers ordinateurs. Ils montrèrent que pour des conditions initiales où l'énergie est initialement concentrée sur quelques modes, on ne parvient pas, même au bout d'un temps long, à l'équipartition de cette énergie entre tous les modes. Cela remet en question le postulat sur lequel reposent les ensembles statistiques de Boltzmann et Gibbs et selon lequel un système atteint l'équilibre sous l'effet de sa dynamique propre. Le séminaire de Giancarlo Benettin a permis de faire le point sur ce problème de Fermi-Pasta-Ulam qui a suscité depuis plus d'un demi-siècle un grand nombre d'articles et qui est au cœur des recherches actuelles sur la loi de Fourier anormale. La proximité des modèles d'oscillateurs non linéaires couplés avec des modèles intégrables comme la chaîne de Toda, la précision limitée et la durée relativement courte des simulations ont été autant d'obstacles pour clarifier ce problème. L'un des résultats les plus marquants est la présence de deux échelles de temps : une échelle de temps courte où l'énergie de la condition initiale ne se répartit que sur quelques modes (ce qui avait été observé dans l'article de Fermi, Pasta et Ulam) et une échelle de temps beaucoup plus longue (inaccessible avec les ordinateurs des années 1950) où l'équipartition est atteinte.

Diffusion normale et anormale de l'énergie dans les chaînes d'oscillateurs couplés

Marielle Simon (Inria Lille, Villeneuve d'Ascq), le 16 janvier 2017

On connaît depuis le XIX^e siècle la loi de Fourier qui énonce que le flux d'énergie d'un système soumis à un gradient de température est proportionnel à ce gradient. Cette loi, qui est à l'origine de l'équation de la chaleur et de la diffusion, est phénoménologique, comme d'ailleurs plusieurs lois du même type (loi de Fick pour le transport de particules, loi d'Ohm pour le transport de charges). Essayer de la comprendre à partir des premiers principes, c'est-à-dire à partir de modèles microscopiques, reste un sujet d'actualité depuis que des simulations sur des chaînes d'oscillateurs couplés ont montré qu'en basse dimension (en dimension 1 ou 2) elle n'est pas vérifiée. Pour ces systèmes de basse dimension, on observe en effet une loi de Fourier anormale avec une équation de la chaleur où le laplacien est remplacé par un laplacien fractionnaire. Marielle Simon, dans son séminaire, a décrit une famille de modèles étudiés depuis une dizaine d'années, plus simples que les chaînes d'oscillateurs couplés, mais qui permettent d'établir de manière rigoureuse la loi de Fourier anormale.

Totally asymmetric limit for models of heat conduction

Davide Gabrielli (université de L'Aquila, Italie), le 23 janvier 2017

Davide Gabrielli est l'un des cinq auteurs qui ont introduit au début des années 2000 la théorie des fluctuations macroscopiques qui donne un moyen de calculer les fonctions de grandes déviations de densité et de courant pour des systèmes diffusifs. Après une revue des principales idées et des outils mathématiques permettant de comprendre cette théorie, il a analysé la limite d'un champ fort, faisant ainsi le lien avec des résultats connus pour des systèmes non diffusifs comme le modèle d'exclusion asymétrique.

Forces in non-equilibrium systems

Yariv Kafri (Technion, Haifa, Israël), le 30 janvier 2017

La façon habituelle de décrire un fluide à l'équilibre est d'écrire ou d'essayer d'écrire son équation d'état qui relie sa pression à sa densité et à sa température. Pour un système hors d'équilibre, comme dans le cas de la matière active, on peut montrer qu'en général, il n'existe pas d'équation d'état. Une conséquence étonnante en est que pour un fluide actif, la pression exercée par le fluide sur un mur dépend de la forme du mur ou de la nature précise des interactions des particules du fluide avec le mur. La notion habituelle de pression perd donc son sens pour les systèmes hors d'équilibre.

Non-equilibrium steady states in quantum spin chains

Gunter Schütz (Institute of Complex Systems II Forschungszentrum Jülich, Allemagne), le 6 février 2017

Après une revue de la façon dont on peut représenter l'interaction de réservoirs avec des chaînes de spins quantiques, Gunter Schütz a montré que l'état stationnaire

hors d'équilibre de certaines chaînes quantiques peut être décrit par une matrice densité qui s'écrit sous la forme d'un ansatz matriciel, ce qui permet de déterminer le profil stationnaire.

Long-range correlations and anomalous heat transport in one dimension

David Mukamel (Institut Weizmann, Israël), le 13 février 2017

David Mukamel a présenté une série de résultats récents sur des modèles microscopiques pour lesquels on observe une loi de Fourier anormale. Son approche permet de déterminer le profil stationnaire de température pour des systèmes en contact avec deux thermostats. L'un des résultats surprenants est la forme singulière près des bords de ce profil, avec un exposant qui dépend de la nature précise du couplage avec les thermostats.

COURS À L'EXTÉRIEUR

The importance of large deviations in non-equilibrium systems

Large deviation theory in statistical physics: Recent advances and future challenges, International Center for Theoretical Sciences, Bengaluru – 560 089, India, cours du 20 au 31 août 2017

Large deviations functions appear almost everywhere in statistical physics, in particular when one tries to quantify the frequency of rare events. Already the notion of free energy can be viewed as a large deviation function. Several well established properties of non-equilibrium physics, such as the fluctuation theorem, can be formulated as a symmetry of a large deviation function. After a short review of these general properties, the lectures presented a series of recent results on the large deviation function of the density and of the current of simple models of non-equilibrium physics. Several approaches, both microscopic and macroscopic, can be used to calculate the fluctuations and the large deviation functions of the current in non-equilibrium diffusive systems. For example in steady state situations, one can obtain explicit expressions of these large deviation functions for diffusive systems. Less is known in non-steady state situations or for non-diffusive systems and the lectures tried to list a series of open questions.

RECHERCHE

Mes travaux de recherche peuvent se regrouper en cinq thèmes principaux.

LE MOUVEMENT BROWNIEN BRANCHANT ET LES MARCHES ALÉATOIRES BRANCHANTES

Avec Zhan Shi nous avons poursuivi nos travaux sur le mouvement brownien branchant (BBM) en essayant de déterminer la fonction de grande déviation de la frontière du BBM. Nous avons également travaillé sur l'effet de la sélection ou du bruit sur cette fonction de grande déviation.

LES SYSTÈMES DIFFUSIFS HORS D'ÉQUILIBRE

Au début des années 2000, une théorie macroscopique des fluctuations a été développée par une équipe italienne composée de Lorenzo Bertini, Alberto De Sole, Davide Gabrielli, Giovanni Jona Lasinio et Claudio Landim, qui permet de décrire les systèmes diffusifs hors d'équilibre. Une façon de formuler cette théorie est d'écrire les équations d'une hydrodynamique fluctuante. Cela permet de comprendre l'origine des corrélations à longue portée, qui sont une caractéristique des systèmes hors d'équilibre dans des régimes stationnaires. Cela permet également de voir comment la théorie de la réponse linéaire est modifiée dans ces régimes stationnaires. Actuellement, avec Tridib Sadhu de l'Institut Tata à Bombay, nous sommes en train d'étendre cette théorie macroscopique des fluctuations pour essayer de calculer les corrélations de densité induites par de grandes déviations de courant.

LES EFFETS DE TAILLE FINIE ET LA BRISURE DE SYMÉTRIE DES RÉPLIQUES

La solution de modèles de verres de spins en champ moyen élaborée par Parisi au début des années 1980 a été l'une des grandes avancées dans la théorie des systèmes désordonnés. Elle a ouvert la voie à de nombreux développements avec des retombées permettant de comprendre le comportement de réseaux de neurones, de résoudre des problèmes d'optimisation ou de décrire les verres structuraux. Cette théorie qui prédit une propriété nouvelle propre aux systèmes désordonnés, la brisure de symétrie des répliques, repose sur la méthode des répliques qui consiste à essayer de trouver un col dans un espace à n dimensions, l'espace des répliques, en prenant à la fin du calcul la limite $n \rightarrow 0$. La méthode originale proposée par Parisi reste difficile à justifier sur le plan mathématique car on ne sait pas définir un espace dont le nombre de dimensions n'est pas entier. Les prédictions de la théorie de Parisi, en particulier la brisure de symétrie des répliques, ont néanmoins pu être validées par des méthodes probabilistes parfaitement rigoureuses sur le plan mathématique. Dans le but de mieux comprendre les propriétés de ce col dans un espace à 0 dimension, nous avons essayé, avec Peter Mottishaw de l'université d'Édimbourg, de calculer directement, c'est-à-dire sans utiliser la méthode des répliques, les fluctuations autour de ce col.

DÉSORDRE ET RENORMALISATION

Ce travail initié lors de la thèse d'un de mes étudiants à l'ENS, Martin Retaux, en 2014, a pour but d'étudier un problème particulièrement simple de système désordonné par renormalisation. Ce modèle a pour origine une question assez ancienne, celle de la transition de dénaturation de l'ADN ou de dépiégeage en présence de désordre. Il en représente une version très simplifiée. Dans le travail fait avec Martin Retaux, nous avons montré que ce modèle présente une transition de type Kosterlitz-Thouless pour un choix particulier de la forme du désordre. Nos efforts actuels ont pour but de généraliser ce résultat à d'autres formes de désordre et à montrer que le même type de transition se produit pour le problème de dépiégeage.

L'ÉQUATION F-KPP

L'équation Fisher-KPP (Kolmogorov Petrovski, Piscounov) est une équation non linéaire qui décrit la façon dont un milieu instable est envahi par un milieu stable

(par exemple comment un gène favorable se répand dans une population). Au cours des dernières décennies toute une série de travaux ont permis de prédire de manière de plus en plus précise la dépendance temporelle de la position du front qui sépare la région stable de la région instable. Avec Éric Brunet de l'ENS et Julien Berestycki de l'université d'Oxford, nous avons montré que les différents termes universels qui caractérisent cette dépendance temporelle peuvent se comprendre dans le cas d'une équation d'évolution linéaire avec saturation. Le problème de la position du front peut alors se ramener à l'analyse des singularités d'une équation intégrale particulièrement simple et permet de prédire de nouveaux termes universels.

PUBLICATIONS

CHEN X., DERRIDA B., HU Y., LIFSHITS M. et SHI Z., « A hierarchical renormalization model : some properties and open questions », 2017, [arXiv:1705.04787 hal-01723860].

DERRIDA B. et SHI Z., « Large deviations for the rightmost position in a branching Brownian motion », *Modern Problems of Stochastic Analysis and Statistics*, Springer, Cham, 2017, coll. « Springer Proceedings in Mathematics & Statistics », p. 303-312, DOI : 10.1007/978-3-319-65313-6_12 [arXiv:1702.08505].

DERRIDA B. et SHI Z., « Slower deviations of the branching Brownian motion and of branching random walks », *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical*, vol. 50, n° 34, 2017, 344001, DOI : 10.1088/1751-8121/aa7f98 [arXiv:1705.02277].

SADHU T. et DERRIDA B., « Correlations of the density and of the current in non-equilibrium diffusive systems », *Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment*, vol. 2016, n° 11, 2016, 113202, DOI : 10.1088/1742-5468/2016/11/113202 [arXiv:1608.03867].

DERRIDA B. et MOTTISHAW P., « On the genealogy of branching random walks and of directed polymers », *EPL (Europhysics Letters)*, vol. 115, n° 4, 2016, 40005, DOI : 10.1209/0295-5075/115/40005 [arXiv:1607.06610].

DERRIDA B., « The discovery of the broken symmetry of replicas », *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical*, vol. 49, n° 45, 2016, 451001, DOI : 10.1088/1751-8113/49/45/451001.

DERRIDA B. et SHI Z., « Large deviations for the branching Brownian motion in presence of selection or coalescence », *Journal of Statistical Physics*, vol. 163, n° 6, 2016, p. 1285-1311, DOI : 10.1007/s10955-016-1522-z [arXiv:1601.04652 hal-01314680].

DERRIDA B., MEERSON B. et SASOROV P.V., « Large-displacement statistics of the rightmost particle of the one-dimensional branching Brownian motion », *Physical Review E*, vol. 93, n° 4, 2016, 042139, DOI : 10.1103/PhysRevE.93.042139 [arXiv:1601.08070].

DERRIDA B., *Physique statistique : la flèche du temps et le hasard*, Paris, Collège de France/Fayard, coll. « Leçons Inaugurales », n° 258, 2016.