

## Théorie des nombres

M. Don ZAGIER, professeur

### COURS : FONCTIONS DE GREEN ET VALEURS SPÉCIALES DE FONCTIONS $L$

Le thème du cours de cette année était le lien entre les valeurs spéciales des fonctions  $L$  motiviques (et de leurs dérivées) d'un côté et les invariants algébro-géométriques des objets auxquels ces fonctions sont liées de l'autre. Les invariants en question, du type « régulateur généralisé », se calculent à l'aide de fonctions spéciales telles que les fonctions logarithme ou polylogarithme dans les situations les plus simples et des fonctions de Green dans des situations plus générales.

### Travaux d'Euler

L'année 2007 ayant été le 300<sup>e</sup> anniversaire de la naissance d'Euler, le cours a commencé par un aperçu historique des travaux d'Euler sur les fonctions zêta. Cette partie ne sera pas reproduite ici, sauf pour rappeler qu'Euler, dans ses travaux datés de 1734 et 1749, a trouvé :

- la définition de la fonction zêta dite « de Riemann » comme somme infinie,

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} ;$$

- la décomposition multiplicative de cette fonction comme produit portant sur les nombres premiers,

$$\zeta(s) = \prod_{p \text{ premier}} \frac{1}{1 - p^{-s}} ;$$

- les formules

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \quad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}, \quad \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}, \quad \dots$$

et plus généralement

$$\zeta(k) = -\frac{B_k}{2k}(2i\pi)^k \quad (k > 0 \text{ pair, } B_k = k\text{-ième nombre de Bernoulli}) \quad (1)$$

pour les valeurs de  $\zeta(s)$  pour  $s$  un entier pair strictement positif ;

- l'extension de  $\zeta(s)$  à des valeurs de  $s$  inférieures à 1 ;
- les formules

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2}, \quad \zeta(-1) = -\frac{1}{12}, \quad \zeta(-2) = 0, \quad \zeta(-3) = \frac{1}{120}, \quad \zeta(-4) = 0, \quad \dots$$

et plus généralement

$$\zeta(1-k) = (-1)^{k-1} \frac{B_k}{k} \quad (k > 0, B_k = k\text{-ième nombre de Bernoulli}) \quad (2)$$

pour les valeurs de  $\zeta(s)$  pour  $s$  un entier négatif ;

- l'équation fonctionnelle (sans démonstration)

$$\zeta(1-s) = 2 \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) \frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s} \zeta(s)$$

de la fonction  $\zeta(s)$  pour  $s$  réel, avec des arguments théoriques et des vérifications numériques à haute précision pour appuyer cette conjecture ;

- la définition de la série  $L$  « de Dirichlet »

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} = 1 - \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} - \dots$$

pour le caractère  $\chi(n) = (-4/n)$  et les généralisations de toutes les propriétés ci-dessus (produit d'Euler, prolongement à  $s < 1$ , valeurs spéciales pour  $s = 1, 3, 5, 7, \dots$  et pour  $s \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$ , énoncé de l'équation fonctionnelle) pour cette fonction.

En d'autres mots, Euler a trouvé toutes les propriétés essentielles de la fonction zêta connues actuellement sauf la preuve de l'équation fonctionnelle et l'énoncé de l'hypothèse de Riemann, donnés tous les deux par Riemann dans son mémoire célèbre de 1859.

### Fonctions zêta motiviques

La liste des propriétés de  $\zeta(s)$  trouvées par Euler peut nous servir encore aujourd'hui comme guide dans l'étude des fonctions zêta et fonctions  $L$  qui nous intéressent en théorie des nombres. Une telle fonction est toujours donnée par une série de Dirichlet du type  $L(s) = L_{\chi}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)/n^s$  où les  $a_n$  sont des entiers (ou des entiers algébriques) liés aux propriétés d'un certain objet algébrique ou

géométrique  $X$  (qui peut être un corps de nombres, une représentation galoisienne, une variété algébrique sur un corps de nombres, une forme automorphe, etc.) ; elle a un produit d'Euler de la forme  $L_X(s) = \prod_p \phi_p(p^{-s})$ , où  $\phi_p(t)$  est une fonction rationnelle dont les coefficients sont liés aux propriétés  $p$ -adiques de  $X$  ; elle a une équation fonctionnelle du type

$$\widehat{L}_X(s) := \gamma(s) L_X(s) = \pm \widehat{L}_X(k-s) \quad (3)$$

(où quelquefois  $\widehat{L}_X(s) = w \widehat{L}_{X^*}(k-s)$  avec  $|w| = 1$ , où  $X^*$  est un objet algébrique/géométrique « dual » à  $X$ ) pour un certain entier  $k > 0$ , où  $\gamma(s)$  est une fonction de la forme

$$\gamma(s) = A^s \Gamma\left(\frac{s+\alpha_1}{2}\right) \dots \Gamma\left(\frac{s+\alpha_d}{2}\right) \quad (A \in \mathbb{R}_{>0}, \alpha_1, \dots, \alpha_d \in \mathbb{C}) \quad (4)$$

liée aux propriétés de  $X$  sur le corps  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  ; et il y a des formules spéciales qui donnent les valeurs de  $L_X(s)$  pour certaines valeurs intégrales de l'argument  $s$ . Plus précisément, dans les cas les plus intéressants, la fonction  $L_X(s)$  est une fonction dont on sait ou dont on conjecture qu'elle est entière (ou ne possède qu'un nombre fini de pôles, comme le pôle en  $s = 1$  de  $\zeta(s)$ ) ; les fonctions  $\phi_p(t)$  intervenant dans le produit d'Euler ont la forme  $1/P_p(t)$  où  $P_p(t)$  est un polynôme de degré  $d$  pour presque tout nombre premier  $p$  (et  $< d$  pour les autres), avec le même entier  $d$  que dans (4) ; les racines du polynôme  $P_p(t)$  (pour les  $p$  pour lesquels le degré est égal à  $d$ ) et tous leurs conjugués algébriques ont la valeur absolue  $p^{-(k-1)/2}$ , avec le même entier  $k$  que dans (3) (hypothèse de Riemann locale) ; et on conjecture que toutes les racines de la fonction  $\widehat{L}_X(s)$  se trouvent sur la droite  $\Re(s) = k/2$ , toujours avec le même  $k$  (hypothèse de Riemann globale).

Regardons quelques exemples avant de continuer.

1. *Fonction zêta de Riemann*,  $\zeta(s)$ . Ici on a  $a(n) = 1$  pour tout  $n$ , la fonction  $\phi_p(t)$  est égale à  $1/(1-t)$  pour tout  $p$ , et on a l'équation fonctionnelle (3) avec  $k = 1$ , signe +, et  $\gamma(s) = \pi^{-s/2} \Gamma(s/2)$ .

2. *Fonctions  $L$  de Dirichlet*,  $L(s, \chi)$ . Ici on a  $a(n) = \chi(n)$ , où  $\chi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  est un caractère de Dirichlet, la fonction  $\phi_p(t)$  est égale à  $1/(1-\chi(p)t)$ , et on a une équation fonctionnelle du type (3) avec  $k = 1$ , signe +, et  $\gamma(s)$  comme dans (4) avec  $d = 1$  et  $\alpha_1 = 0$  ou  $1$  selon la valeur de  $\chi(-1)$ .

3. *Fonctions zêta de Dedekind*,  $\zeta_F(s)$ . Dans ce cas le nombre  $a(n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  compte le nombre des idéaux entiers de norme  $n$  dans un corps de nombre fixé  $F$  ; l'entier  $k$  dans l'équation fonctionnelle (3) est égal à  $1$ , l'entier  $d$  défini par (4) ou par le degré des facteurs d'Euler de la fonction zêta est égal au degré  $[F: \mathbb{Q}]$ , et les  $\alpha_j$  dans (4) sont égaux à  $0$  ou à  $1$ , le nombre de chaque type étant déterminé par le nombre de plongements réels de  $F$  dans  $\mathbb{C}$ .

4. *Fonctions  $L$  d'Artin*,  $L(s, \rho)$ . Ces fonctions, qui généralisent les trois précédentes, sont attachées à une représentation irréductible  $\rho$  du groupe de Galois d'une extension galoisienne  $F/\mathbb{Q}$ . Ici encore on a  $k = 1$ , tandis que le nombre  $d$

(défini soit par le nombre de fonctions gamma intervenant dans le facteur gamma de l'équation fonctionnelle, soit par le degré des facteurs d'Euler typiques de la fonction  $L$ ) est égal au degré de la représentation  $\rho$ .

Tous ces exemples sont liés aux corps de nombres ou aux « motifs de dimension 0 » et ont  $k = 1$  (c'est-à-dire que l'équation fonctionnelle relie les valeurs  $s$  et  $1 - s$  de l'argument de la fonction zêta, que les racines des polynômes  $P_p(t)$  ont toutes la valeur absolue 1, et que l'hypothèse de Riemann généralisée prédit  $\Re(s) = \frac{1}{2}$  pour les racines de la fonction zêta dont il s'agit). Ça ne sera plus le cas dans les exemples venant de la géométrie. En voici quelques-uns.

5. *Fonction  $L$  d'une courbe elliptique,  $L(E, s)$ .* Pour une courbe elliptique  $E/\mathbb{Q}$  on définit  $L(E, s) = \prod P_p(p^{-s})^{-1}$ , où  $P_p(t) = 1 - a(p)t + pt^2$  avec  $a(p) = p + 1 - |E(\mathbb{F}_p)|$  pour presque tout  $p$ . On n'a aucune définition directe de ces fonctions comme séries de Dirichlet (et c'est l'une des raisons principales pour la difficulté de démontrer leurs propriétés essentielles telles que le prolongement analytique ou l'équation fonctionnelle). L'hypothèse de Riemann locale, avec  $k = d = 2$ , est l'inégalité connue, mais non-triviale,  $|a(p)| \leq 2\sqrt{p}$ . Le prolongement analytique de  $L(E, s)$  et l'équation fonctionnelle, avec  $k = 2, d = 2, \alpha_1 = 0$  et  $\alpha_2 = 1$ , sont également connus, mais extrêmement difficiles (théorème de Wiles et al.).

6. *Fonction  $L$  d'une courbe,  $L(C, s)$ .* La définition de la fonction  $L$  dans ce cas est analogue au cas des courbes elliptiques, sauf que les polynômes  $P_p(t)$  pour  $p$  générique ont le degré  $d = 2g$ , où  $g$  est le genre de la courbe  $C$  définie sur  $\mathbb{Q}$ . L'hypothèse de Riemann locale est connue encore dans ce cas, mais le prolongement analytique et l'équation fonctionnelle restent conjecturales sauf pour certains cas particuliers comme les courbes modulaires.

7. *Fonctions  $L$  associées à la cohomologie d'une variété.* Dans cet exemple, qui généralise les deux précédents, on associe au groupe  $i$ -ième de cohomologie d'une variété  $X$  définie sur  $\mathbb{Q}$  une fonction  $L$  donnée par un produit eulerien dans lequel  $P_p(t)$  est un polynôme de degré  $d = \dim H^i(X)$  ( $i$ -ième nombre de Betti) et qui satisfait à l'hypothèse de Riemann locale avec  $k = i + 1$  (conjecture de Weil, démontrée par Deligne). Bien sûr, on n'a aucune démonstration du prolongement analytique ou de l'équation fonctionnelle en général.

Enfin, il y a les fonctions  $L$  attachées aux formes automorphes (mais qui seront, d'après le programme de Langlands, identiques avec les fonctions du type 7. dans beaucoup de cas). On en mentionne deux.

8. *Fonction  $L$  de Hecke d'une forme modulaire,  $L(f, s)$ .* Si  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n)e^{2i\pi n z}$  est une forme modulaire sur  $\Gamma_0(N)$ , propre pour les opérateurs de Hecke et normalisée par  $a(1) = 1$ , alors la série de Dirichlet  $L(f, s) = \sum_{n>0} a(n)n^{-s}$  a un produit d'Euler  $\prod P_p(p^{-s})^{-1}$  avec  $P_p(t) = 1 - a(p)t + p^{k-1}t^2$  pour  $p \nmid N$  et possède un prolongement analytique (entière si  $f$  est parabolique, et avec un seul pôle en  $s = k$  sinon) et équation fonctionnelle du type (3) avec  $d = 2, \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 1$ . Les

résultats d'Eichler et Shimura (pour  $k = 2$ ) et Deligne (en général) implique que cette fonction est du type 7. et donc que l'hypothèse de Riemann locale  $|a(p)| \leq 2p^{(k-1)/2}$  (hypothèse de Ramanujan) est vérifiée.

9. *Fonction  $L$  du carré symétrique d'une forme modulaire*,  $L(\text{Sym}^2 f, s)$ . Pour  $f$  comme ci-dessus, cette fonction  $L$  est donnée par un produit eulérien du type  $\prod P_p(p^{-s})^{-1}$  avec  $P_p(t) = (1 - p^{k-1}t)(1 - (a(p)^2 - 2p^{k-1})t + p^{2k-2}t^2)$  pour  $p \nmid N$ . Son prolongement méromorphe a été démontré par Rankin et Selberg et son prolongement holomorphe (pour  $f$  parabolique) par Shimura et l'auteur. On a une équation fonctionnelle du type (3) (avec  $k$  remplacé par  $2k - 1$ ) et facteur gamma donné par (4) avec  $d = 3$ . Des propriétés semblables sont conjecturées, et démontrées dans certains cas, pour les fonctions  $L$  associées aux produits symétriques de degré supérieur de  $f$ .

### Valeurs spéciales

Les valeurs spéciales (1) et (2) de  $\zeta(s)$  données par Euler ont une vaste généralisation conjecturale due à Deligne. Supposons donnée une fonction  $L$  motivique, avec équation fonctionnelle donnée par (3) et (4). On appelle *critique* une valeur entière  $s_0$  de l'argument  $s$  telle que ni  $s_0$  ni  $k - s_0$  sont des pôles du facteur gamma  $\gamma(s)$ . Alors la valeur de  $L(s_0)$ , sera conjecturalement un multiple algébrique d'une certaine période (= intégrale d'une forme différentielle définie sur  $\overline{\mathbb{Q}}$  sur un cycle fermé). Plus généralement, d'après des conjectures dues à Bloch, Beilinson et Scholl, si  $s_0$  est un entier quelconque et on note par  $r$  l'ordre de  $\widehat{L}(s)$  en  $s = s_0$  (ou  $s = k - s_0$ ), alors la valeur de la dérivée  $r$ -ième de  $\widehat{L}(s)$  en  $s = s_0$  (ou  $s = k - s_0$ ) sera le produit d'une période et d'un « régulateur » défini comme le déterminant d'une certaine matrice réelle de taille  $r \times r$ . Ces conjectures contiennent comme cas spéciaux des conjectures classiques célèbres telle que la conjecture de Stark, où  $L(s)$  est du type 4. ci-dessus,  $s_0 = 0$ , et les éléments de la matrice qui définit le régulateur sont des logarithmes d'unités algébriques, ou la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer, dans laquelle  $L(s)$  est la fonction  $L$  d'une courbe elliptique  $E$  sur  $\mathbb{Q}$ ,  $s_0 = 1$ ,  $r$  est conjecturalement égal au rang du groupe de Mordell-Weil de  $E$ , et les éléments de la matrice qui définit le régulateur sont donnés par les hauteurs des points rationnels sur  $E$ . Une autre généralisation de la conjecture de Deligne est l'énoncé que si l'argument central  $s_0 = k/2$  est critique, alors la valeur de la série  $L$  en  $s_0$ , divisée par une période correctement normalisée, sera un *carré* dans son corps de définition naturel. C'est le cas, par exemple, dans la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer (où la valeur centrale normalisée est égale à l'ordre du groupe de Shafarevich-Tate, qui est toujours un carré) et pour les valeurs centrales des séries  $L$  associées aux caractères de Hecke, qui, correctement normalisées, sont toujours des carrés (théorème de Villegas et l'auteur ; voir le résumé de cours de 2001-2002).

De nombreux exemples spéciaux de ces conjectures ont été discutés dans le cours. Nous en reprenons quelques-uns ici.

### Le régulateur dans la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer

Soit  $E/\mathbb{Q}$  une courbe elliptique avec groupe de Mordell-Weil de rang  $r$ , avec générateurs (modulo torsion)  $P_1, \dots, P_r$ . La conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer prédit que la série  $L$  de  $E$  aura un zéro d'ordre exactement  $r$  en  $s = 1$  (ce que l'on sait dans certains cas) et que la dérivée  $L^{(r)}(E, 1)$  sera, à un facteur élémentaire près, égale au produit de la période réelle  $\Omega_E$  de  $E$  et du régulateur  $R = \det (\langle P_i, P_j \rangle_{i,j=1,\dots,r})$ , où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est l'accouplement canonique sur  $E(\mathbb{Q}) \otimes \mathbb{R}$ . Un cas particulier d'un résultat de Scholl, qui a été explicité dans un article de M. Kontsevich et l'auteur il y a quelques années et présenté dans le cours, dit que le produit  $\Omega_E R$  s'écrit lui-même comme le déterminant d'une matrice, cette fois de taille  $(r+1) \times (r+1)$ , dont les coefficients sont des périodes « mixtes » de la courbe. La grande question, encore non résolue, serait alors de démontrer que la valeur  $L^{(r)}(E, 1)$  aussi s'exprime en termes des périodes des formes algébriques ; si c'était le cas, des conjectures générales sur les périodes nous permettraient d'espérer pouvoir démontrer l'égalité voulue, au moins dans des cas concrets. (Pour l'instant la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer n'est vérifiée que numériquement dans aucun cas avec  $r > 1$ .)

### Valeurs des fonctions zêta de Dedekind et polylogarithmes

Il s'agit ici des conjectures énoncées il y a quelques années par l'auteur, et démontrées dans certains cas par Deligne, Beilinson et Goncharov, d'après lesquelles les valeurs en  $s = m$  de la fonction zêta de Dedekind  $\zeta_F(s)$  d'un corps de nombres  $F$  quelconque, et pour un entier  $m > 1$  quelconque, s'exprimeraient comme le déterminant d'une matrice ayant comme coefficients des combinaisons linéaires rationnelles des valeurs de la  $m$ -ième fonction polylogarithme  $D_m$  (convenablement définie) avec arguments dans  $F$ . L'espace vectoriel sous-jacent à cette matrice est le «  $m$ -ième groupe de Bloch » et devrait être isomorphe au  $K$ -groupe algébrique  $K_{2m-1}(F) \otimes \mathbb{Q}$ . Cette conjecture, qui est appuyée par beaucoup de calculs numériques et arguments théoriques, est dans un certain sens typique de la situation générale. On a expliqué aussi comment on peut retrouver les fonctions  $D_m(x)$  comme des fonctions de Green associées au quotient du demi-plan de Poincaré modulo le groupe des translations par des entiers, avec la métrique hyperbolique.

### Fonctions $L$ des courbes sur $\mathbb{Q}$ en $s = 2$

Si  $E$  est une courbe elliptique, des idées et résultats de Bloch et de Beilinson impliquent que la valeur non-critique  $L(E, 2)$  peut s'exprimer comme un multiple simple d'une combinaison linéaire, à coefficients dans  $\mathbb{Q}$ , de la fonction dilogarithme elliptique associée à  $E$ , évaluée dans des points algébriques de  $E$ . (Si on écrit  $E(\mathbb{C})$  comme  $\mathbb{C}^*/q^{\mathbb{Z}}$  pour un nombre complexe  $q$  avec  $|q| < 1$ , la fonction dilogarithme elliptique dont il s'agit est définie comme la somme sur une orbite de  $q^{\mathbb{Z}}$  de la

fonction dilogarithme modifiée qui intervient dans le calcul des valeurs des fonctions zêta de Dedekind en  $s = 2$ .) Une description précise des combinaisons linéaires permises a été donnée il y a quelques années par l'auteur (avec des corrections dues à Schappacher et Rolshausen dans certains cas) et présentée dans le cours. Si on remplace  $E$  par une courbe  $C/\mathbb{Q}$  de genre  $g > 1$ , les conjectures générales impliquent toujours une expression pour  $L(C, 2)$  en termes d'un certain régulateur dont les coefficients sont des intégrales sur la courbe, mais ne sont plus donnés en termes d'une fonction explicite comme le dilogarithme elliptique. Le groupe sur lequel ces intégrales doivent être évaluées est le  $K$ -groupe algébrique  $K_2(C/\mathbb{Z})$ . Ce cas, qui a été étudié et vérifié numériquement dans beaucoup de cas (tous hyperelliptiques, de genre allant jusqu'à 6) dans un article récent de R. de Jeu, T. Dokchitser et l'auteur, a été discuté en détail. Le problème de construire des éléments non-triviaux du  $K$ -groupe  $K_2(C)$  dans ces cas mène à des problèmes élémentaires en théorie des nombres où il s'agit de trouver des polynômes  $f$  définis sur  $\mathbb{Q}$  pour lesquels  $f(x)^2 - f(0)^2$  se factorise en autant de facteurs rationnels que possible, un exemple typique étant la décomposition  $(x^6 + 2x^5 - 787x^4 - 188x^3 + 150012x^2 - 149040x - 3326400)^2 - 3326400^2 = (x - 22)(x - 20)(x - 18)(x - 12)(x - 10)(x - 1)x(x + 7)(x + 15)(x + 18)(x + 23)(x + 24)$ .

### Valeurs des fonctions de Green modulaires

Dans des travaux joints avec B. Gross il y a un certain nombre d'années, un lien a été établi entre les dérivées centrales  $L'(f, k/2)$  des séries  $L$  des formes modulaires (propres pour les opérateurs de Hecke) de poids pair  $k$  et des valeurs de certaines fonctions de Green modulaires associées aux quotients du demi-plan de Poincaré par un groupe fuchsien, avec la métrique hyperbolique. Ces résultats dans le cas  $k = 2$  avaient des conséquences pour la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer, mais aussi (dans le même cas) pour l'étude arithmétique des valeurs de la fonction modulaire  $j(z)$  dans des points  $z$  à multiplication complexe. Pour  $k > 2$ , ils ont mené à une conjecture d'après laquelle les valeurs de ces fonctions de Green dans les arguments à multiplication complexe seraient dans certains cas les logarithmes de nombres algébriques. Un nombre de résultats obtenus par l'auteur dans l'entre-temps, et des résultats très récents de A. Mellit qui démontrent l'algébricité prédite dans certains cas (notamment quand  $k = 4$ , le groupe modulaire en question est  $SL(2, \mathbb{Z})$ , et l'un des arguments de la fonction de Green est  $\sqrt{-1}$ ) ont été présentés dans le cours, mais sont trop techniques pour être repris ici. Un aspect intéressant est le lien entre les fonctions de Green qui interviennent ici et les fonctions polylogarithmes qui interviennent dans les conjectures concernant les valeurs spéciales des fonctions zêta de Dedekind. Les conjectures et résultats peuvent s'interpréter aussi comme des énoncés sur les valeurs spéciales de certaines fonctions qui satisfont à une équation différentielle à coefficients rationnels ou algébriques.

## COURS À L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE : « BOUILLON MATHÉMATIQUE »

Dans le cours « Bouillon » de cette année on a présenté des méthodes explicites qui permettent de résoudre des divers types de problèmes asymptotiques tels que :

1. Quel est le comportement asymptotique quand  $x$  tend vers 0 d'une série lentement convergente de la forme  $\sum_{n=1}^{\infty} f(nx)$ , où  $f(x)$  est une fonction dont le comportement pour  $x$  petit est connu ?

2. Comment trouve-t-on une formule asymptotique précise pour des nombres  $a_n$  (par exemple,  $a_n$  pourrait être le nombre de partitions de  $n$ ) dont on connaît « explicitement » la fonction génératrice  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  ?

3. Si on a une suite de nombres  $A_n$  (par exemple,  $A_n$  pourrait être le nombre de courbes algébriques de degré  $n$  passant par  $3n-1$  points génériques dans le plan, pour lequel Kontsevich a trouvé une récurrence non-linéaire) dont on conjecture qu'ils ont un comportement asymptotique de la forme  $A_n \sim n^\alpha e^{An} (C_0 + C_1 n^{-1} + C_2 n^{-2} + \dots)$ , comment peut-on trouver les premiers coefficients  $A, \alpha, C_0, C_1, C_2, \dots$  à haute précision à partir d'un nombre limité (par exemple,  $A_1, \dots, A_{500}$ ) des  $A_n$  ?

4. Comment calculerait-on la valeur de la fonction  $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(x/n)/n$  de Hardy-Littlewood pour, disons,  $x = 10^{60}$  à 100 chiffres près ?

De tels problèmes se posent partout en mathématiques et en physique mathématique mais les méthodes pour les résoudre de façon efficace ne sont en général pas très bien connues.

## CONFÉRENCES INVITÉES

Bordeaux, octobre 2007 : *Quantum modular forms*. Conférence à l'occasion du 60<sup>e</sup> anniversaire d'Henri Cohen, Université de Bordeaux I.

Bonn, Allemagne, octobre 2007 : *Verknotete Modulformen*. Conférence à l'occasion du 80<sup>e</sup> anniversaire de Friedrich Hirzebruch, Universität Bonn.

Banff, Canada, octobre 2007 : *Modularity and three-manifolds*. Conférence sur « Low-dimensional Topology and Number Theory », Banff International Research Station.

Paris, novembre 2007 : *Les « mock theta functions » de Ramanujan (d'après Zwegers et Bringmann-Ono)*. Séminaire Bourbaki, Institut Henri Poincaré.

Lille, décembre 2007 : *Les fausses formes modulaires*. Colloque, Université de Lille I.

Bonn, Allemagne, janvier 2008 : *The Riemann zeta function and the Selberg zeta function as determinants*. Workshop « Random matrices and number theory », Hausdorff Mathematics Institute.

Bonn, Allemagne, janvier 2008 : *Gaussian periods and finite projective planes*. Number Theory Seminar, Max-Planck-Institut für Mathematik.

Bonn, Allemagne, janvier et février 2008 : *Asymptotic methods* (deux conférences). Conférences pour membres de l'école doctorale « IMPRS », Max-Planck-Institut für Mathematik.



Paderborn, Allemagne, janvier 2008 : *Warum ich von Primzahlen träume*. Conférence populaire dans le cadre du programme « Zahlen, bitte! », Nixdorf-Zentrum.

Bonn, Allemagne, février 2008 : *Spectral decomposition and the Rankin-Selberg method*. Second Japanese-German number theory workshop.

Amsterdam, Pays-Bas, février 2008 : *Mock theta functions and their applications*. Colloquium, Universiteit Amsterdam.

Utrecht, Pays-Bas, février 2008 : *Finite projective planes, Fermat curves, and Gaussian periods*. Colloquium Universiteit Utrecht.

Amsterdam, Pays-Bas, février 2008 : *Modular Green's functions*. Intercity number theory seminar « L-functions and friends ».

Dublin, Irlande, avril 2008 : *Gaussian periods and finite projective planes*. Colloquium, University College Dublin et Trinity College.

Dublin, Irlande, avril 2008 : *The amazing five-term relation*. Conférence populaire, Trinity College.

Dublin, Irlande, avril 2008 : *Modular forms and not-so-modular forms in mathematics and physics*. Workshop on Gauge Theory, Moduli spaces and Representation Theory, Trinity College.

Vienne, Autriche, avril 2008 : *Quantum ideas in number theory and vice versa*. Conférence plénière à l'occasion du 15<sup>e</sup> anniversaire de l'Institut Ernst Schrödinger.

Baton Rouge, Louisiana, États-Unis, avril 2008 : *The « q » of « quantum »* (trois conférences). Porcelli Lectures 2008, Louisiana State University.

Austin, Texas, États-Unis, avril 2008 : *Mock modular forms*. Number theory seminar, University of Texas.

Bonn, Allemagne, mai 2008 : *Diophant und die diophantischen Gleichungen*. Conférence pour lycéens, Max-Planck-Institut für Mathematik.

Bar-Ilan, Israël, mai 2008 : *Differential equations and curves on Hilbert modular surfaces*. Conférence « Hirz80 » en l'honneur du 80<sup>e</sup> anniversaire de Friedrich Hirzebruch, Université de Bar-Ilan.

Haifa, Israël, mai 2008 : *The mysterious mock theta functions of Ramanujan*. Colloquium, University of Haifa.

Bonn, Allemagne, juin 2008 : *Das Geheimleben der Zahlen*. Conférence d'intérêt général dans le cadre du programme « Mathe für alle—Vorlesungen im Freien ».

Bielefeld, Allemagne, juin 2008 : *On the conjecture of Birch and Swinnerton-Dyer*. Conférence générale dans la série « Jahrtausendprobleme der Mathematik ».

Bonn, Allemagne, juin et juillet 2008 : *Periods of modular forms* (trois conférences). Conférences pour membres de l'école doctorale « IMPRS », Max-Planck-Institut für Mathematik.

Bonn, Allemagne, juillet 2008 : *Von Zahlentheorie zu Knotentheorie zu Quantentheorie*. Conférence populaire, « Nacht der offenen Tür » du Max-Planck-Institut für Mathematik.

Bayreuth, Allemagne, juillet 2008 : *Diophantische Gleichungen: 2000 Jahre alt und noch nicht gelöst*. Conférence spéciale dans le cadre du Tag der Mathematik de l'Université de Bayreuth.

Bonn, Allemagne, juillet 2008 : *Mock theta functions, indefinite theta series and wall-crossing formulas*. Workshop on Mirror Symmetry, Hausdorff Institute for Mathematics.

Bonn, Allemagne, juillet 2008 : *Teichmüller curves and modular forms*. Workshop on Codes, Invariants and Modular Forms, Max-Planck-Institut für Mathematik.

Tokyo, Japon, août 2008 : *q-series and modularity*. Algebra Colloquium, Tokyo University.

Tokyo, Japon, août 2008 : *The mathematics of and around Seki Takakazu as seen through the eyes of a contemporary mathematician*. International Conference on History of Mathematics in Memory of Seki Takakazu, Tokyo University of Science.

#### AUTRES MISSIONS ET ACTIVITÉS

Bonn, Allemagne, février 2008 : Entretien enregistré avec Deutschlandfunk, diffusé le 12 mai 2008.

Bonn, Allemagne, mars 2008 : Entretien enregistré avec WDR, diffusé le 29 avril 2008.

Bar-Ilan, Israël, mai 2008 : Beirat (comité scientifique), Emmy Noether Institute.

Utrecht, Pays-Bas, mai 2009 : Membre du jury, thèse de Oliver Lorscheid (« Toroidal automorphic forms for function fields »), Universiteit Utrecht.

Bonn, Allemagne, juin 2008 : Rapporteur et membre du jury pour la thèse de mon étudiant Anton Mellit (« Higher Green's functions for modular forms »), Universität Bonn.

Berlin, Allemagne, juin 2008 : « Mathematik im Gespräch », discussion publique avec R. Taschner, Akademientag, Deutsche Union der Akademien der Wissenschaften.

Paris, juin 2008 : Rapporteur et membre du jury, thèse de Sarah Carr (« Multizeta values : Lie algebras and periods on  $\mathfrak{M}_{0,n}$  »), Université de Paris 6.

#### PUBLICATIONS ET PRÉPUBLICATIONS

(avec L. Weng) Deligne products of line bundles over moduli spaces of curves. *Commun. in Math. Phys.* **281** (2008), n° 3, 793-803.

Evaluation of  $S(m, n)$ . Appendice à « Low energy expansion of the four-particle genus-one amplitude in type II superstring theory » par M. Green, J. Russo et P. Vanhove, *JHEP* 02 (2008), **020**, pp. 33-34.

Integral solutions of Apéry-like recurrence equations. A paraître dans *Groups and Symmetries : From the Neolithic Scots to John McKay*, CRM Proceedings and Lecture Notes of the American Mathematical Society, **47** (2008), Centre de Recherches Mathématiques, 18 pages.

Ramanujan's mock theta functions and their applications (d'après Zwegers and Bringmann-Ono). Séminaire Bourbaki, 60<sup>e</sup> année, 2006-2007, n° 986, à paraître dans *Astérisque*, 20 pages.

(avec A. Zinger) Some properties of hypergeometric series associated with mirror symmetry. Dans *Modular Forms and String Duality*, Fields Institute Communications **54** (2008), pp. 163-177.

Exact and asymptotic formulas for  $v_n$ . Appendice à « Sequences of enumerative geometry : congruences and asymptotics » par D. Grünberg et P. Moree, pp. 21-24, à paraître dans *Experimental Mathematics*.